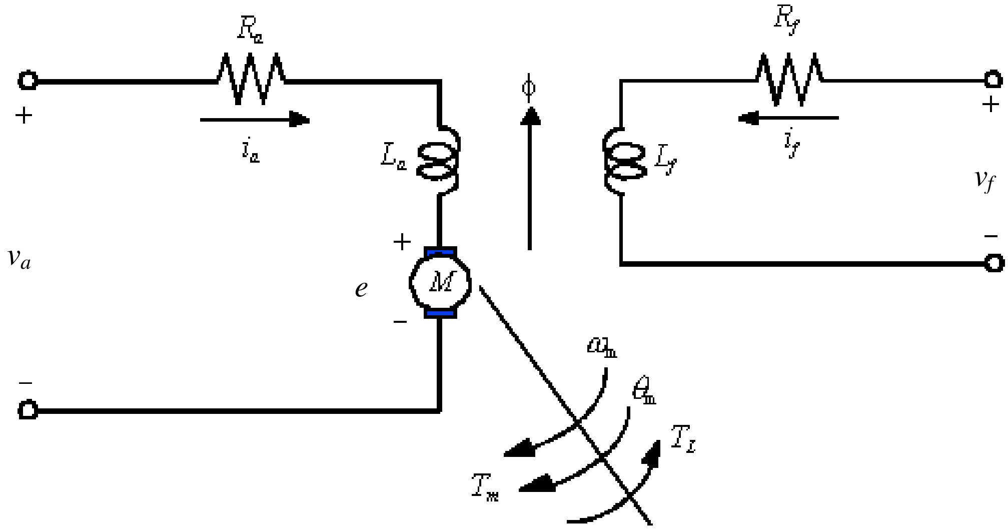
# ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΗΤΗΡΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

## 1. ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΚΥΚΛΩΜΑ ΚΙΝΗΤΗΡΑ

Στο Σχήμα 1 φαίνεται το ισοδύναμο κύκλωμα του κινητήρα συνεχούς ρεύματος ανεξάρτητης (ξένης) διέγερσης. Στα αριστερά φαίνεται το κύκλωμα του δρομέα (όπου αναπτύσσεται η ροπή του κινητήρα) και στα δεξιά το κύκλωμα του στάτη (υπεύθυνο για τη δημιουργία του μαγνητικού πεδίου). Η σύζευξη των δύο κυκλωμάτων επιτυγχάνεται μέσω της μαγνητικής ροής $\varphi$.




Σχ.1 Το ισοδύναμο κύκλωμα του ηλεκτρικού κινητήρα συνεχούς ρεύματος ανεξάρτητης (ξένης) διέγερσης.

Μεγέθη που εμφανίζονται στο ισοδύναμο κύκλωμα και στο μοντέλο του κινητήρα συνεχούς ρεύματος, ανεξάρτητης διέγερσης.

$R_a$: ωμική αντίσταση δρομέα
$L_a$: αυτεπαγωγή δρομέα
$i_a$: ρεύμα δρομέα
$i_f$: ρεύμα στάτη
$v_a$: τάση δρομέα
$v_f$: τάση στάτη
$e$: αντιηλεκτρεγερτική δύναμη
$\theta$: γωνία στροφής του άξονα
$\omega$: ταχύτητα περιστροφής του άξονα
$T_M$: ροπή παραγόμενη (προσφερόμενη) από τον κινητήρα
$J$: ισοδύναμη ροπή αδράνειας του φορτίου και του κινητήρα αναφερόμενη στον άξονα
$T_M$: ροπή φορτίου
$R_f$: ωμική αντίσταση στάτη
$L_f$: αυτεπαγωγή στάτη
$B$: ισοδύναμος συντελεστής τριβής του κινητήρα και του φορτίου αναφερόμενος στον άξονα

Θεωρώντας ότι ο κινητήρας λειτουργεί στη γραμμική περιοχή της καμπύλης μαγνήτισης (και για σταθερό ρεύμα στάτη επομένως σταθερό μαγνητικό πεδίο), η ροπή που παρέχει είναι ανάλογη του ρεύματος δρομέα

$$T_M = K_M i_a \quad ; \quad K_M = const \tag{1}$$

και η αντιηλεκτρεγερτική δύναμη είναι ανάλογη της ταχύτητας περιστροφής

$$e = K\omega = K\frac{d\theta}{dt} \quad ; \quad K = const \tag{2}$$

## 2. ΜΟΝΤΕΛΟ Α (Έξοδος η γωνία $\theta$)

### 2.1. Περιγραφή μέσω διαφορικών εξισώσεων

Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τη λειτουργία του κινητήρα είναι οι εξής:
Για το ηλεκτρικό τμήμα, από το 2ο νόμο του Kirchhoff στον κυκλωματικό βρόχο του δρομέα παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση:

$$L_a\frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e = v_a \tag{3}$$

Για το μηχανικό τμήμα από την εξίσωση της ροπής που παράγεται με τις ροπές που "καταναλώνονται" παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + B\frac{d\theta}{dt} + T_L = T_M \tag{4}$$

Οι δύο αυτές διαφορικές εξισώσεις συνδέονται μέσω των (1) και (2). Αν κάνουμε τις αντικαταστάσεις προκύπτει ένα νέο ζεύγος διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει συνολικά τη λειτουργία του κινητήρα:

$$L_a\frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K\frac{d\theta}{dt} = v_a \tag{5}$$

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + B\frac{d\theta}{dt} + T_L = K_M i_a \tag{6}$$

### 2.2. Περιγραφή μέσω συνάρτησης/πίνακα μεταφοράς

Θεωρούμε ως εισόδους του μοντέλου την τάση $v_a$ και τη ροπή φορτίου $T_L$ και έξοδο τη γωνία περιστροφής. Το σύστημα είναι τρίτης τάξεως. Εάν πάρουμε τους Μ/Σ Laplace των (5) και (6) προκύπτει

$$L_a\left[sI_a(s)\right] + R_a I_a(s) + K\left[s\Theta(s)\right] = V_a(s) \tag{7}$$

$$J\left[s^2\Theta(s) - s\Theta(s)\right] + B\left[s\Theta(s)\right] + T_L(s) = K_M I_a(s) \tag{8}$$

Εάν θεωρήσουμε τη δεύτερη είσοδο μηδέν και απαλείψουμε το $I_a(s)$ προκύπτει

$$\frac{\Theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_M}{s\left[JL_a s^2 + \left(JR_a + BL_a\right)s + BR_a + KK_M\right]} \tag{9}$$

Εάν θεωρήσουμε την πρώτη είσοδο μηδέν και ξανά απαλείψουμε το $I_a(s)$ προκύπτει

$$\frac{\Theta(s)}{T_L(s)} = \frac{-\left(L_a s + R_a\right)}{s\left[JL_a s^2 + \left(JR_a + BL_a\right)s + BR_a + KK_M\right]} \tag{10}$$

που σημαίνει ότι ο πίνακας μεταφοράς είναι

$$\begin{bmatrix} \dfrac{K_M}{s\left[JL_a s^2 + \left(JR_a + BL_a\right)s + BR_a + KK_M\right]} \\ \dfrac{-\left(L_a s + R_a\right)}{s\left[JL_a s^2 + \left(JR_a + BL_a\right)s + BR_a + KK_M\right]} \end{bmatrix} = \frac{1}{s\left[JL_a s^2 + \left(JR_a + BL_a\right)s + BR_a + KK_M\right]}\begin{bmatrix} K_M \\ -\left(L_a s + R_a\right) \end{bmatrix} \tag{11}$$

**2.3. Περιγραφή μέσω εξισώσεων κατάστασης**

Το μοντέλο του συστήματος είναι 3ης τάξης, επομένως οι μεταβλητές κατάστασης είναι και αυτές 3. Επιλέγουμε τις $\theta$, $d\theta/dt$ και $i_a$ οι οποίες είναι φυσικές μεταβλητές. Το αντίστοιχο διάνυσμα είναι:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i_a \end{bmatrix} \tag{12}$$

Από το ότι η 2η μεταβλητή κατάστασης είναι η παράγωγος της 1ης και από τις (5) και (6) βρίσκουμε για τις εξισώσεις κατάστασης

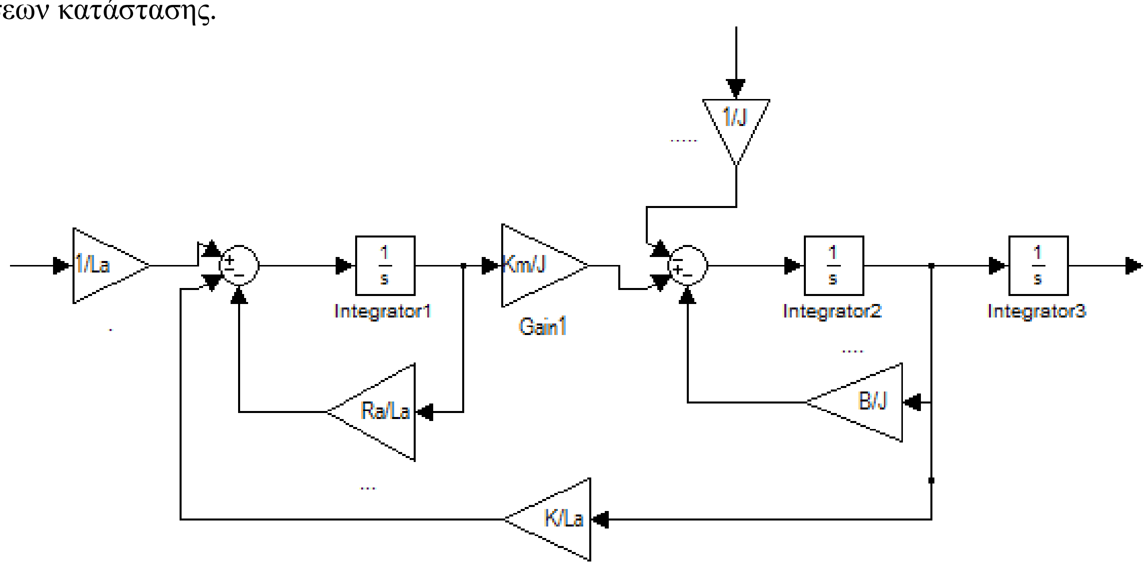
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{B}{J}x_2 + \frac{K_M}{J}x_3 - \frac{1}{J}u_2 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{K}{L_a}x_2 - \frac{R_a}{L_a}x_3 + \frac{1}{L_a}u_1 \end{aligned} \tag{13}$$

Θεωρούμε και πάλι ως εισόδους του μοντέλου την τάση $u_1 = v_a$ και τη ροπή φορτίου $u_2 = T_L$ και έξοδο τη γωνία περιστροφής $y = \theta$. Σε μορφή πινάκων έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B}{J} & \frac{K_M}{J} \\ 0 & -\frac{K}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \\ \frac{1}{L_a} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{14α}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{14β}$$

απ' όπου εύκολα συνάγονται οι πίνακες που απαιτούνται στην περιγραφή του συστήματος μέσω εξισώσεων κατάστασης.




Σχ.2 Διάγραμμα βαθμίδων.

## 3. ΜΟΝΤΕΛΟ Β (Έξοδος η περιστροφική ταχύτητα $\omega$)

### 3.1. Περιγραφή μέσω διαφορικών εξισώσεων

Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τη λειτουργία του κινητήρα είναι οι εξής:
Για το ηλεκτρικό τμήμα, από το 2ο νόμο του Kirchhoff στον κυκλωματικό βρόχο του δρομέα παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e = v_a \tag{15}$$

Για το μηχανικό τμήμα από την εξίσωση της ροπής που παράγεται με τις ροπές που "καταναλώνονται" παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση

$$J \frac{d\omega}{dt} + B\omega + T_L = T_M \tag{16}$$

Οι δύο αυτές διαφορικές εξισώσεις συνδέονται μέσω των (1) και (2). Αν κάνουμε τις αντικαταστάσεις προκύπτει ένα νέο ζεύγος διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει συνολικά τη λειτουργία του κινητήρα:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K\omega = v_a \tag{17}$$

$$J \frac{d\omega}{dt} + B\omega + T_L = K_M i_a \tag{18}$$

### 3.2 Περιγραφή μέσω συνάρτησης/πίνακα μεταφοράς

Θεωρούμε ως εισόδους του μοντέλου την τάση $v_a$ και τη ροπή φορτίου $T_L$ και έξοδο τη γωνία περιστροφής. Το σύστημα είναι τώρα δεύτερης τάξεως. Εάν πάρουμε τους Μ/Σ Laplace των (17) και (18) προκύπτει

$$L_a\left[sI_a(s)\right] + R_a I_a(s) + K\Omega(s) = V_a(s) \tag{19}$$

$$J\left[s\Omega(s)\right] + B\Omega(s) + T_L(s) = K_M I_a(s) \tag{20}$$

Εάν θεωρήσουμε τη δεύτερη είσοδο μηδέν και απαλείψουμε το $I_a(s)$ προκύπτει

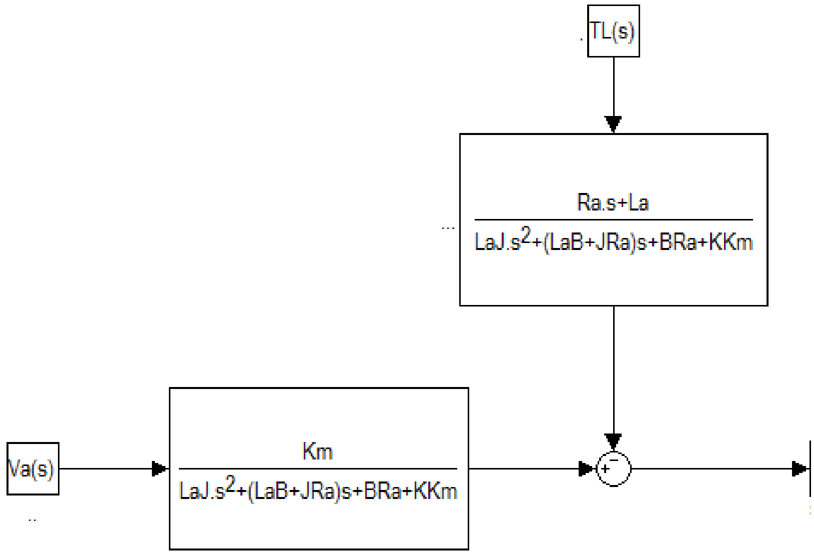
$$\frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K_M}{\left(R_a + sL_a\right)\left(sJ + B\right) + KK_M} \tag{21}$$

Εάν θεωρήσουμε την πρώτη είσοδο μηδέν και ξανά απαλείψουμε το $I_a(s)$ προκύπτει

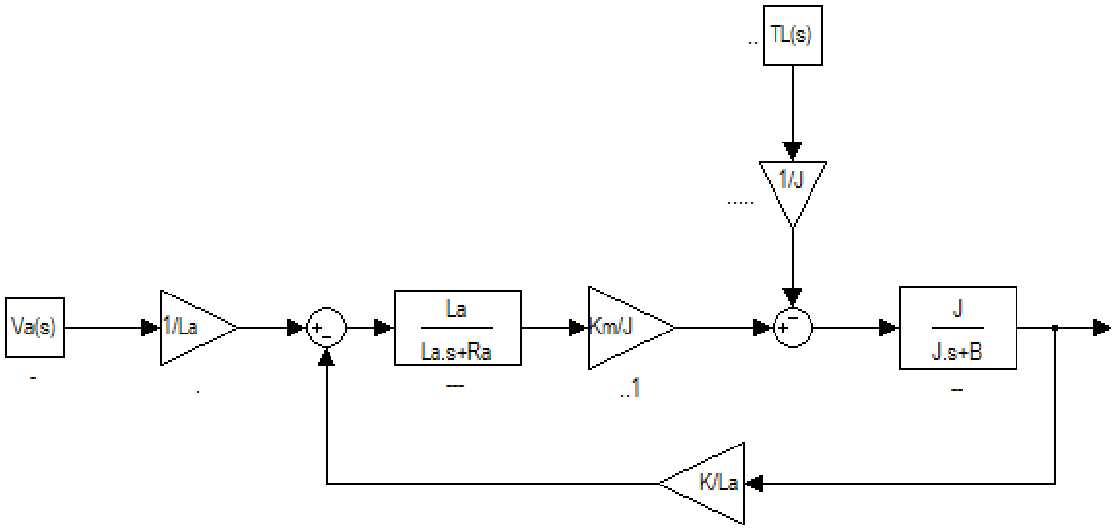
$$\frac{\Omega(s)}{T_L(s)} = \frac{-\left(R_a + sL_a\right)}{\left(R_a + sL_a\right)\left(sJ + B\right) + KK_M} \tag{22}$$

που σημαίνει ότι ο πίνακας μεταφοράς είναι

$$\begin{bmatrix} \dfrac{K_M}{\left(R_a + sL_a\right)\left(sJ + B\right) + KK_M} \\ \dfrac{-\left(R_a + sL_a\right)}{\left(R_a + sL_a\right)\left(sJ + B\right) + KK_M} \end{bmatrix} = \frac{1}{\left(R_a + sL_a\right)\left(sJ + B\right) + KK_M} \begin{bmatrix} K_M \\ -\left(L_a s + R_a\right) \end{bmatrix} \tag{23}$$




Σχ.3 Διάγραμμα βαθμίδων με συναρτήσεις μεταφοράς.




Σχ.4 Διάγραμμα βαθμίδων με επιμέρους συναρτήσεις μεταφοράς.

### 3.3 Περιγραφή μέσω εξισώσεων κατάστασης

Το μοντέλο του συστήματος είναι τώρα 2ης τάξης, επομένως οι μεταβλητές κατάστασης είναι και αυτές 2. Επιλέγουμε τις $\omega$ και $i_a$ οι οποίες είναι επίσης φυσικές μεταβλητές. Το αντίστοιχο διάνυσμα είναι:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ i_a \end{bmatrix} \tag{24}$$

Από τις (17) και (18) βρίσκουμε για τις εξισώσεις κατάστασης

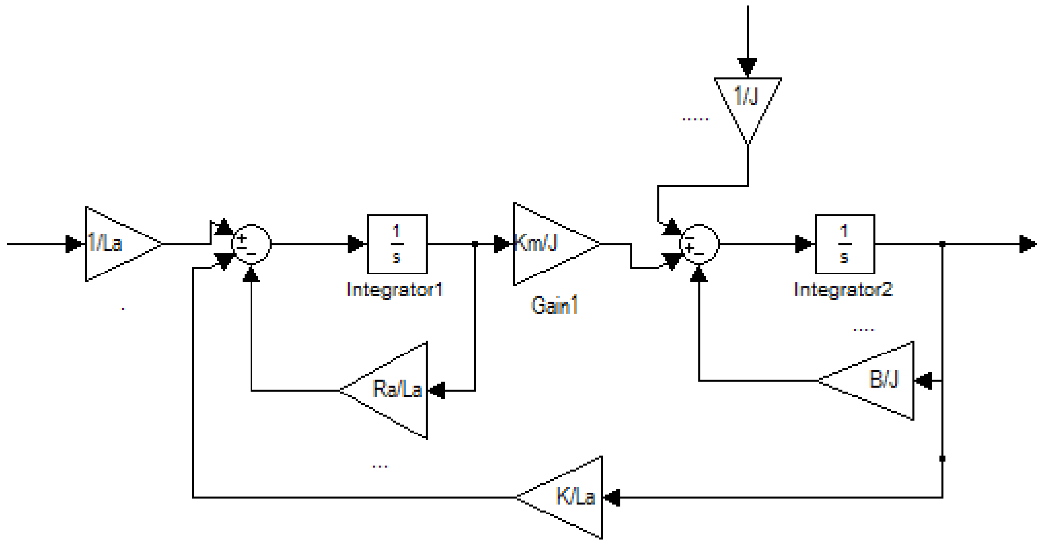
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{B}{J}x_1 + \frac{K_M}{J}x_2 - \frac{1}{J}u_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{K}{L_a}x_1 - \frac{R_a}{L_a}x_2 + \frac{1}{L_a}u_1 \end{aligned} \tag{25}$$

Θεωρούμε και πάλι ως εισόδους του μοντέλου την τάση $u_1 = v_a$ και τη ροπή φορτίου $u_2 = T_L$ και έξοδο την ταχύτητα περιστροφής $y = \theta$. Σε μορφή πινάκων έχουμε:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{B}{J} & \frac{K_M}{J}\\ -\frac{K}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a}\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{J}\\ \frac{1}{L_a} & 0\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix} \qquad (26\alpha)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}}_{\mathbf{C}}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \qquad (26\beta)$$

απ' όπου εύκολα συνάγονται οι πίνακες που απαιτούνται στην περιγραφή του συστήματος μέσω εξισώσεων κατάστασης.




Σχ.5 Διάγραμμα βαθμίδων.