



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

**Ιστορική εξέλιξη των μεθόδων απλού βήματος για την αριθμητική
επίλυση διαφορικών εξισώσεων**

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της
Γεωργίας Ανδρεοπούλου
(ΑΕΜ: 00219)

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Καλογηράτου Ζαχαρούλα

Καστοριά, Σεπτέμβριος 2025



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

**Ιστορική εξέλιξη των μεθόδων απλού βήματος για την
αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων**

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**της
ΑΝΔΡΕΟΠΟΥΛΟΥ ΓΕΩΡΓΙΑ
(ΑΕΜ: 00219)**

Επιβλέπουσα:
Καλογηράτου Ζαχαρούλα

**Η παρούσα πτυχιακή εργασία εκπονήθηκε για την (εδώ συμπληρώνεται η ημερομηνία
έγκρισης της εργασίας).**

Όνομα Μέλους

Καστοριά Σεπτέμβριος -- 2025 (ημερομηνία της έγκρισης)

© 2025 - ΑΝΔΡΕΟΠΟΥΛΟΥ ΓΕΩΡΓΙΑ

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν αποκλειστικά τον συγγραφέα και δεν αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου, κ.Καλογηράτου Ζαχαρούλα, για την καθοδήγησή της και την πολύτιμη υποστήριξή της καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας.

Περίληψη

Ο σκοπός της εργασίας είναι να μελετηθεί η πορεία της εξέλιξης των μεθόδων απλού βήματος για την αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Η μελέτη ξεκινάει με τις σημαντικές συνεισφορές του Αρχιμήδη, του Νεύτωνα, του Euler και του Gauss, που έθεσαν τις βάσεις της αριθμητικής ανάλυσης. Περιγράφεται στο πως η ανάπτυξη της μαθηματικής μοντελοποίησης συνδέθηκε τόσο με την ανάγκη κατανόησης της κίνησης των πλανητών όσο και με την εμφάνιση των υπολογιστών, οι οποίοι άνοιξαν νέους δρόμους στις εφαρμογές. Στη συνέχεια, το ενδιαφέρον στρέφεται στη μέθοδο απλού βήματος του Euler, στις βελτιώσεις και επεκτάσεις του Runge και του Heun και του Kutta. Ειδική αναφορά γίνεται στην εργασία του Kutta το 1910 και τις μέθοδοι Runge-Kutta όπως τις γνωρίζουμε σήμερα. Ακολούθως, παρουσιάζονται οι συνθήκες τάξης με την χρήση δέντρων και πινάκων, γνωστών ως Butcher array. Η εργασία ολοκληρώνεται με τη συνεισφορά του Nyström.

Abstract

The purpose of the paper is to study the course of the evolution of single-step methods for the numerical solution of differential equations. The study begins with the important contributions of Archimedes, Newton, Euler and Gauss, who laid the foundations of numerical analysis. It is described in how the development of mathematical modeling was linked both to the need to understand the motion of the planets and to the appearance of computers, which opened new paths in applications. Then, interest is focused on Euler's single-step method, the improvements and extensions of Runge and Heun and Kutta. Special reference is made to Kutta's work in 1910 and the Runge-Kutta methods as we know them today. Subsequently, the order conditions using trees and matrices, known as Butcher arrays, are presented. The paper concludes with the contribution of Nyström.

Περιεχόμενα

1	Η αριθμητική ανάλυση ως θεμέλιο της Σύγχρονης Υπολογιστικής Επιστήμης	13
1.1	Ιστορική εξέλιξη της αριθμητικής ανάλυσης	14
1.2	Αριθμητικές Μέθοδοι και Διαφορικές Εξισώσεις πριν την Ψηφιακή Εποχή	21
1.2.1	Θεωρία Διαφορικών εξισώσεων: Ορισμοί και βασικές έννοιες	24
1.2.2	Το πρόβλημα αρχικών τιμών	26
1.2.3	Αριθμητικές Μέθοδοι	27
2	Πρώιμη εργασία σε αριθμητικές μεθόδους συνήθων διαφορικών εξισώσεων	29
2.1	Euler	29
2.2	Η εργασία του Runge 1895	31
2.3	Τυποποίηση-Συμβολισμός του Butcher	34
2.4	Η εργασία του Kutta 1910	39
2.4.1	Μέθοδοι 3ης τάξης	40
2.4.2	Μέθοδοι 4ης τάξης	46
2.4.3	Μέθοδοι 5ης τάξης	53
2.5	Οι συνεισφορές του E.J. Nyström	61
3	Θεωρία Butcher	63
3.1	Συνθήκες τάξης με δένδρα	73
3.2	Συνθήκες τάξης με πίνακες	76
3.3	Φράγματα στην τάξη	86

3.4	Έμμεσες μέθοδοι	88
A	Εφαρμογές Matlab	91
A.1	Κώδικας για επαλήθευση συνθηκών 3ης τάξης	91
A.2	Κώδικας για επαλήθευση συνθηκών 4ης τάξης	93
A.3	Κώδικας για επαλήθευση συνθηκών 5ης τάξης με 6 στάδια 1η μεθοδο Kutta	96
A.4	Κώδικας για επαλήθευση συνθηκών 5ης τάξης με 6 στάδια- Διόρθωση του Nystrom για την 1η μεθοδο Kutta	100
A.5	Κώδικας για επαλήθευση συνθηκών 5ης τάξης με 6 στάδια-2η μεθοδο Kutta	104
A.6	Κώδικας για επαλήθευση συνθηκών 5ης τάξης με 6 στάδια- Διόρθωση του Nystrom για την 2η μεθοδο Kutta	108

Εισαγωγή

Η παρούσα πτυχιακή εργασία γράφτηκε με σκοπό να μελετηθεί η εξέλιξη των αριθμητικών μεθόδων. Ξεκινάει με την αριθμητική ανάλυση που είναι κλάδος των μαθηματικών και της επιστήμης των ηλεκτρονικών υπολογιστών και έχει σαν σκοπό την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων που δεν μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά ή που η επίλυση τους είναι δύσκολη διαδικασία. Τέτοια προβλήματα συναντάμε σε διάφορες επιστήμες και η ανάγκη επίλυσης τους αυξήθηκε με την έλευση των ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Στο πρώτο κεφάλαιο ξεκινάει η ιστορική εξέλιξη της αριθμητικής ανάλυσης από τον πάπυρο του Rhind, την μέθοδο του Αρχιμήδη και του Ήρωνα και συνεχίζει με τις συνεισφορές του Νεύτωνα, του Euler και του Gauss. Εξηγεί ότι το ενδιαφέρον για την κίνηση των ουράνιων σωμάτων ήταν αυτό που δημιούργησε την ανάγκη για μαθηματική μοντελοποίηση και στην συνέχεια επεκτάθηκε και σε άλλους τομείς. Τέλος περιγράφεται η εξέλιξη των υπολογιστών κάνοντας αναφορά στην Διαφορική μηχανή Baggage και τον ψηφιακό υπολογιστή ENIAC.

Στο δεύτερο κεφάλαιο επικεντρώνεται στις μεθόδους απλού βήματος, ξεκινώντας με τον Euler που ήταν ο πρώτος που έφτιαξε μέθοδο απλού βήματος. Συνεχίζει με την εργασία του Runge περιγράφοντας τις δυο μεθόδους δεύτερης τάξης που ανέπτυξε και τη συνεισφορά του Heun και την εξαιρετικής σημαντικότητας εργασία του Kutta που διατύπωσε τις άμεσες μεθόδους Runge-Kutta στη γενική τους μορφή. Περιγράφονται οι μέθοδοι 3ης, 4ης και 5ης τάξης από την εργασία του Kutta 1910 και συνεχίζει με τις μεθόδους Runge-Kutta όπως τις γνωρίζουμε σήμερα. Γίνεται αναφορά για τις συνθήκες τάξης με δέντρα και με πίνακες γνωστοί ως Butcher array και κλείνει με τη συνεισφορά του Nyström.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται σε matlab η επαλήθευση των συνθηκών Butcher για μέθοδο 3ης, 4ης τάξης, για 5ης τάξης οι δυο μέθοδοι που παρουσίασε ο Kutta και την διόρθωση αυτών από τον Nystom.

Κεφάλαιο 1

Η αριθμητική ανάλυση ως θεμέλιο της Σύγχρονης Υπολογιστικής Επιστήμης

Η αριθμητική ανάλυση είναι κλάδος των μαθηματικών και της επιστήμης των ηλεκτρονικών υπολογιστών που σκοπός της είναι η ανάπτυξη, η ανάλυση και η εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων που δεν μπορούν να επιλυθούν με τον αναλυτικό τρόπο ή των οποίων η ακριβής επίλυση τους είναι εξαιρετικά δύσκολη. Αυτά τα προβλήματα προέρχονται από εφαρμογές της άλγεβρας, της γεωμετρίας του λογισμού στον πραγματικό κόσμο και περιλαμβάνουν μεταβλητές που συνεχώς μεταβάλλονται. Τέτοια προβλήματα συναντάμε σε διάφορες επιστήμες όπως την ιατρική, την μηχανική, τις φυσικές και κοινωνικές επιστήμες αλλά και στις επιχειρήσεις.

Η ανάγκη για αριθμητικές λύσεις ενισχύθηκε κατακόρυφα με την έλευση των υπολογιστών, οι οποίοι μας δίνουν την δυνατότητα επίλυσης πολύπλοκων εξισώσεων με επαναληπτικό τρόπο σε σύντομο χρόνο και με μεγάλη ακρίβεια. Η χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών για την εκτέλεση αριθμητικών διαδικασιών στην επίλυση μαθηματικών μοντέλων, κατά την διάρκεια του 1980 και του 1990, οδήγησε στην διαμόρφωση μιας επιστήμης που είναι γνωστή ως υπολογιστική επιστήμη ή επιστημονικός υπολογισμός. Ο τομέας αυτός εξετάζει την χρήση της αριθμητικής ανάλυσης από την πλευρά της επιστήμης των υπολογιστών χρησιμοποιώντας προηγμένα εργαλεία αριθμητικής ανάλυσης, γραφικά υπολογιστών, συμβολικούς μαθηματικούς υπολογισμούς και γραφικά διεπαφών ώστε να διευκολύνει τον χρήστη να επιλύσει και να ερμηνεύσει πολύπλοκα

προβλήματα του πραγματικού κόσμου [18]

1.1 Ιστορική εξέλιξη της αριθμητικής ανάλυσης

Οι αριθμητικοί αλγόριθμοι έχουν ιστορία που ξεκινά από τις απαρχές του ανθρώπινου πολιτισμού, με παραδείγματα που χρονολογούνται από την αρχαία Αίγυπτο, όπως η εύρεση ριζών μιας απλής εξίσωσης που περιγράφεται στον πάπυρο Rhind (1650πχ).

Η μέθοδος εξάντλησης του Αρχιμήδη για τον υπολογισμό εμβαδών, μηκών και όγκων, η οποία είναι μια αρχική μορφή της σύγχρονης αριθμητικής ολοκλήρωσης αλλά και σημαντικός πρόδρομος του λογισμικού όπως αναπτύχθηκε από τον Νεύτωνα και τον Leibnitz[1].

Η μέθοδος Ήρωνα, γνωστή και ως Βαβυλωνιακή μέθοδο, παρουσιάστηκε από τον Ήρωνα (Αλεξάνδρεια 1ος -2ος αι.μ.Χ) σε ένα από τα σημαντικότερα έργα του τα “Μετρικά”, και αποτελεί μια επαναληπτική διαδικασία προσέγγισης της τετραγωνικής ρίζα ενός αριθμού

Σημαντικές συνεισφορές στην ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων έχουμε από τον Napier (1550-1617) όπου δημιούργησε τους λογαρίθμους απλοποιώντας τις αριθμητικές πράξεις (του πολλαπλασιασμού, της διαίρεσης και της ύψωσης σε δύναμη).

Πολύ σημαντική συνεισφορά έχουμε και από τον Νεύτωνα (1643-1727) όπου ανέπτυξε πολλές αριθμητικές μεθόδους με πιο γνωστές αυτή της επίλυσης μη γραμμικών εξισώσεων και την πολυωνυμική παρεμβολή.

Ονόματα κορυφαίων μαθηματικών του 18ου και 19ου συναντά κανείς σε ένα εισαγωγικό μάθημα αριθμητικής ανάλυσης. Euler (1707-1783) στον οποίο οφείλεται η πρώτη μέθοδος για την αριθμητική επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) με σημαντική συνεισφορά στην πολυωνυμική παρεμβολή και Karl Friedrich Gauss (1777-1855) με πιο γνωστή τη μέθοδο επίλυσης συστημάτων γραμμικών εξισώσεων [1].

Ένα από τα σημαντικότερα και πιο επιδραστικά πρώιμα μαθηματικά μοντέλα ήταν εκείνο του Νεύτωνα για να περιγράψει την επίδραση της βαρύτητας

$$F = G \frac{mm_e}{r^2}$$

Όπου F είναι η βαρυτική δύναμη που ασκείται στο σώμα m .

G είναι η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας

m είναι η μάζα του σώματος στο οποίο ασκείται η δύναμη

m_e είναι η μάζα της Γης

και r είναι η απόσταση μεταξύ των κέντρων μάζας των δυο σωμάτων.

Με αυτό αρχίζει η μαθηματική μοντελοποίηση αρχικά με εφαρμογές στην κίνηση των ουράνιων σωμάτων στην πρόγνωση του καιρού, την βαλλιστική και πιο σύγχρονα στην κβαντομηχανική, την βιολογία, την ιατρική, την οικονομική επιστήμη κ.α. Σε πολλές περιπτώσεις τα προβλήματα αυτά οδηγούν σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων τα οποία δεν μπορούν να λυθούν με αναλυτικές μεθόδους και απαιτείται η εύρεση προσεγγιστικών μεθόδων [1].

Σύμφωνα με τον Moulton ο Νεύτωνας ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε αριθμητικές διαδικασίες για την βρει προσεγγιστικές λύσεις διαφορικών εξισώσεων[11]

Στο έργο του Mathematical Principles of Natural Philosophy (Book III) παρουσίασε το πρόβλημα της πολυωνυμικής παρεμβολής με διηρημένες διαφορές [14].

LEMMA V To find a curved line of the parabolic kind which shall pass through any given number of points. (Να βρεθεί μια καμπύλη παραβολικού τύπου (πολυώνυμο) που διέρχεται από οποιονδήποτε δοσμένο αριθμό σημείων).

Στη συνέχεια δίνει μια εφαρμογή:

LEMMA VI Certain observed places of a comet being given, to find the place of the same at any intermediate given time. (Αν δίνονται οι θέσεις ενός κομήτη να βρεθεί η θέση του σε οποιαδήποτε ενδιάμεση τιμή)(Newton, 1729).

COR. 2. But their orbits will be so near to parabolas, that parabolas may be used for them without sensible error.

COR. 3. And, therefore, by Cor. 7, Prop. XVI, Book 1, the velocity of every comet will always be to the velocity of any planet, supposed to be revolved at the same distance in a circle about the sun, nearly in the subduplicate proportion of double the distance of the planet from the centre of the sun to the distance of the comet from the sun's centre, very nearly. Let us suppose the radius of the *orbis magnus*, or the greatest semi-diameter of the ellipsis which the earth describes, to consist of 100000000 parts; and then the earth by its mean diurnal motion will describe 1720212 of those parts, and 71675½ by its horary motion. And therefore the comet, at the same mean distance of the earth from the sun, with a velocity which is to the velocity of the earth as $\sqrt{2}$ to 1, would by its diurnal motion describe 2432747 parts, and 101364½ parts by its horary motion. But at greater or less distances both the diurnal and horary motion will be to this diurnal and horary motion in the reciprocal subduplicate proportion of the distances, and is therefore given.

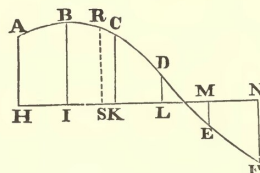
COR. 4. Wherefore if the *latus rectum* of the parabola is quadruple of the radius of the *orbis magnus*, and the square of that radius is supposed to consist of 100000000 parts, the area which the comet will daily describe by a radius drawn to the sun will be 1216373½ parts, and the horary area will be 50682¼ parts. But, if the *latus rectum* is greater or less in any proportion, the diurnal and horary area will be less or greater in the subduplicate of the same proportion reciprocally.

LEMMA V.

To find a curve line of the parabolic kind which shall pass through any given number of points.

Let those points be A, B, C, D, E, F, &c., and from the same to any right line HN, given in position, let fall as many perpendiculars AH, BI, CK, DL, EM, FN, &c.

$b \quad 2b \quad 3b \quad 4b \quad 5b$
 $c \quad 2c \quad 3c \quad 4c$
 $d \quad 2d \quad 3d$
 $e \quad 2e$
 f



CASE 1. If HI, IK, KL, &c., the intervals of the points H, I, K, L, M, N, &c., are equal, take $b, 2b, 3b, 4b, 5b$, &c., the first differences of the perpendiculars AH, BI, CK, &c.; their second differences $c, 2c, 3c, 4c$, &c.: their third, $d, 2d, 3d$, &c., that is to say, so as AH — BI may be $= b$, BI

Εικόνα 1.1: LEMMA V

— CK = 2b, CK — DL = 3b, DL + EM = 4b, — EM + FN = 5b, &c.; then $b - 2b = c$, &c., and so on to the last difference, which is here f . Then, erecting any perpendicular RS, which may be considered as an ordinate of the curve required, in order to find the length of this ordinate, suppose the intervals HI, IK, KL, LM, &c., to be units, and let AH = a , — HS = p , $\frac{1}{2}p$ into — IS = q , $\frac{1}{3}q$ into + SK = r , $\frac{1}{4}r$ into + SL = s , $\frac{1}{5}s$ into + SM = t ; proceeding, to wit, to ME, the last perpendicular but one, and prefixing negative signs before the terms HS, IS, &c., which lie from S towards A; and affirmative signs before the terms SK, SL, &c., which lie on the other side of the point S; and, observing well the signs, RS will be = $a + bp + cq + dr + es + ft$, + &c.

CASE 2. But if HI, IK, &c., the intervals of the points H, I, K, L, &c., are unequal, take $b, 2b, 3b, 4b, 5b$, &c., the first differences of the perpendiculars AH, BI, CK, &c., divided by the intervals between those perpendiculars; $c, 2c, 3c, 4c$, &c., their second differences, divided by the intervals between every two; $d, 2d, 3d$, &c., their third differences, divided by the intervals between every three; $e, 2e$, &c., their fourth differences, divided by the intervals between every four; and so forth; that is, in such manner, that b may be = $\frac{AH - BI}{HI}$, $2b = \frac{BI - CK}{IK}$, $3b = \frac{CK - DL}{KL}$, &c., then $c = \frac{b - 2b}{HK}$, $2c = \frac{2b - 3b}{IL}$, $3c = \frac{3b - 4b}{KM}$, &c., then $d = \frac{c - 2c}{HL}$, $2d = \frac{2c - 3c}{IM}$, &c. And those differences being found, let AH be = a , —

HS = p , p into — IS = q , q into + SK = r , r into + SL = s , s into + SM = t ; proceeding, to wit, to ME, the last perpendicular but one: and the ordinate RS will be = $a + bp + cq + dr + es + ft$, + &c.

COR. Hence the areas of all curves may be nearly found; for if some number of points of the curve to be squared are found, and a parabola be supposed to be drawn through those points, the area of this parabola will be nearly the same with the area of the curvilinear figure proposed to be squared: but the parabola can be always squared geometrically by methods vulgarly known.

LEMMA VI.

Certain observed places of a comet being given, to find the place of the same to any intermediate given time.

Let HI, IK, KL, LM (in the preceding Fig.), represent the times between the observations; HA, IB, KC, LD, ME, five observed longitudes of the comet; and HS the given time between the first observation and the longitude required. Then if a regular curve ABCDE is supposed to be drawn through the points A, B, C, D, E, and the ordinate RS is found out by the preceding lemma, RS will be the longitude required.

Εικόνα 1.2: LEMMA VI

Αναφέρεται στον κομήτη Χάλεϋ (Halley), γνωστός για την περιοδική του εμφάνιση κάθε 75-79 χρόνια. Η τροχιά του είναι εξαιρετικά ελλειπτική με εκκεντρότητα 0,967. Τελευταία φορά εμφανίστηκε στο Ηλιακό μας Σύστημα το

1986 και αναμένεται ξανά το 2061. Η παλαιότερη γνωστή καταγραφή του ανάγεται στο 240 π.Χ από Κινέζους αστρονόμους, οι οποίοι παρατήρησαν την κίνηση του στον ουρανό. Ο κομήτης πήρε το όνομα του από τον Έντμοντ Χάλεϋ (1656-1742) φίλο του Νεύτωνα ο οποίος χρησιμοποίησε τον νόμο της παγκόσμιας έλξης και παρατηρήσεις που είχε καταγράψει τον Σεπτέμβριο 1682 για να υπολογίσει την περιοδικότητα του κομήτη (Synopsis of the Astronomy of Comets 1705).

Ένας από τους πολύ σημαντικούς υπολογισμούς στην ιστορία της επιστήμης είναι η πρόβλεψη της επιστροφής του κομήτη που έγινε από τους Clairaut, Lalande και Lapaute το 1748. Οι διαφορικές εξισώσεις που έλυσαν δεν ήταν αυτές της τροχιάς του κομήτη αλλά διαταραχών που οφείλονταν σε δύο μεγάλους πλανήτες. Οι Clairaut, Lalande και Lapaute εργάστηκαν επί μήνες χρησιμοποιώντας αριθμητικές μεθόδους και κάνοντας δεκάδες χιλιάδες υπολογισμούς με το χέρι με μόνη βοήθεια τους λογαριθμικούς πίνακες. Υπολόγισαν την επιστροφή του κομήτη στις 13 Απριλίου 1749 με σφάλμα 31 ημερών.

Η επόμενη επιστροφή του το 1835 προβλέφθηκε με σφάλμα μόνο 5 ημερών. Οι Βρετανοί αστρονόμοι στο Αστεροσκοπείο Greenwich Cowell και Crommelin για τον υπολόγισαν την επιστροφή του το 1910 με σφάλμα 2.7 ημερών. Για αυτό τον υπολογισμό κέρδισαν το 1910 δύο πολύ σημαντικά βραβεία το Prix Jules Janssen μεγαλύτερο έπαθλο από την Αστρονομική Εταιρεία της Γαλλίας και το Lindemann Prize of the Astronomische Gesellschaft την δεύτερη σε αρχαιότητα αστρονομική εταιρεία μετά την Βασιλική Αστρονομική Εταιρεία. Ο Cowell είναι γνωστός επίσης για την μέθοδο επίλυσης διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης στις οποίες η πρώτη παράγωγος δεν εμφανίζεται άμεσα $y'' = f(x, y)$. Σημειώνουμε εδώ ότι η επιτάχυνση (δεύτερη παράγωγος) εξαρτάται από την θέση και όχι από την ταχύτητα (πρώτη παράγωγος). Η ίδια μέθοδος βρέθηκε ανεξάρτητα και από τον Ρώσο αστρονόμο Numerov και σήμερα αναφέρεται με το όνομα του.

Ο Leonard Euler το 1768 ήταν ο πρώτος που κατασκεύασε μια αριθμητική μέθοδο. Οι μέθοδοι Adams-Bashforth και Adams-Moulton οφείλονται στον J. C. Adams το 1883. Ο Adams συμμετείχε στην ανακάλυψη του Ποσειδώνα

υπολογίζοντας τη θέση του με βάση την κίνηση του Ουρανού. Οι μέθοδοι του Adams χρησιμοποιήθηκαν το 1987 από τον G. H. Darwin για να υπολογίσει περιοδικές τροχιές στο πρόβλημα τριών σωμάτων[11].

AN ATTEMPT
TO TEST
THE THEORIES OF CAPILLARY ACTION
BY COMPARING
THE THEORETICAL AND MEASURED FORMS
OF DROPS OF FLUID,
BY
FRANCIS BASHFORTH, B.D.
LATE PROFESSOR OF APPLIED MATHEMATICS TO THE ADVANCED CLASS
OF ROYAL ARTILLERY OFFICERS, WINDSOR,
AND FORMERLY FELLOW OF ST JOHN'S COLLEGE, CAMBRIDGE.
WITH
AN EXPLANATION OF THE METHOD OF INTEGRATION
EMPLOYED IN CONSTRUCTING THE TABLES WHICH GIVE THE THEORETICAL
FORMS OF SUCH DROPS,
BY
J. C. ADAMS, M.A., F.R.S.
FELLOW OF FEMERUS COLLEGE, AND LOWVILLE PROFESSOR OF ASTRONOMY AND GEOMETRY
IN THE UNIVERSITY OF CAMBRIDGE.

Cambridge:
AT THE UNIVERSITY PRESS.
1883

Εικόνα 1.3: Η σελίδα τίτλου της εργασίας των Adams-Bashforth

Στην διάρκεια του πρώτου παγκοσμίου πολέμου, η επιστήμη έπρεπε να ανταποκριθεί στις στρατιωτικές ανάγκες. Ο Forest Ray Moulton καθηγητής αστρονομίας στο Πανεπιστήμιο του Chicago, το 1918 κατασκεύασε πίνακες εμβέλειας υπολογίζοντας τροχιές βλημάτων για τον στρατό των ΗΠΑ. Το 1926 εξέδωσε το βιβλίο *New Methods in Exterior Ballistics* στο οποίο περιγράφει λεπτομερώς τις αριθμητικές μεθόδους του χρησιμοποίησε βασισμένες στις μεθόδους Adams. Ο W.E. Milne το 1926 ασχολήθηκε με την κατασκευή μεθόδων που βασίζονται σε τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης συμπεριλαμβανομένης

μιας έμμεσης μεθόδου γνωστής ως Milne-Simpson [?] [11].

Ο Carl Runge, το 1895, σε συνέχεια της μεθόδου Euler κατασκεύασε δύο μεθόδους απλού βήματος δεύτερης τάξης χρησιμοποιώντας τους κανόνες ενδιάμεσου σημείου και του τραπεζίου. Κατασκεύασε επίσης μια μέθοδο 3ης τάξης με 4 στάδια. Ο Karl Heun, το 1900, κατασκεύασε διάφορες μεθόδους έως και 4ης τάξης. Ο Wilhelm Kutta, το 1901, εισήγαγε τη γενική τάξη των άμεσων Runge-Kutta μεθόδων όπως τη γνωρίζουμε σήμερα. Για πρώτη φορά έδωσε τις συνθήκες τάξης. Παρουσίασε μεθόδους 4ης τάξης με 4 στάδια και μεθόδους 5ης τάξης με 6 στάδια. Ο E. J. Nystrom το 1925 ολοκλήρωσε την ανάλυση των μεθόδων 5ης τάξης και ανέπτυξε μεθόδους για προβλήματα διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης στην διατύπωση των οποίων απουσιάζει η πρώτη παράγωγος[11].

Κατά τον 19ο αιώνα έχουμε εξέλιξη των μοντέλων αφού φαινόμενα που σχετίζονται με την θερμότητα, τον ηλεκτρισμό και τον μαγνητισμό μοντελοποιήθηκαν με επιτυχία. Ενώ τον 20ο αιώνα αναπτύχθηκαν θεωρίες όπως η σχετική μηχανική και η κβαντομηχανική αυξάνοντας την ανάγκη για αριθμητικές λύσεις[11].

1.2 Αριθμητικές Μέθοδοι και Διαφορικές Εξισώσεις πριν την Ψηφιακή Εποχή

Αυτό το μοντέλο οδήγησε σε προβλήματα που απαιτούσαν επίλυση μέσω προσεγγιστικών μεθόδων, συνήθως περιλαμβάνοντας αριθμητική επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Η αριθμητική ανάλυση έχει γίνει θεμελιώδες εργαλείο στην μηχανική. Για παράδειγμα η κατασκευή σύγχρονων κατασκευών που βασίζεται σε μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων που σχετίζονται με μοντέλα καταπόνησης και η υπολογιστική ρευστομηχανική που είναι βασικό εργαλείο για τον σχεδιασμό αεροσκαφών. Σε αυτό το πλαίσιο ο Ιωάννης Χ. Αργύρης έπαιξε καθοριστικό ρόλο, καθώς υπήρξε από τους δημιουργούς της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Η συμβολή του βοήθησε στην καλύτερη και πιο αποτελεσματική μελέτη κατασκευών και ροής υγρών και στο σχεδιασμό γεφυρών και αεροσκα-

φών. Κατά τον Β Παγκόσμιο Πόλεμο βίωσε προσωπικά τις καταστροφές του ναζισμού, φυλακίσθηκε αλλά κατάφερε να διαφύγει, γεγονός που τον επηρέασε βαθιά την αντίληψη του σχετικά με την αξία της επιστήμης στην υπηρεσία της ειρήνης[22].

Οι υπολογισμοί με το χέρι ήταν σημαντικοί μέχρι τη δεκαετία του 1960 και οι αριθμητικοί μέθοδοι ήταν αρκετά εξελιγμένες πριν την έλευση των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Ωστόσο η χρήση των υπολογιστών οδήγησε σε πιο απλές αριθμητικές μεθόδους που συνεχίζουν να χρησιμοποιούνται σήμερα.

Η μελέτη των διαφορικών εξισώσεων, και ιδίως των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων (ΣΔΕ), καταλαμβάνει εξέχουσα θέση στα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Διαφορικές εξισώσεις εμφανίζονται πολύ συχνά σε μαθηματικά μοντέλα που περιγράφουν προβλήματα των φυσικών, τεχνολογικών, βιοϊατρικών, αλλά και οικονομικών επιστημών

Οι ΣΔΕ είναι εξισώσεις στις οποίες η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από μία μεταβλητή, και η συμπεριφορά της περιγράφεται μέσω των παραγώγων της. Είναι το βασικό εργαλείο μοντελοποίησης πλήθους φυσικών και τεχνολογικών φαινομένων, ακριβώς επειδή πολλά συστήματα καθορίζονται όχι από την τιμή ενός μεγέθους αλλά από τη μεταβολή του. Παρά ταύτα, οι αναλυτικές λύσεις είναι είτε αδύνατες είτε πρακτικά μη αξιοποιήσιμες σε πολλές περιπτώσεις, και εδώ παρεμβαίνει η αριθμητική προσέγγιση.

Η αριθμητική επίλυση των ΣΔΕ περιλαμβάνει τη μετατροπή του αρχικού προβλήματος σε μορφή κατάλληλη για υπολογιστική επεξεργασία, με στόχο την παραγωγή αριθμητικών λύσεων σε επιλεγμένα σημεία. Για να είναι αποδοτική, μια αριθμητική μέθοδος πρέπει να είναι όχι μόνο ακριβής αλλά και σταθερή, να έχει χαμηλό υπολογιστικό κόστος και να απαιτεί περιορισμένους πόρους μνήμης. Οι μέθοδοι αυτές, όπως οι μέθοδοι Euler, Runge-Kutta, Adams-Bashforth, κ.ά., επιτρέπουν την αντιμετώπιση προβλημάτων αρχικών τιμών, γραμμικών ή μη γραμμικών εξισώσεων, καθώς και συστημάτων διαφορικών εξισώσεων με πολλές συνιστώσες.

Η σύνδεση όλων των παραπάνω μερών καθιστά σαφές ότι η Αριθμητική Ανάλυση, με βασικό εργαλείο την αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων,

είναι απαραίτητη όχι μόνο για τη θεωρητική κατανόηση, αλλά και για την πρακτική εφαρμογή των μαθηματικών σε σύγχρονα επιστημονικά και τεχνολογικά πεδία. Η διαρκής ανάπτυξη των αριθμητικών μεθόδων, σε συνδυασμό με τη βελτίωση των υπολογιστικών μέσων, αποτελεί κρίσιμο παράγοντα για την πρόοδο της αριθμητικής επίλυσης των ΣΔΕ και την εφαρμογή τους σε πεδία όπως η φυσική, η βιολογία, η μηχανική, τα οικονομικά και πολλές άλλες επιστήμες.

Η διαδικασία υπολογισμού αριθμητικών πράξεων γίνονταν με το χέρι και η διαδικασία αυτή ήταν αρκετά επίπονη και επιρρεπής σε λάθη. Η ανάγκη λοιπόν για ακριβείς και πιο γρήγορους υπολογισμούς αριθμητικών πράξεων στην αστρονομία και τη ναυσιπλοΐα οδήγησε στην ανάπτυξη των πρώτων μηχανικών υπολογιστών.

Το 1822 ο Babbage σχεδίασε την Διαφορική μηχανή που ήταν μια συσκευή ικανή να υπολογίζει διαδοχικές τιμές πολυωνύμων κατασκευάζοντας έναν πίνακα διαφορών. Αν και ο ίδιος δεν κατάφερε να την υλοποιήσει, το 1853 ο Scheutz μπόρεσε να κατασκευάσει μια λειτουργική εκδοχή της. Ωστόσο, η μηχανή αυτή δεν χρησιμοποιήθηκε ποτέ για την επίλυση ΣΔΕ.

Την ίδια περίοδο, ο Kelvin αξιοποιώντας μηχανικά εργαλεία όπως το επιπεδόμετρο (μια συσκευή για τη μέτρηση της περιοχής που οριοθετείται από μια απλή καμπύλη), κατάφερε να αναπτύξει μηχανές για τον υπολογισμό των παλιρροιών. Σχεδίασε επίσης αναλογικούς ολοκληρωτές για την επίλυση γραμμικών ΣΔΕ 2ης τάξης εισάγοντας μεθόδους όπως η επανάληψη Picard. Ωστόσο, οι τεχνολογικοί περιορισμοί εμπόδισαν την πλήρη ολοκλήρωση της ιδέας του.

Αυτές οι ιδέες εξελίχθηκαν το 1930 από τον Vannevar Bush, ο οποίος ανέπτυξε τον πρώτο λειτουργικό διαφορικό αναλυτή, οδηγώντας στην ευρεία χρήση αναλογικών υπολογιστών. Παράλληλα δημιουργήθηκε ο «Hartree Differential Analyzer» από παιχνίδια δείχνοντας τη δυνατότητα χαμηλού κόστους κατασκευών. Παρά τις επιτυχίες, η ακρίβεια των αναλυτών ήταν περιορισμένη και ο προγραμματισμός γινόταν χειροκίνητα.

Αν και οι ιδέες του Babbage δεν αξιοποιήθηκαν πλήρως, στην πορεία δικαιώθηκαν και εξελίχθηκαν ανοίγοντας τον δρόμο για τους σύγχρονους ψηφιακούς υπολογιστές.

Στα μέσα του 20ου αιώνα, η ανάγκη για επίλυση διαφορικών εξισώσεων οδήγησε στην δημιουργία του πρώτου ψηφιακού ηλεκτρονικού υπολογιστή, τον ENIAC. Αρχικά σχεδιάστηκε για να επιλύει ΣΔΕ μιμούμενος τους αναλογικούς αναλυτές και χρηματοδοτήθηκε με σκοπό την προετοιμασία πινάκων βολής και τη στόχευση αντιαεροπορικών πυροβόλων. Η πρώτη μέθοδος που εφαρμόστηκε για την επίλυση ΔΕ στον ENIAC ήταν η μέθοδος Heun. Ο ENIAC ήταν 10 φορές ταχύτερος από τους αναλογικούς διαφορικούς αναλυτές και 100 φορές από έναν άνθρωπο. Παράλληλα, κατασκευάστηκαν και άλλες ψηφιακές μηχανές ειδικής χρήσης αλλά λόγω βραδύτητας δεν κατάφεραν να ξεπεράσουν την δημοφιλία των αναλογικών διαφορικών αναλυτών[11].

1.2.1 Θεωρία Διαφορικών εξισώσεων: Ορισμοί και βασικές έννοιες

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις ονομάζονται οι διαφορικές εξισώσεις των οποίων η άγνωστη συνάρτηση είναι μιας μεταβλητής, δηλαδή είναι της γενικής ή πεπλεγμένης μορφής:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, x \in I \subset \mathbb{R}$$

όπου η F είναι συνάρτηση $(n + 2)$ μεταβλητών, $n \in \mathbb{N}$ με $F : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ και $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ η άγνωστη (προσδιοριστέα) συνάρτηση. Εάν ισχύουν οι αναγκαίες προϋποθέσεις του Θεωρήματος Πεπλεγμένων Συναρτήσεων για την επίλυση της εξίσωσης (1) ως προς $y^{(n)}(x)$, τότε προκύπτει η **κανονική ή λυμένη μορφή** των συνήθως διαφορικών εξισώσεων:

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), x \in I$$

Τάξη μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται η τάξη της ανώτερης παραγώγου της άγνωστης συνάρτησης, που εμφανίζεται στην εξίσωση.

Γραμμική ονομάζεται η συνήθης διαφορική εξίσωση (1), όταν η συνάρτηση είναι γραμμική ως προς τις $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$. Η γενική μορφή μιας γραμμικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης, τάξης n , είναι:

$$a_n(x) y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x) y(x) = f(x)$$

Ομογενής ονομάζεται η συνήθης διαφορική εξίσωση (3), αν ισχύει $f(x) = 0$, άλλως ονομάζεται **μη ομογενής**. Οι συναρτήσεις $a_i(x)$, με $i \in \mathbb{N}^*$ και $i \leq n$, αποτελούν τους συντελεστές της συνήθους διαφορικής εξίσωσης.

Για τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις που δεν είναι γραμμικές έχουμε την ακόλουθη ταξινόμηση.

Σχεδόν γραμμική (semilinear) ονομάζεται η συνήθης διαφορική εξίσωση (1) όταν είναι μη γραμμική ως προς το $y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)$.

Ημιγραμμική (quasilinear) ονομάζεται η συνήθης διαφορική εξίσωση (1) όταν είναι μη γραμμική ως προς $y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)$ και γραμμική ως προς την παράγωγο ανώτερης τάξης $y^{(n)}(x)$.

Πλήρως μη Γραμμική (Fully nonlinear) ονομάζεται η συνήθης διαφορική εξίσωση (1) όταν είναι μη γραμμική τουλάχιστον ως προς $y^{(n)}(x)$.

Μια ειδική κατηγορία μη γραμμικών εξισώσεων αποτελούν οι **πολυωνυμικές εξισώσεις**, στις οποίες η συνάρτηση είναι πολυώνυμο των $y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)$.

Βαθμός μιας πολυωνυμικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται η δύναμη στην οποία είναι υψωμένη η παράγωγος ανώτερης τάξης.

Συχνά στις εφαρμογές παρουσιάζονται διαφορικές εξισώσεις με περισσότερες της μιας άγνωστες συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Στις περιπτώσεις αυτές, ο αριθμός των εξισώσεων συμπίπτει συνήθως με αυτόν των αγνώστων συναρτήσεων. Μια τέτοια συλλογή εξισώσεων συνιστά ένα σύστημα (συνήθων) διαφορικών εξισώσεων. Όλες οι έννοιες, όπως τάξη, βαθμός, γραμμικότητα κ.λπ., που ορίστηκαν προηγουμένως για τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, μεταφέρονται κατά προφανή τρόπο στα συστήματα διαφορικών εξισώσεων (Hairer, Nørset and Wanner, 1993).

Μερική διαφορική εξίσωση είναι η διαφορική εξίσωση που περικλείει μερικές παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης, η οποία βέβαια θα είναι δύο ή περισσότερων μεταβλητών. Η μελέτη των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων διαφέρει σε αρκετά σημεία από των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων. Είναι περισσότερο πολύπλοκη και εν γένει συναντάμε πληθώρα δυσκολιών, ακόμα και στην περίπτωση των απλών γραμμικών προβλημάτων. Βέβαια, επιβάλλεται να σημειωθεί πως σχεδόν όλες οι βασικές ιδέες και μέθοδοι τόσο της ποιο-

τικής, όσο και της ποσοτικής θεωρίας των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων έχουν μεταφερθεί και χρησιμοποιηθεί στην ανάπτυξη της θεωρίας των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων. Οι έννοιες της τάξης, γραμμικότητας, βαθμού, ομογένειας κ.ά. που ορίστηκαν στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις δίδονται ανάλογα και για τις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (Iserles, 2008).

1.2.2 Το πρόβλημα αρχικών τιμών

Οι διαφορικές εξισώσεις είναι μαθηματικές εξισώσεις που συνδέουν μια συνάρτηση με τις παραγώγους της. Χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν φαινόμενα όπου ο ρυθμός μεταβολής είναι σημαντικός.

Μια συνήθης διαφορική συνάρτηση πρώτης τάξης έχει την εξής μορφή:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad \text{με } y(x_0) = y_0$$

Όπου f μια συνάρτηση δύο μεταβλητών.

Αν η f είναι ανεξάρτητη από το x τότε γράφεται $y'(x) = f(y(x))$ και το πρόβλημα καλείται αυτόνομο.

Σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης εμπλέκονται οι άγνωστες συναρτήσεις

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_k(x).$$

Η γενική μορφή του είναι

$$y'_i = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_k), \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, k.$$

Αυτό το σύστημα μπορεί να γραφτεί σε πιο συμπαγή μορφή, σε διανυσματική μορφή ως εξής:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y})$$

όπου

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

Είναι το διάνυσμα των συναρτήσεων και

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix}$$

το διάνυσμα των συναρτήσεων.

Μια διαφορική εξίσωση ανώτερης τάξης μπορεί να γραφεί σαν σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης.

1.2.3 Αριθμητικές Μέθοδοι

Όταν θέλουμε να λύσουμε μια ΣΔΕ $y'(x) = f(x, y(x))$ και δεν υπάρχει ένας άμεσος μαθηματικός τύπος που να μας δίνει την ακριβή λύση της $y(x)$ τότε καταφεύγουμε σε αριθμητικές μεθόδους, οι οποίες μας δίνουν μια προσεγγιστική λύση.

Η βασική ιδέα είναι να χωρίσουμε το διάστημα που μας ενδιαφέρει $[a, b]$ σε πολλά μικρά τμήματα και έτσι θα έχουμε μια σειρά από σημεία $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$ όπου $x_0 = a$ και $x_N = b$.

Η απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικά σημεία δηλαδή $x_{n+1} - x_n$ ονομάζεται **βήμα** της μεθόδου και συμβολίζεται με h_n . Αν όλα τα τμήματα έχουν το ίδιο μήκος τότε το βήμα είναι σταθερό και το συμβολίζουμε με

$$h = \frac{b - a}{N}$$

Η διαδικασία ξεκινάει με μια γνωστή τιμή στο αρχικό σημείο του διαστήματος, την $y(a) = y(x_0) = y_0$. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας αυτή την τιμή, υπολογίζουμε μια προσέγγιση y_1 , για την αναλυτική λύση, στο σημείο x_1 . Έπειτα, αξιοποιώντας την y_1 , βρίσκουμε μια προσέγγιση y_2 για το x_2 , και ούτω καθεξής. Γενικά, για να υπολογίσουμε την προσέγγιση y_{n+1} στο σημείο x_{n+1} , χρησιμοποιούμε την προσέγγιση y_n από το σημείο x_n που έχει ήδη βρεθεί.

Οι αριθμητικές μέθοδοι διακρίνονται με βάση το πόσες προηγούμενες

υπολογισμένες τιμές χρησιμοποιούν για να βρουν την επόμενη [21].

- Η πιο απλή μέθοδος είναι η **μέθοδος ενός βήματος** όπου για να υπολογίσουμε την προσέγγιση y_{n+1} χρησιμοποιεί μόνο την αμέσως προηγούμενη τιμή, την y_n . Η γενική μορφή δίνεται από την σχέση

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n; h)$$

Όπου Φ είναι μια συνάρτηση που αξιοποιεί πληροφορίες από την γνωστή προσέγγιση (x_n, y_n) για να υπολογίσει την επόμενη y_{n+1} . Χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων μεθόδων είναι η μέθοδος του Euler, του Heun, του Runge-Kutta.

- Ενώ η πιο σύνθετες είναι η **μέθοδος πολλαπλών βημάτων**, οι πολυβηματικές μέθοδοι, που χρησιμοποιεί περισσότερες από μια προηγούμενες τιμές. Συγκεκριμένα, μια μέθοδος k -βημάτων χρησιμοποιεί τις k προηγούμενες προσεγγίσεις δηλαδή τις $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k+1}$ για να υπολογίσει την y_{n+1} . Για παράδειγμα μια μέθοδος δύο βημάτων χρησιμοποιεί την y_n και την y_{n-1} για να υπολογίσει την y_{n+1} . Η γενική μορφή αυτών δίνεται από την σχέση:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i y_{n+1-i} = h\Psi(x_n, y_{n+1}, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k+1}, h)$$

Όπου α_i είναι σταθεροί συντελεστές και το Ψ είναι μια συνάρτηση που αξιοποιεί πληροφορίες από πολλές προηγούμενες τιμές για να υπολογίσει την επόμενη y_{n+1} .

Οι πιο γνωστές οικογένειες πολυβηματικών μεθόδων είναι η μέθοδος Adams-Bashforth, Adams-Moulton, Numerov.

Συνοψίζοντας θα λέγαμε ότι οι αριθμητικές μέθοδοι μας επιτρέπουν να προσεγγίσουμε λύσεις ΔΕ χτίζοντας την λύση βήμα βήμα, ξεκινώντας από μια γνωστή αρχική τιμή αυτό είναι το πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ).

Κεφάλαιο 2

Πρώιμη εργασία σε αριθμητικές μεθόδους συνήθων διαφορικών εξισώσεων

2.1 Euler

Η μέθοδος Euler είναι η βασική, απλή μέθοδος που χρησιμοποιείται για να κατανοήσουμε, να διδάξουμε και να αναλύσουμε τις θεμελιώδεις αρχές των αριθμητικών μεθόδων ενός βήματος. Η μέθοδος περιγράφηκε από τον Leonhard Euler το 1768 στην εργασία του *Institutiones Calculi Integralis*.

Για την παρουσίαση των κατασκευών της μεθόδου Euler στηρίζομαστε στη βιβλιογραφία του Butcher [4][19][20][21].

Για να προσεγγίσουμε την λύση του ΠΑΤ

$$y'(x) = f(x, y(x)), (1) \quad \text{με } y(x_0) = y_0$$

σε διάφορα σημεία

$$x_n = nh$$

(όπου h είναι το μέγεθος του βήματος), η μέθοδος Euler μπορεί να κατασκευαστεί με διαφορετικούς τρόπους.

- **Κατασκευή με αριθμητική διαφόριση**

Η $y'(x)$ μπορεί να γραφτεί ως:

$$y'(x_n) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}$$

Αντικαθιστώντας στην $y'(x_n)$ από την ΔΕ με το $f(x, y(x_n))$ και χρησιμοποιώντας και τις προσεγγίσεις y_n για το $y(x_n)$ παίρνουμε

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} \approx f(x_n, y_n)$$

Αναδιατάσσοντας την σχέση, παίρνουμε την **άμεση μέθοδο Euler**

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

- **Κατασκευή με αριθμητική ολοκλήρωση**

Ολοκληρώνουμε την

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

στο διάστημα $[x_n, x_{n+1}]$:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

Αντικαθιστώντας το αριστερό μέλος με

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx = y(x_{n+1}) - y(x_n)$$

το δεξί μέλος το προσεγγίζουμε με τον κανόνα του ορθογωνίου στο αριστερό άκρο x_n και έχουμε

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \approx hf(x_n, y(x_n))$$

και αντικαθιστώντας με τις προσεγγίσεις y_n, y_{n+1} :

Παίρνουμε εκ νέου την **άμεση μέθοδο Euler**.

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Εναλλακτικά αν εφαρμόσουμε τον κανόνα του ορθογωνίου στο δεξί άκρο x_{n+1} , δηλαδή

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \approx hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

τότε προκύπτει η έμμεση μέθοδος Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

Γιατί y_{n+1} εμφανίζεται και στα δύο μέλη της εξίσωσης.

- **Κατασκευή με ανάπτυγμα Taylor**

Το ανάπτυγμα Taylor της $y(x)$ στο σημείο $x + h$ δίνεται από τον τύπο:

$$y(x + h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \dots$$

Παραλείποντας τους όρους ανώτερης τάξης και αντικαθιστώντας

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

και χρησιμοποιώντας και τις προσεγγίσεις y_n, y_{n+1} τότε παίρνουμε την άμεση μέθοδο Euler.

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

2.2 Η εργασία του Runge 1895

Ο Carl David Tolme Runge γεννήθηκε στη Βρέμη το 1856. Σπούδασε στο Μόναχο και στη συνέχεια στο Βερολίνο όπου δούλεψε κοντά σε δύο μεγάλους μαθηματικούς τους L.Kronecker και K. Weierstrass στα αντικείμενα της θεωρίας αριθμών και της μιγαδικής ανάλυσης. Στη συνέχεια ως Καθηγήτῆς στην Τεχνική Σχολή του Ανόβερου και επηρεασμένος από τη φιλία του με σπουδαίους φυσικούς (L. Prandtl, M. Planck, H. Kayser και E Paschen) ασχολήθηκε με εφαρμογές των θεωρητικών μαθηματικών σε φυσικά και τεχνικά προβλήματα. Στο Ανόβερο το 1895 δημοσίευσε στο περιοδικό Mathematische Annalen το άρθρο που αποτελεί ορόσημο στην ιστορία της αριθμητικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων με τίτλο Ueber die numerische Auflosung von Differentialgleichungen (Σχετικά με την αριθμητική ανάλυση των διαφορικών εξισώσεων)[16]. Στο άρθρο αυτό εξάγει δύο δημοφιλείς μεθόδους 2ης τάξης: η

μία βασισμένη στον κανόνα του ενδιαμέσου σημείου και η άλλη στον κανόνα του τραπεζίου. Ο Runge φαίνεται να είναι ο πρώτος που χρησιμοποίησε διαδοχικούς συναρτησιακούς υπολογισμούς δηλαδή η μέθοδος εκτιμά την κλίση της λύσης σε πολλά ενδιάμεσα σημεία εντός του βήματος. Ο Runge είναι ο πρώτος Καθηγητής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Gottingen.

Θα εξηγήσουμε πως παρήγαγε στο άρθρο αυτό δύο μεθόδους. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

Για το οποίο μπορούμε να γράψουμε:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

Αντίστοιχα, με τη μέθοδο του Euler, αν πάρουμε προσέγγιση του ολοκληρώματος χρησιμοποιώντας το εμβαδόν ορθογωνίου με ύψος:

$$f\left(x_n + \frac{h}{2}, y\left(x_n + \frac{h}{2}\right)\right)$$

τότε η εξίσωση γίνεται:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y\left(x_n + \frac{h}{2}\right)\right)$$

Καθώς δεν γνωρίζουμε την τιμή $y\left(x_n + \frac{h}{2}\right)$, χρησιμοποιούμε την προσέγγιση:

$$y\left(x_n + \frac{h}{2}\right) \approx y_n + \frac{h}{2} \cdot f(x_n, y_n)$$

Που είναι μισό βήμα Euler. Αυτή είναι η **πρώτη μέθοδος του Runge**:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot f(x_n, y_n)\right)$$

Για τη **δεύτερη μέθοδο**, προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα με τον τύπο του τραπεζίου:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \approx \frac{h}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$$

αυτή η σχέση θα οδηγούσε στη μέθοδο

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$$

Η οποία βλέπουμε ότι στο δεξί μέλος εμπλέκει την άγνωστη και ζητούμενη τιμή y_{n+1} , μια τέτοια μέθοδος ονομάζεται έμμεση ή πεπλεγμένη μέθοδος. Η προσέγγιση y_{n+1} μπορεί να βρεθεί λύνοντας τη μη γραμμική εξίσωση, συνήθως με τη μέθοδο Newton-Raphson.

Αντικαθιστούμε το y_{n+1} με την προσέγγιση $y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$, και προκύπτει:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \approx \frac{h}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + h \cdot f(x_n, y_n)))$$

προκύπτει η εξής μέθοδος:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + h \cdot f(x_n, y_n)))$$

Οι μέθοδοι με το συμβολισμό του Runge ήταν γραμμένες ως εξής

$$\begin{aligned} \Delta y &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x, y_0 + \frac{1}{2}f(x_0, y_0)\Delta x\right) \Delta x \\ \Delta y &= \frac{1}{2} (f(x_0, y_0) + f(x_0 + \Delta x, y_0 + f(x_0, y_0)\Delta x)) \Delta x \end{aligned}$$

Ο Runge προχώρησε και στην κατασκευή μιας μεθόδου τρίτης τάξης

$$\begin{aligned} \Delta' y &= f(x_0, y_0)\Delta x \\ \Delta'' y &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta' y)\Delta x \\ \Delta''' y &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta'' y)\Delta x \end{aligned}$$

$$\Delta y = \frac{1}{2} (\Delta' y + \Delta''' y)$$

Επίσης, μελέτησε συστήματα διαφορικών εξισώσεων.

Το 1900, ο Karl Heun εισάγει μια περιορισμένη κατηγορία αυτών που γνωρίζουμε ως μεθόδους Runge-Kutta και καθορίζει τους συντελεστές για πενήντα δώδεκα τύπους. Η λίστα του περιλαμβάνει τους τρεις τύπους του Runge. Καταφέρνει επίσης να κατασκευάσει έναν τύπο 8 σταδίων 4ης τάξης, αλλά ο πιο ενδιαφέρων είναι ο τύπος 3 σταδίων 3ης τάξης που θα δούμε στην επόμενη παράγραφο.

Eine ähnliche Ueberlegung führt nun auch für die Differentialgleichungen zu einer wesentlichen Verbesserung des Euler'schen Verfahrens. Ich will mich zunächst auf Differentialgleichungen erster Ordnung beschränken.

Statt

$$(1) \quad \Delta y = f(x_0, y_0) \Delta x \text{ u. s. w.}$$

ist es schon viel besser wenn man

$$(2) \quad \Delta y = f\left(x_0 + \frac{1}{2} \Delta x, y_0 + \frac{1}{2} f(x_0, y_0) \Delta x\right) \Delta x$$

u. s. w.

setzt. Diese Art der Berechnung entspricht dem aus der Summe der Tangententrapeze gebildeten Näherungswerthe eines Integrals und deckt sich völlig damit, wenn $f(xy)$ von y unabhängig vorausgesetzt wird.

Oder man kann der Summe der Sehnentrapeze entsprechend setzen:

$$(3) \quad \Delta y = \frac{f(x_0, y_0) + f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + f(x_0, y_0) \Delta x\right)}{2} \Delta x$$

u. s. w.

Εικόνα 2.1: Απόσπασμα από την εργασία του Runge

2.3 Τυποποίηση-Συμβολισμός του Butcher

Στην εργασία του Runge στηρίχθηκαν οι Heun (1900) και Kutta (1901) και δημιούργησαν τις μεθόδους που σήμερα είναι γνωστές ως μέθοδοι Runge-Kutta. Η θεωρητική τεκμηρίωση των μεθόδων Runge-Kutta έγινε από τον Νορβηγικό μαθηματικό John Butcher με μία σειρά άρθρων που ξεκίνησε να δημοσιεύει από το 1963.

Στο σημείο αυτό θα γράψουμε λίγα στοιχεία από την τυποποίηση του Butcher. Ο Kutta το 1901 έγραψε τις μεθόδους στη μορφή που σήμερα ονομά-

ζουμε Runge-Kutta[12].

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_n, y_n) \\
 k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_1) \\
 k_3 &= f(x_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) \\
 &\vdots \\
 k_s &= f(x_n + c_s h, y_n + h(a_{s1} k_1 + a_{s2} k_2 + \cdots + a_{s,s-1} k_{s-1})) \\
 y_{n+1} &= y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + \cdots + b_s k_s)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Αυτή είναι μια μέθοδος s σταδίων. Ο Kutta έκανε την υπόθεση που είναι γνωστή ως συνθήκη γραμμής

$$\begin{aligned}
 c_2 &= a_{21} \\
 c_3 &= a_{31} + a_{32} \\
 &\vdots \\
 c_s &= a_{s1} + a_{s2} + \cdots + a_{s,s-1}
 \end{aligned}$$

Ο Butcher χρησιμοποίησε έναν πίνακα για την αναπαράσταση των μεθόδων γνωστό ως Butcher array ή Butcher tableau

0					
c_2	a_{21}				
c_3	a_{31}	a_{32}			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
c_s	a_{s1}	a_{s2}	$\cdots$	$a_{s,s-1}$	
	b_1	b_2	$\cdots$	b_{s-1}	b_s

Θα γράψουμε τις μεθόδους του Runge με το συμβολισμό του Butcher.

Η πρώτη μέθοδος γράφεται:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ y_{n+1} &= y_n + h k_2 \end{aligned}$$

με πίνακα Butcher

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 0 \quad 1 \end{array}$$

και η δεύτερη μέθοδος γράφεται:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)) = f(x_n + h, y_n + hk_1) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \end{aligned}$$

με πίνακα Butcher

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline 1 & 1 \\ \hline & \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \end{array}$$

Η μέθοδος τριών σταδίων του Runge γράφεται:

$$k_1 = f(x_0, y_0)$$

$$k_2 = f(x_0 + h, y_0 + hk_1)$$

$$k_3 = f(x_0 + h, y_0 + hk_2)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{1}{2}(k_1 + k_3)$$

με πίνακα Butcher

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}$$

Η μέθοδος τριών σταδίων του Heun γράφεται:

$$k_1 = f(x_0, y_0)$$

$$k_2 = f(x_0 + \frac{h}{3}, y_0 + \frac{h}{3}k_1)$$

$$k_3 = f(x_0 + \frac{2h}{3}, y_0 + \frac{2h}{3}k_2)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3)$$

με πίνακα Butcher

$$\begin{array}{c|cc}
 0 & & \\
 \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\
 \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\
 \hline
 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4}
 \end{array}$$

Για να επιτευχθεί η απαιτούμενη ακρίβεια, βρίσκονται προσεγγίσεις σε ένα πλήθος εσωτερικών σημείων σε κάθε βήμα και το τελικό αποτέλεσμα υπολογίζεται με βάση αυτές τις διάφορες τιμές.

Οι μέθοδοι αυτοί ανήκουν στην οικογένεια των μεθόδων που πρότεινε ο Kutta και τα Butcher arrays τους είναι:

Μέθοδος Euler

$$\begin{array}{c|c}
 0 & 0 \\
 \hline
 & 1
 \end{array}$$

2.4 Η εργασία του Kutta 1910

Ο Martin Wilhelm Kutta γεννήθηκε στις 3 Νοεμβρίου 1867 στο Pitschen, το σημερινό Byczyna της Πολωνίας. Αφού αποφοίτησε από το Γυμνάσιο σπούδασε μαθηματικά στο πανεπιστήμιο του Breslau (1885-1890) και μετά στο Μόναχο (1891-1894). Το 1894 άρχισε να εργάζεται ως βοηθός μαθηματικών και φυσικής στη Ανώτατη Τεχνική Σχολή του Μονάχου. Το 1900 ολοκλήρωσε τη διδακτορική του διατριβή με τίτλο *Beiträge zur näherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen*, δημοσιεύτηκε έναν χρόνο αργότερα, που περιέχει την πλέον διάσημη μέθοδο Runge-Kutta για την επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων με επιβλέποντες τους Ferdinand Lindemann και Gustav Bauer. Ο Wilhelm Kutta (1867-1944) στην εργασία του εισήγαγε τη γενική κατηγορία των σαφών μεθόδων Runge-Kutta όπως τις γνωρίζουμε σήμερα και κατέγραψε τις μη γραμμικές εξισώσεις για τις παραμέτρους που πρέπει να λυθούν προκειμένου να επιτευχθεί μια δεδομένη τάξη ακρίβειας. Σημαντική είναι η δουλειά του και στην αεροδυναμική με το θεώρημα Zhukovsky-Kutta. Από το 1912 έως το 1935 υπηρέτησε ως καθηγητής στο University of Stuttgart.[15].

Θα παρουσιάσουμε τις μεθόδους που κατασκεύασε στην εργασία του *Beitrag zur näherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen*[12]

2.4.1 Μέθοδοι 3ης τάξης

Σύμφωνα με τον Kutta[12]

$$\Delta y = a\Delta' + b\Delta'' + c\Delta'''$$

με

$$\Delta' = f(x, y)\Delta x$$

$$\Delta'' = f(x + \kappa\Delta x, y + \kappa\Delta')\Delta x$$

$$\Delta''' = f(x + \lambda\Delta x, y + \rho\Delta'' + (\lambda - \rho)\Delta')\Delta x$$

Όπως βλέπουμε χρησιμοποίησε τις συνθήκες γραμμής για να μειώσει τον αριθμό των παραμέτρων. Ο αντίστοιχος πίνακας Butcher γράφεται

0		
κ	κ	
λ	$(\lambda - \rho)$	ρ
	a	$b \quad c$

Οι συνθήκες τρίτης τάξης που βρήκε ο Kutta είναι

$$a + b + c = 1$$

$$b\kappa + c\lambda = \frac{1}{2}$$

$$b\kappa^2 + c\lambda^2 = \frac{1}{3}$$

$$c\rho\kappa = \frac{1}{6}$$

Αφού έχει 4 εξισώσεις και 6 παραμέτρους $(a, b, c, \kappa, \lambda, \rho)$ αφήνει ως ελεύθερους άγνωστους τα κ, λ λύνουμε το γραμμικό σύστημα

$$b\kappa + c\lambda = \frac{1}{2}$$

$$b\kappa^2 + c\lambda^2 = \frac{1}{3}$$

βρίσκουμε τα b και c

$$D = \begin{vmatrix} \kappa & \lambda \\ \kappa^2 & \lambda^2 \end{vmatrix} = \kappa\lambda^2 - \lambda\kappa^2 = \lambda\kappa(\lambda - \kappa)$$

$$D_b = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \lambda \\ \frac{1}{3} & \lambda^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda \cdot \frac{1}{3} = \lambda \left(\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{3} \right)$$

$$D_c = \begin{vmatrix} k & \frac{1}{2} \\ k^2 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = k \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2}k^2 = k \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}k \right)$$

$$b = \frac{D_b}{D} = \frac{\lambda \left(\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{3} \right)}{\lambda\kappa(\lambda - \kappa)} = \frac{\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{3}}{\kappa(\lambda - \kappa)} = \frac{2 - 3\lambda}{6\kappa(\kappa - \lambda)}$$

$$c = \frac{D_c}{D} = \frac{\kappa \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\kappa \right)}{\lambda\kappa(\lambda - \kappa)} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\kappa}{\lambda(\lambda - \kappa)} = \frac{2 - 3\kappa}{6\lambda(\lambda - \kappa)} =$$

μετά υπολογίζουμε το

$$a = 1 - b - c = 1 - \frac{2 - 3\lambda}{6\kappa(\kappa - \lambda)} - \frac{2 - 3\kappa}{6\lambda(\lambda - \kappa)} = \frac{6\kappa\lambda + 2 - 3(\kappa - \lambda)}{6\kappa\lambda}$$

τέλος υπολογίζουμε το ρ

$$\rho = \frac{1}{6ck} = \frac{1}{6 \cdot \frac{2 - 3k}{6\lambda(\lambda - k)} \cdot k} = \frac{\lambda(\lambda - k)}{k(2 - 3k)}$$

Ι) Αν $\rho = \lambda$, τότε έχουμε:

$$\lambda = \frac{(\lambda - \kappa)\lambda}{\kappa(2 - 3\kappa)}$$

Από αυτή την εξίσωση προκύπτει:

$$\lambda(\lambda - 3\kappa + 3\kappa^2) = 0$$

που δίνει τις λύσεις:

$$\lambda = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda = 3\kappa(1 - \kappa)$$

και παίρνουμε :

$$\alpha = \frac{6\kappa(3\kappa - 3\kappa^2) - 3(\kappa + 3\kappa - 3\kappa^2) + 2}{6\kappa(3\kappa - 3\kappa^2)} = \frac{2 - 12\kappa + 27\kappa^2 - 18\kappa^3}{18\kappa^2(1 - \kappa)}$$

$$b = \frac{2 - 3\lambda}{6\kappa(\kappa - \lambda)} = \frac{2 - 3(3\kappa - 3\kappa^2)}{6\kappa(\kappa - 3\kappa + 3\kappa^2)} = \frac{9\kappa^2 - 9\kappa + 2}{-12\kappa^2 + 18\kappa^3}$$

$$= \frac{(3\kappa - 2)(3\kappa - 1)}{6\kappa^2(3\kappa - 2)} = \frac{3\kappa - 1}{6\kappa^2}$$

$$c = \frac{2 - 3\kappa}{6\lambda(\lambda - \kappa)} = \frac{2 - 3\kappa}{6(3\kappa - 3\kappa^2)(3\kappa - 3\kappa^2 - \kappa)}$$

$$= \frac{2 - 3\kappa}{54\kappa^4 - 90\kappa^3 + 36\kappa^2} = \frac{2 - 3\kappa}{18\kappa^2(3\kappa - 2)(\kappa - 1)} = \frac{1}{18\kappa^2(1 - \kappa)}$$

II)

$$\kappa = \frac{2}{3}, \quad \lambda = 0, \quad b = \frac{3}{4}, \quad c = \frac{1}{4\rho}, \quad \alpha = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\rho}$$

III)

$$\kappa = \frac{2}{3}, \quad \lambda = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{3}{4} - \frac{1}{4\rho}, \quad c = \frac{1}{4\rho}, \quad \alpha = \frac{1}{4}$$

IV)

$$\lambda = \frac{2}{3}, \quad \alpha = \frac{1}{4}, \quad b = 0, \quad c = \frac{3}{4}, \quad \rho = \frac{2}{9\kappa}$$

IV)

$$\lambda = \frac{3\kappa - 2}{3(2\kappa - 1)}, \quad \alpha = 0$$

Av

$$\kappa = \frac{2}{3}, \quad \lambda = \frac{2}{3}, \quad \rho = \frac{2}{3}$$

τότε από τις περιπτώσεις I) και III) παίρνουμε:

$$\alpha = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{3}{8}, \quad c = \frac{3}{8}$$

και επομένως έχουμε την μέθοδο:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{array}$$

Αν

$$\kappa = \frac{1}{3}, \quad \lambda = \frac{2}{3}, \quad \rho = \frac{2}{3}$$

τότε από τις περιπτώσεις I) και IV) παίρνουμε την μέθοδο:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

Αν

$$\kappa = \frac{2}{3}, \quad \lambda = \frac{2}{3}, \quad \rho = \frac{1}{3},$$

τότε παίρνουμε την μέθοδο:

$$\begin{array}{c|ccc}
 0 & & & \\
 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \\
 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\
 \hline
 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{3}{4}
 \end{array}$$

Αν

$$\kappa = \frac{1}{2}, \quad \lambda = 1$$

τότε παίρνουμε την μέθοδο:

$$\begin{array}{c|ccc}
 0 & & & \\
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\
 & 1 & -1 & 2 \\
 \hline
 & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6}
 \end{array}$$

2.4.2 Μέθοδοι 4ης τάξης

Σύμφωνα με τον Kutta[12]

$$\Delta y = a\Delta' + b\Delta'' + c\Delta''' + d\Delta''''$$

με

$$\Delta' = f(x, y)\Delta x$$

$$\Delta'' = f(x + \kappa\Delta x, y + \kappa\Delta')\Delta x$$

$$\Delta''' = f(x + \lambda\Delta x, y + \rho\Delta'' + (\lambda - \rho)\Delta')\Delta x$$

$$\Delta'''' = f(x + \mu\Delta x, y + \sigma\Delta''' + \tau\Delta'' + (\mu - \sigma - \tau)\Delta')\Delta x$$

[12]

Όπως βλέπουμε χρησιμοποίησε τις συνθήκες γραμμής για να μειώσει τον αριθμό των παραμέτρων. Ο αντίστοιχος πίνακας Butcher γράφεται

0				
κ	κ			
λ	$(\lambda - \rho)$	ρ		
μ	$(\mu - \sigma - \tau)$	τ	σ	
	a	b	c	d

Έδωσε τις συνθήκες

$$a + b + c + d = 1$$

$$b\kappa + c\lambda + d\mu = \frac{1}{2}$$

$$b\kappa^2 + c\lambda^2 + d\mu^2 = \frac{1}{3}$$

$$c\rho\kappa + d(\sigma\lambda + \tau\kappa) = \frac{1}{6}$$

$$b\kappa^3 + c\lambda^3 + d\mu^3 = \frac{1}{4}$$

$$c\rho\kappa\lambda + d(\sigma\lambda + \tau\kappa)\mu = \frac{1}{8}$$

$$c\rho\kappa^2 + d(\sigma\lambda^2 + \tau\kappa^2) = \frac{1}{12}$$

$$d\rho\sigma\kappa = \frac{1}{24}$$

Zu den Näherungen vierter Ordnung übergehend finden wir die Berechnung von vier Funktionswerten nötig, und die Vergleichung des Taylorschen Satzes ergibt die folgenden acht Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten:

$$\begin{aligned}a + b + c + d &= 1, \\bx + c\lambda + d\mu &= \frac{1}{2}, \\bx^2 + c\lambda^2 + d\mu^2 &= \frac{1}{3}, \\c\rho x + d(\sigma\lambda + \tau x) &= \frac{1}{6}, \\bx^3 + c\lambda^3 + d\mu^3 &= \frac{1}{4}, \\c\rho x\lambda + d(\sigma\lambda + \tau x)\mu &= \frac{1}{8}, \\c\rho x^2 + d(\sigma\lambda^2 + \tau x^2) &= \frac{1}{12}, \\d\rho\sigma x &= \frac{1}{24},\end{aligned}$$

wenn als gewünschte Näherung angesetzt ist:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}y &= a\mathcal{A}' + b\mathcal{A}'' + c\mathcal{A}''' + d\mathcal{A}''', \\ \mathcal{A}' &= f(x, y)\mathcal{A}x, \\ \mathcal{A}'' &= f(x + x\mathcal{A}x, y + x\mathcal{A}')\mathcal{A}x, \\ \mathcal{A}''' &= f(x + \lambda\mathcal{A}x, y + \rho\mathcal{A}'' + (\lambda - \rho)\mathcal{A}')\mathcal{A}x, \\ \mathcal{A}'''' &= f(x + \mu\mathcal{A}x, y + \sigma\mathcal{A}''' + \tau\mathcal{A}'' + (\mu - \sigma - \tau)\mathcal{A}')\mathcal{A}x.\end{aligned}$$

Hier läßt sich das Lösungssystem auch noch niederschreiben. Wenn man x und λ willkürlich läßt, erhält man nach einiger Rechnung:

$$c = \frac{1 - 2x}{12\lambda(\lambda - x)(1 - \lambda)}, \quad b = \frac{1 - 2\lambda}{12x(x - \lambda)(1 - x)}, \quad d = \frac{6x\lambda - 4(x + \lambda) + 3}{12(1 - \lambda)(1 - x)};$$

Εικόνα 2.2: Απόσπασμα από την εργασία του Kutta

Τις οποίες έλυσε

$$c = \frac{1 - 2\kappa}{12\lambda(\lambda - \kappa)(1 - \lambda)}, \quad b = \frac{1 - 2\lambda}{12\kappa(\kappa - \lambda)(1 - \kappa)}, \quad d = \frac{6\kappa\lambda - 4(\kappa + \lambda) + 3}{12(1 - \lambda)(1 - \kappa)}$$

$$a = 1 - b - c - d$$

$$\mu = 1, \quad \rho = \frac{\lambda(\lambda - \kappa)}{2\kappa(1 - 2\kappa)}, \quad \sigma = \frac{1}{24\kappa\rho d}, \quad \tau = \frac{1}{6\kappa d} - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\rho}{d}.$$

I) Αν $a = d$ και $b = c$

$$\lambda = 1 - \kappa, \quad \mu = 1, \quad \rho = \frac{1 - \kappa}{2\kappa},$$

$$\sigma = \frac{\kappa}{6\kappa(1 - \kappa) - 1}, \quad \tau = \frac{(1 - \kappa)(2\kappa - 1)}{2\kappa(6\kappa(1 - \kappa) - 1)}$$

$$a = d = \frac{6\kappa(1 - \kappa) - 1}{12\kappa(1 - \kappa)}, \quad b = c = \frac{1}{12\kappa(1 - \kappa)}$$

Για

$$\kappa = \frac{1}{3}, \quad \lambda = \frac{2}{3}$$

παίρνουμε τη μέθοδο (Κανόνας Simpson)

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{array}$$

II)

$$\begin{aligned} \text{Για } \lambda = \frac{1}{3}, \quad \mu = 1, \quad \alpha = \frac{1}{6}, \quad b = 0, \\ c = \frac{2}{3}, \quad d = \frac{1}{6}, \quad \sigma = 2, \quad \rho = \frac{1}{8\kappa}, \quad \tau = -\frac{1}{2\kappa} \end{aligned}$$

Για $\kappa = \frac{1}{4}$, παίρνουμε τη μέθοδο :

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 1 & -2 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

III)

$$\text{Για } \lambda = 0, \quad \kappa = \frac{1}{2}, \quad \mu = 1, \quad \tau = \frac{3}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{6}, -\frac{1}{12\rho},$$

$$b = \frac{2}{3}, \quad c = \frac{1}{12\rho}, \quad d = \frac{1}{6}, \quad \sigma = \frac{1}{2\rho},$$

παίρνουμε τη μέθοδο :

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & & \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ \hline & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \end{array}$$

IV)

$$\text{Για } \kappa = 1, \quad \lambda = \frac{1}{2}, \quad \mu = 1, \quad \rho = \frac{1}{8}, \quad \alpha = \frac{1}{6},$$

$$c = \frac{2}{3}, \quad \tau = -\frac{\sigma}{4}, \quad b = \frac{1}{6} - \frac{1}{3\sigma}, \quad d = \frac{1}{3\sigma}$$

Αν $\sigma = 1$, τότε παίρνουμε τη μέθοδο:

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \\ 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \\ \hline & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \end{array}$$

V)

$$\text{Για } \kappa = \lambda = \frac{1}{2}, \quad \mu = 1, \quad \alpha = \frac{1}{6}, \quad d = \frac{1}{6},$$

$$\rho = \frac{1}{2\sigma}, \quad \tau = 1 - \sigma, \quad b = \frac{2 - \sigma}{3}, \quad c = \frac{\sigma}{3}$$

Αν $\sigma = 1$, τότε παίρνουμε τη μέθοδο:

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Η μέθοδος αυτή είναι η πιο δημοφιλής μέχρι και σήμερα κλασική μέθοδος Runge-Kutta τέταρτης τάξης [12].

Ο Butcher και ο Kutta ουσιαστικά διατύπωσαν τις ίδιες συνθήκες ώστε να επιτευχθεί η ακρίβεια μιας μεθόδου Runge-Kutta.

Ο Kutta διατύπωσε τις συνθήκες με πιο αναλυτική μορφή, η οποία είναι βασισμένη στην ανάπτυξη σε σειρά Taylor και χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές $\lambda, \mu, \sigma, \rho, a, b, c$. Οι συνθήκες αυτές περιλαμβάνουν συνδυασμούς αυτών των μεταβλητών ώστε να επιτυγχάνεται η απαιτούμενη ακρίβεια.

Ο Butcher, αρκετά χρόνια αργότερα, αναδιατύπωσε στην ουσία τις ίδιες συνθήκες αλλά με πιο οργανωμένη μορφή με το γνωστό Butcher tableau.

Η διαφορά δεν είναι στο μαθηματικό περιεχόμενο, αλλά στον τρόπο παρουσίασης και παραμετροποίησης. Οι συνθήκες του Butcher είναι γραμμένες με διαφορετική σημειογραφία και διαφορετική διάταξη, πράγμα που διευκολύνει τον έλεγχο και την παραγωγή νέων μεθόδων.

Επιπλέον, αλλάζοντας τις τιμές στις μεταβλητές αλλά οι συνθήκες να εξα-

κολουθούν να ικανοποιούνται τότε προκύπτουν γνωστές μέθοδοι με την ίδια ακρίβεια, όπως η μέθοδος Simpson, η RK4 οι οποίες φαίνονται στις περιπτώσεις I) και V.

2.4.3 Μέθοδοι 5ης τάξης

Στη συνέχεια ο Kutta θεώρησε μέθοδο με 5 στάδια και έδωσε επιπλέον 8 συνθήκες για την πέμπτη τάξη. Συνολικά είχε 16 συνθήκες και προσπάθησε να κατασκευάσει μέθοδο 5ης τάξης[12].

$$\Delta y = a\Delta' + b\Delta'' + c\Delta''' + d\Delta'''' + e\Delta^v$$

με

$$\Delta' = f(x, y)\Delta x$$

$$\Delta'' = f(x + \kappa\Delta x, y + \kappa\Delta')\Delta x$$

$$\Delta''' = f(x + \lambda\Delta x, y + \rho\Delta'' + (\lambda - \rho)\Delta')\Delta x$$

$$\Delta'''' = f(x + \mu\Delta x, y + \sigma\Delta''' + \tau\Delta'' + (\mu - \sigma - \tau)\Delta')\Delta x$$

$$\Delta^v = f(x + \nu\Delta x, y + \varphi\Delta'''' + \chi\Delta''' + \psi\Delta'' + (\nu - \varphi - \chi - \psi)\Delta')\Delta x$$

Όπως βλέπουμε χρησιμοποίησε τις συνθήκες γραμμής για να μειώσει τον αριθμό των παραμέτρων. Ο αντίστοιχος πίνακας Butcher γράφεται

0					
κ	κ				
λ	$(\lambda - \rho)$	ρ			
μ	$(\mu - \sigma - \tau)$	τ	σ		
ν	$(\nu - \varphi - \chi - \psi)$	ψ	χ	φ	
	a	b	c	d	e

Οι συνθήκες έως 4ης τάξης για 5 στάδια είναι:

$$a + b + c + d + e = 1,$$

$$b\kappa + c\lambda + d\mu + e\nu = \frac{1}{2},$$

$$b\kappa^2 + c\lambda^2 + d\mu^2 + e\nu^2 = \frac{1}{3},$$

$$c\rho\kappa + d(\sigma\lambda + \tau\kappa) + e(\varphi\mu + \chi\lambda + \psi\kappa) = \frac{1}{6},$$

$$b\kappa^3 + c\lambda^3 + d\mu^3 + e\nu^3 = \frac{1}{4},$$

$$c\rho\kappa\lambda + d(\sigma\lambda + \tau\kappa)\mu + e(\varphi\mu + \chi\lambda + \psi\kappa)\nu = \frac{1}{8}$$

$$c\rho\kappa^2 + d(\sigma\lambda^2 + \tau\kappa^2) + e(\varphi\mu^2 + \chi\lambda^2 + \psi\kappa^2) = \frac{1}{12},$$

$$d\rho\kappa\sigma + e[(\sigma\lambda + \tau\kappa)\varphi + \rho\kappa\chi] = \frac{1}{24},$$

Επιπλέον ο Kutta διατύπωσε συνθήκες 5ης τάξης και είναι:

$$b\kappa^4 + c\lambda^4 + d\mu^4 + e\nu^4 = \frac{1}{5},$$

$$c\rho\kappa\lambda^2 + d(\sigma\lambda + \tau\kappa)\mu^2 + e(\varphi\mu + \chi\lambda + \psi\kappa)\nu^2 = \frac{1}{10},$$

$$c\rho\kappa^2\lambda + d(\sigma\lambda^2 + \tau\kappa^2)\mu + e(\varphi\mu^2 + \chi\lambda^2 + \psi\kappa^2)\nu = \frac{1}{15},$$

$$c\rho^2\kappa^2 + d(\sigma\lambda + \tau\kappa)^2 + e(\varphi\mu + \chi\lambda + \psi\kappa)^2 = \frac{1}{90},$$

$$c\rho\kappa^3 + d(\sigma\lambda^3 + \tau\kappa^3) + e(\varphi\mu^3 + \chi\lambda^3 + \psi\kappa^3) = \frac{1}{90},$$

$$d\rho\kappa\sigma(\lambda + \mu) + e[(\sigma\lambda + \tau\kappa)\varphi(\mu + \nu) + \rho\kappa(\lambda + \nu)\chi] = \frac{7}{190},$$

$$d\rho\kappa^2\sigma + e[(\sigma\lambda^2 + \tau\kappa^2)\varphi + \rho\kappa^2\chi] = \frac{1}{60},$$

$$e\rho\kappa\sigma\varphi = \frac{1}{190}.$$

Η μέθοδος του είχε 15 άγνωστους και δεν μπόρεσε να λύσει τις εξισώσεις των συνθηκών, για το λόγο αυτό εισήγαγε ακόμα ένα στάδιο και κατασκεύασε δύο μεθόδους 5ης τάξης με 6 στάδια.

Η πρώτη από αυτές είναι η ακόλουθη

$$\Delta y = \frac{17\Delta' + 100\Delta''' + 2\Delta'''' - 50\Delta^V + 75\Delta^{VI}}{144}$$

$$= \Delta''' + \frac{(\Delta' - \Delta''') + 3(\Delta^{VI} - \Delta^V) + 2(\Delta^{VI} - \Delta''')}{9}$$

$$+ \frac{(\Delta' - \Delta''') + 5(\Delta''' - \Delta^{VI}) + 2(\Delta'''' - \Delta^V)}{144}$$

$\mu\epsilon$

$$\Delta' = f(x, y) \Delta x$$

$$\Delta'' = f\left(x + \frac{\Delta x}{5}, y + \frac{\Delta'}{5}\right) \Delta x$$

$$\Delta''' = f\left(x + \frac{2\Delta x}{5}, y + \frac{2\Delta''}{5}\right) \Delta x$$

$$\Delta'''' = f\left(x + \Delta x, y + \frac{15\Delta''' - 20\Delta'' + 9\Delta'}{4}\right) \Delta x$$

$$\Delta^V = f\left(x + \frac{3\Delta x}{5}, y + \frac{8\Delta'''' - 52\Delta''' + 180\Delta'' - 76\Delta'}{100}\right) \Delta x$$

$$\Delta^{VI} = f\left(x + \frac{4\Delta x}{5}, y + \frac{8\Delta'''' + 10\Delta''' + 60\Delta'' - 18\Delta'}{75}\right) \Delta x$$

Και ο Butcher array είναι:

0						
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$					
$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{5}$				
1	$\frac{9}{4}$	-5	$\frac{15}{4}$			
$\frac{3}{5}$	$\frac{-76}{100}$	$\frac{180}{100}$	$\frac{-52}{100}$	$\frac{8}{100}$		
$\frac{4}{5}$	$\frac{-18}{75}$	$\frac{60}{75}$	$\frac{10}{75}$	$\frac{8}{75}$		
	$\frac{17}{144}$	0	$\frac{100}{144}$	$\frac{2}{144}$	$\frac{-50}{144}$	$\frac{75}{144}$

Η δεύτερη από αυτές είναι η ακόλουθη

$$\begin{aligned}\Delta y &= \frac{48\Delta' + 125\Delta''' - 81\Delta^V + 100\Delta^{VI}}{192} \\ &= \Delta^{VI} + \frac{3(\Delta' - \Delta^{VI}) + 3(\Delta''' - \Delta^{VI}) + 5(\Delta''' - \Delta^V)}{12} \\ &\quad + \frac{3(\Delta^{VI} - \Delta''') + (\Delta^{VI} - \Delta^V)}{192}\end{aligned}$$

με

$$\begin{aligned}\Delta' &= f(x, y) \Delta x \\ \Delta'' &= f\left(x + \frac{\Delta x}{3}, y + \frac{\Delta'}{3}\right) \Delta x \\ \Delta''' &= f\left(x + \frac{2\Delta x}{5}, y + \frac{6\Delta'' + 4\Delta'}{25}\right) \Delta x \\ \Delta'''' &= f\left(x + \Delta x, y + \frac{15\Delta''' - 12\Delta'' + \Delta'}{4}\right) \Delta x \\ \Delta^V &= f\left(x + \frac{2\Delta x}{3}, y + \frac{8\Delta'''' - 50\Delta''' + 90\Delta'' + 6\Delta'}{81}\right) \Delta x \\ \Delta^{VI} &= f\left(x + \frac{4\Delta x}{5}, y + \frac{4\Delta'''' - 5\Delta''' + 18\Delta'' + 7\Delta'}{30}\right) \Delta x\end{aligned}$$

Και ο Butcher array είναι:

0						
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$					
$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$				
1	$\frac{1}{4}$	-3	$\frac{15}{4}$			
$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{81}$	$\frac{90}{81}$	$\frac{-50}{81}$	$\frac{8}{81}$		
$\frac{4}{5}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{18}{30}$	$\frac{-5}{30}$	$\frac{4}{30}$		
	$\frac{48}{192}$	0	$\frac{125}{192}$	0	$\frac{-81}{192}$	$\frac{100}{192}$

[12] [3]

Τις μεθόδους αυτές τις διόρθωσε ο Nystrom και τα αντίστοιχα Butcher array είναι:

0						
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$					
$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{5}$				
1	$\frac{9}{4}$	-5	$\frac{15}{4}$			
$\frac{3}{5}$	$\frac{-63}{100}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{-65}{100}$	$\frac{8}{100}$		
$\frac{4}{5}$	$\frac{-18}{75}$	$\frac{60}{75}$	$\frac{10}{75}$	$\frac{8}{75}$		
	$\frac{17}{144}$	0	$\frac{25}{36}$	$\frac{1}{72}$	$\frac{-25}{72}$	$\frac{25}{48}$

και η δεύτερη είναι:

0						
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$					
$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$				
1	$\frac{1}{4}$	-3	$\frac{15}{4}$			
$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{81}$	$\frac{90}{81}$	$\frac{-50}{81}$	$\frac{8}{81}$		
$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{75}$	0	
	$\frac{23}{192}$	0	$\frac{125}{192}$	0	$\frac{-27}{64}$	$\frac{125}{192}$

2.5 Οι συνεισφορές του E.J. Nyström

Η πρώτη ιστορία των μεθόδων Runge-Kutta κορυφώθηκε με το έργο του Nyström (1925). Ήταν σε θέση να διορθώσει μερικές από τις μεθόδους πέμπτης τάξης του Kutta και έδειξε επίσης πώς να εφαρμόσει τη μέθοδο Runge-Kutta σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης. Εκ πρώτης όψεως αυτό είναι αρκετά απλό, διότι κάθε σύστημα δεύτερης τάξης μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως σύστημα πρώτης τάξης με πρόσθετες εξαρτημένες μεταβλητές. Ωστόσο, η άμεση επίλυση ενός τέτοιου προβλήματος μπορεί να είναι πολύ πιο αποτελεσματική και η μεγάλη επικράτηση προβλημάτων δεύτερης τάξης στη μοντελοποίηση καθιστά σημαντικό αυτό το είδος κέρδους στην αποτελεσματικότητα [3].

Κεφάλαιο 3

Θεωρία Butcher

Ο Butcher ξεκινώντας από το 1963 σε μια σειρά άρθρων [1, 2, 3, 4, 5] παρουσίασε την □εωρητική τεκμηρίωση των μεθόδων RungeKutta χρησιμοποιώντας έναν πίνακα γνωστό και ως Butcher array ή Butcher tableau.

Η γενική μορφή Runge-Kutta s σταδίων ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \sum_{i=1}^s b_i f(c_n + c_i h, Y_i), \\ k_i &= y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(x + c_j h, Y_j), \quad i = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Τα k_i καλούνται στάδια της μεθόδου.

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n + c_1 h, y_n + h(a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \dots + a_{1s}k_s)), \\ k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + h(a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \dots + a_{2s}k_s)), \\ k_3 &= f(x_n + c_3 h, y_n + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + \dots + a_{3s}k_s)), \\ &\vdots \\ k_s &= f(x_n + c_s h, y_n + h(a_{s1}k_1 + a_{s2}k_2 + \dots + a_{ss}k_s)). \end{aligned}$$

Και Butcher array είναι:

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array}$$

Ο Butcher array μπορεί να γραφεί με χρήση πινάκω ως εξής:

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

Ο πίνακας A είναι ένας πίνακας πραγματικών αριθμών διάστασης $s \times s$, ενώ ο b και ο c είναι διανύσματα διάστασης s .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_s \end{pmatrix}.$$

Είναι χρήσιμο να χρησιμοποιούμε τον διαγώνιο πίνακα C με διαγώνια στοιχεία

τα στοιχεία του διανύσματος c .

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_s \end{pmatrix}.$$

Τα b_i ονομάζονται βάρη της μεθόδου και τα c_i κόμβοι της μεθόδου.

Η μέθοδος που διατύπωσε ο Kutta 3.1 είναι άμεση μέθοδος Runge-Kutta. Ο πίνακας A είναι αυστηρά κάτω τριγωνικός, δηλαδή $a_{ij} = 0$ για $i \leq j$. Αν ο πίνακας A είναι κάτω τριγωνικός, $a_{ij} = 0$ για $i < j$ (δηλαδή έχουμε μη μηδενικά στοιχεία και στη διαγώνιο) η μέθοδος λέγεται διαγώνια έμμεση

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & & & \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & a_{s3} & \cdots & a_{s,s} \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_s \end{array}$$

Αν όλα τα διαγώνια στοιχεία είναι ίσα η μέθοδος λέγεται μοναδικά διαγώνια έμμεση

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \cdots = a_{ss} = \lambda$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 c_1 & \lambda & & & \\
 c_2 & a_{21} & \lambda & & \\
 c_3 & a_{31} & a_{32} & \lambda & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
 c_s & a_{s1} & a_{s2} & a_{s3} & \cdots & \lambda \\
 \hline
 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_s
 \end{array}$$

Θα ασχοληθούμε με τις άμεσες μεθόδους που παρουσιάστηκαν από τον Kutta το 1901, τις μεθόδους στη μορφή που σήμερα ονομάζουμε Runge-Kutta.

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_n, y_n) \\
 k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_1) \\
 k_3 &= f(x_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) \\
 &\vdots \\
 k_s &= f(x_n + c_s h, y_n + h(a_{s1} k_1 + a_{s2} k_2 + \cdots + a_{s,s-1} k_{s-1})) \\
 y_{n+1} &= y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + \cdots + b_s k_s)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Αυτή είναι μια μέθοδος s σταδίων. Ο Kutta έκανε την υπόθεση που είναι γνωστή ως συνθήκη γραμμής

$$\begin{aligned}
 c_2 &= a_{21} \\
 c_3 &= a_{31} + a_{32} \\
 &\vdots \\
 c_s &= a_{s1} + a_{s2} + \cdots + a_{s,s-1}
 \end{aligned}$$

Για να είναι μια μέθοδος τάξης p πρέπει η αναλυτική λύση να συμφωνεί

με την αριθμητική λύση μέχρι και τον όρο h^p , όπου p η τάξη της μεθόδου. Η απαίτηση αυτή μας δίνει τις σχέσεις μεταξύ των συντελεστών a_{ij} , b_j , c_i και οι οποίες ονομάζονται συνθήκες αλγεβρικής τάξης.

Ο προσδιορισμός των συνθηκών τάξης είναι μια τετριμμένη διαδικασία με χρήση κανόνων διαφορικού λογισμού, η οποία γίνεται ολοένα και πιο περίπλοκη όσο αυξάνεται η τάξη. Παρακάτω θα δείξουμε πώς προκύπτουν οι συνθήκες τάξης για άμεσες μεθόδους. Αναπτύσσουμε την σειρά Taylor στην αναλυτική λύση:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + O(h^4)$$

Και αντικαθιστώντας την

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

την

$$y''(x) = \frac{d}{dx}f(x, y(x)) = f_x + f_y f$$

Και την

$$y'''(x) = \frac{d}{dx}(f_x + f_y f) = f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y f_x + f_y^2 f$$

Οπότε το ανάπτυγμα Taylor γίνεται :

$$\begin{aligned} y(x_n + h) &= y(x_n) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_y f) \\ &+ \frac{h^3}{3!}(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y f_x + f_y^2 f) + O(h^4) \end{aligned} \quad (3.2)$$

• **Η γενική μορφή της μεθόδου 2 σταδίων είναι:**

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + h\alpha_{21}k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Αν εφαρμόσουμε την σειρά Taylor για το k_2 και στη συνέχεια αντικαταστήσουμε στην σχέση (3.3) προκύπτει:

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 + b_2)f + h^2 b_2 (c_2 f_x + \alpha_{21} f_y f) + \frac{1}{2} h^3 b_2 (c_2^2 f_{xx} + 2c_2 \alpha_{21} f f_{xy} + \alpha_{21}^2 f^2 f_{yy}) + O(h^4) \quad (3.4)$$

Συγκρίνουμε την (3.2) με την (3.4) και τότε προκύπτουν οι εξής συνθήκες για την 2η τάξη:

$$1^{\text{η}} \text{ τάξη: } b_1 + b_2 = 1,$$

$$2^{\text{η}} \text{ τάξη: } b_2 c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = a_{21}$$

Παρατηρούμε ότι οι μέθοδοι Runge και του Heun είναι δεύτερης τάξης μέθοδοι. Παρατηρώντας τους τύπους (3.4) και (3.2) μπορούμε να δούμε ότι δεν μπορούμε να βρούμε μέθοδο 3ης τάξης με 2 στάδια γιατί στην ακριβή λύση (3.2) έχουμε επιπλέον τους όρους $f_y f_x + f_y^2 f$. Για τον λόγο αυτό για μέθοδο 3ης τάξης πάμε στη Μέθοδος Runge -Kutta σε 3 στάδια

- Η γενική μορφή της μεθόδου 3 σταδίων είναι:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_1) \\ k_3 &= f(x_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) \\ y_{n+1} &= y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3) \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε πάλι την σειρά Taylor για το k_2 και για k_3 και συγκρίνοντας την ακριβή λύση με την προσεγγιστική βρίσκουμε ότι οι συνθήκες για μέθοδο

3 σταδίων είναι:

$$1^{\text{η}} \text{ τάξη: } b_1 + b_2 + b_3 = 1,$$

$$2^{\text{η}} \text{ τάξη: } b_2 c_2 + b_3 c_3 = \frac{1}{2},$$

$$3^{\text{η}} \text{ τάξη: } b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = \frac{1}{3},$$

$$b_3 a_{32} c_2 = \frac{1}{6}$$

- Από όλες τις μεθόδους 4ης τάξης με 4 στάδια, η πλέον δημοφιλής που χρησιμοποιείται και σήμερα είναι η παρακάτω:

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2))$$

$$k_4 = f(x_n + c_4 h, y_n + h(a_{41} k_1 + a_{42} k_2 + a_{43} k_3))$$

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + b_4 k_4)$$

Και οι συνθήκες τάξης:

$$1^{\text{η}} \text{ τάξη:} \quad b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1,$$

$$2^{\text{η}} \text{ τάξη:} \quad b_2c_2 + b_3c_3 + b_4c_4 = \frac{1}{2},$$

$$3^{\text{η}} \text{ τάξη:} \quad b_2c_2^2 + b_3c_3^2 + b_4c_4^2 = \frac{1}{3},$$

$$b_3a_{32}c_2 + b_4a_{42}c_2 + b_4a_{43}c_3 = \frac{1}{6},$$

$$4^{\text{η}} \text{ τάξη:} \quad b_2c_2^3 + b_3c_3^3 + b_4c_4^3 = \frac{1}{4},$$

$$b_3c_3a_{32}c_2 + b_4c_4(a_{42}c_2 + a_{43}c_3) = \frac{1}{8},$$

$$b_3a_{32}c_2^2 + b_4(a_{42}c_2^2 + a_{43}c_3^2) = \frac{1}{12},$$

$$b_4a_{43}a_{32}c_2 = \frac{1}{24}$$

Ο Butcher το 1963 σε μια σειρά άρθρων παρουσίασε την θεωρητική τεκμηρίωση των μεθόδων Runge-Kutta χρησιμοποιώντας έναν πίνακα γνωστό ως Butcher array ή Butcher tableau.

$$\begin{array}{c|cccc}
 0 & & & & \\
 c_2 & a_{21} & & & \\
 c_3 & a_{31} & a_{32} & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
 c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s,s-1} \\
 \hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s
 \end{array}$$

Η μέθοδος του Euler σύμφωνα με τα Butcher array είναι:

$$\begin{array}{c|c}
 0 & 0 \\
 \hline
 & 1
 \end{array}$$

Ενώ οι μέθοδοι δύο σταδίων Heun και Runge σύμφωνα με τα Butcher array είναι:

$$\begin{array}{c|cc}
 0 & & \\
 1 & 1 & \\
 \hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
 \end{array}$$

Και

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 0 \quad 1 \end{array}$$

Ο Butcher απέδειξε ότι δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε μέθοδο 5ης τάξης με 5 στάδια, χρειάζονται τουλάχιστον 6 στάδια.

Έως και την τέταρτη τάξη οι συνθήκες είναι ίδιες με αυτές που έδωσε ο Kutta. Για την πέμπτη τάξη οι συνθήκες που έδωσε ο Kutta είναι 8 ενώ στην πραγματικότητα όταν εφαρμόζουμε σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων οι συνθήκες είναι 9.

Η συνθήκη που δίνει ο Kutta

$$d\rho\kappa\sigma(\lambda + \mu) + e[(\sigma\lambda + \tau\kappa)\varphi(\mu + \nu) + \rho\kappa(\lambda + \nu)\chi] = \frac{7}{120}$$

είναι το άθροισμα των συνθηκών του Butcher

$$b c A A c e = \frac{1}{30} \quad b A c A c e = \frac{1}{40}$$

$$\begin{aligned} a_{43}a_{54}b_5c_3c_5 + c_2(a_{42}a_{54}b_5c_5 + a_{32}(a_{43}b_4c_4 + a_{53}b_5c_5)) &= \frac{1}{30} \\ a_{43}a_{54}b_5c_3c_4 + c_2(a_{32}(a_{43}b_4 + a_{53}b_5)c_3 + a_{42}a_{54}b_5c_4) &= \frac{1}{40} \end{aligned}$$

Με το συμβολισμό του Kutta

$$\begin{aligned} e\varphi\lambda\mu\sigma + \kappa(e\varphi\mu\tau + \lambda\rho(d\sigma + e\chi)) &= \frac{1}{40} \\ e\varphi\lambda\nu\sigma + \kappa(e\varphi\nu\tau + \rho(d\mu\sigma + e\nu\chi)) &= \frac{1}{30} \end{aligned}$$

Για μία διαφορική εξίσωση δεν επηρεάζεται η τάξη.

3.1 Συνθήκες τάξης με δένδρα

Για να είναι μια αριθμητική μέθοδος τάξης p απαιτείται η ικανοποίηση ενός αριθμού αλγεβρικών συνθηκών για να εξασφαλιστεί η ακρίβεια της προσέγγισης. Ο Butcher σύνδεσε τις συνθήκες με τα δένδρα. Τα δένδρα είναι συνδυαστικά γραφήματα των οποίων τα στοιχεία συνδέονται μεταξύ τους χωρίς να δημιουργούν κύκλους. Ένα δέντρο με ρίζα (rooted tree) είναι ένα δέντρο στο οποίο μία συγκεκριμένη κορυφή θεωρείται ρίζα (root).

Ορισμός 3.1. Ένα γράφημα t λέγεται δέντρο με ρίζα (rooted tree) αν υπάρχει μία κορυφή του, την οποία αποκαλούμε ρίζα, με τις εξής ιδιότητες:

- Οι κορυφές χωρίζονται σε επίπεδα $0, 1, \dots, H$ με H το ύψος του δέντρου.
- Στο μηδενικό επίπεδο έχουμε μόνο τη ρίζα του δέντρου.
- Σε κάθε επίπεδο πλην του μηδενικού βρίσκονται τα παιδιά των κορυφών του προηγούμενου επιπέδου, ορίζοντας τα κλαδιά που ξεκινούν από τον γονέα και καταλήγουν στο παιδί.
- Κάθε κορυφή έχει έναν γονέα, εκτός από τη ρίζα που δεν έχει κανέναν.

Ο αριθμός των κορυφών ενός δέντρου αποτελεί την τάξη $r(t)$ του δέντρου. Αν από τα δένδρα αφαιρέσουμε τη ρίζα μαζί με τα κλαδιά που ξεκινούν από αυτή τότε τα δένδρα που προκύπτουν ονομάζονται υπόδεντρα. Σε κάθε δέντρο αντιστοιχούν πολλά δένδρα με ρίζα και μπορούν να θεωρηθούν σαν μία κλάση ισοδυναμίας. Εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά όταν λέμε δέντρο θα εννοείται δέντρο με ρίζα.

Το δέντρο με μια κορυφή είναι:



Εικόνα 3.1: Δέντρο με μια κορυφή

Το μοναδικό δέντρο με δυο κορυφές είναι:



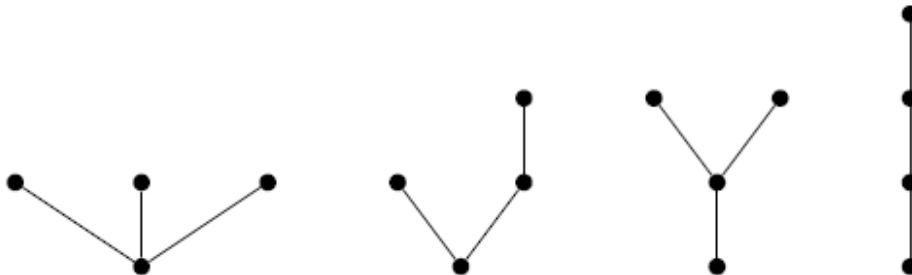
Εικόνα 3.2: Δέντρο με δυο κορυφές

Με τρεις κορυφές έχουμε τα παρακάτω δέντρα:



Εικόνα 3.3: Δέντρα με τρεις κορυφές

Με τέσσερις κορυφές έχουμε τα παρακάτω δέντρα:



Εικόνα 3.4: Δέντρα με 4 κορυφές

Ο Butcher (2016)[4] διατύπωσε ότι ο αριθμός των δέντρων θ_k , για $k = 1, 2, \dots$, με ρίζες που έχουν ακριβώς k κορυφές, δίνεται από τον τύπο:

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 x + \vartheta_3 x^2 + \dots = (1 - x)^{-\vartheta_1} (1 - x^2)^{-\vartheta_2} (1 - x^3)^{-\vartheta_3} \dots$$

Τάξη δέντρων (αριθμός κορυφών)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Αριθμός δέντρων	1	1	2	4	9	20	48	115	286	719
Συνολικός Αριθμός συνθηκών τάξης	1	2	4	8	17	37	85	200	486	1205

Πίνακας 3.1: Πίνακας με την τάξη, των αριθμό των δένδρων και τις συνθήκες τάξης

Για να είναι μια μέθοδος τάξης p θα πρέπει να ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες τάξης που προκύπτουν από όλα τα δέντρα με αριθμό κορυφών από 1 έως p . Δηλαδή για μέθοδο τάξης 5, πρέπει να ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες τάξης που προκύπτουν από όλα τα δένδρα με αριθμό από 1 έως 5 δηλαδή $1+1+2+4+9=17$. Σύμφωνα με τον Butcher οι συνθήκες 5ης τάξης είναι 9.

Σύμφωνα με τον Butcher, με την βοήθεια των δένδρων μπορούμε επίσης να προσδιορίσουμε και την τάξη της μεθόδου[4].

Θεώρημα 3.1. *Μια μέθοδος Runge-Kutta είναι τάξης p , αν*

$$\Phi(t) = \frac{1}{\gamma(t)}$$

για όλα τα δέντρα τάξης $\leq p$.

Η πυκνότητα $\gamma(t)$ είναι το γινόμενο των τάξεων όλων των δέντρων που ξεκινούν από κάθε κορυφή.

Ο Butcher αντιστοίχισε την ρίζα του δέντρου με ένα διάνυσμα b , τα φύλλα στο διάνυσμα c και όλες τις άλλες κορυφές στον πίνακα A .

3.2 Συνθήκες τάξης με πίνακες

Οι συνθήκες που περιγράψαμε παραπάνω μπορούμε να τις γράψουμε και με την χρήση πινάκων

- Για μέθοδος 2 σταδίων

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Για άμεσες μεθόδους

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

Τότε οι συνθήκες τάξης είναι:

$$\text{Για την 1}^\text{η} \text{ τάξη: } b^\top e = 1,$$

$$\text{Για την 2}^\text{η} \text{ τάξη: } b^\top c = \frac{1}{2}.$$

Οι συνθήκες τάξης Runge-Kutta

$$1^\text{η} \text{ τάξη: } b_1 + b_2 = 1,$$

$$2^\text{η} \text{ τάξη: } b_2 c_2 = \frac{1}{2},$$

$$c_2 = a_{21}$$

- Για μέθοδος 3 σταδίων

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Για άμεσες μεθόδους

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$$

Τότε οι συνθήκες τάξης είναι:

$$\text{Για την 1}^{\text{η}} \text{ τάξη: } b^{\top} e = 1,$$

$$\text{Για την 2}^{\text{η}} \text{ τάξη: } b^{\top} C e = \frac{1}{2},$$

$$\text{Για την 3}^{\text{η}} \text{ τάξη: } b^{\top} C^2 e = \frac{1}{3},$$

$$b^{\top} A C e = \frac{1}{6}.$$

Οι συνθήκες τάξης Runge-Kutta

$$1^{\text{η}} \text{ τάξη: } b_1 + b_2 + b_3 = 1,$$

$$2^{\text{η}} \text{ τάξη: } b_2 c_2 + b_3 c_3 = \frac{1}{2},$$

$$3^{\text{η}} \text{ τάξη: } b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = \frac{1}{3},$$

$$b_3 a_{32} c_2 = \frac{1}{6}$$

- Για μέθοδος 4 σταδίων

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Για άμεσες μεθόδους

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{pmatrix}$$

Τότε οι συνθήκες τάξης είναι:

$$\text{Για την 1}^{\text{η}} \text{ τάξη: } b^{\top} e = 1,$$

$$\text{Για την 2}^{\text{η}} \text{ τάξη: } b^{\top} C e = \frac{1}{2},$$

$$\text{Για την 3}^{\text{η}} \text{ τάξη: } b^{\top} C^2 e = \frac{1}{3},$$

$$b^{\top} A C e = \frac{1}{6},$$

$$\text{Για την 4}^{\text{η}} \text{ τάξη: } b^{\top} C^3 e = \frac{1}{4},$$

$$b^{\top} C A C e = \frac{1}{8},$$

$$b^{\top} A C^2 e = \frac{1}{12},$$

$$b^{\top} A^2 C e = \frac{1}{24}$$

Οι συνθήκες τάξης Runge-Kutta

$$1^{\text{η}} \text{ τάξη:} \quad b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1,$$

$$2^{\text{η}} \text{ τάξη:} \quad b_2 c_2 + b_3 c_3 + b_4 c_4 = \frac{1}{2},$$

$$3^{\text{η}} \text{ τάξη:} \quad b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 + b_4 c_4^2 = \frac{1}{3},$$

$$b_3 a_{32} c_2 + b_4 a_{42} c_2 + b_4 a_{43} c_3 = \frac{1}{6},$$

$$4^{\text{η}} \text{ τάξη:} \quad b_2 c_2^3 + b_3 c_3^3 + b_4 c_4^3 = \frac{1}{4},$$

$$b_3 c_3 a_{32} c_2 + b_4 c_4 (a_{42} c_2 + a_{43} c_3) = \frac{1}{8},$$

$$b_3 a_{32} c_2^2 + b_4 (a_{42} c_2^2 + a_{43} c_3^2) = \frac{1}{12},$$

$$b_4 a_{43} a_{32} c_2 = \frac{1}{24}$$

- Για μέθοδος 6 σταδίων Όπως είπαμε για να πάμε σε 5η τάξη χρειαζόμαστε 6 στάδια.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} & \alpha_{26} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{46} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \alpha_{55} & \alpha_{56} \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63} & \alpha_{64} & \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Για άμεσες μεθόδους

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & 0 & 0 \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63} & \alpha_{64} & \alpha_{65} & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 \end{pmatrix}$$

Τότε οι συνθήκες τάξης είναι:

$$\text{Για την 1}^{\text{η}} \text{ τάξη: } b^{\top} e = 1,$$

$$\text{Για την 2}^{\text{η}} \text{ τάξη: } b^{\top} C e = \frac{1}{2},$$

$$\text{Για την 3}^{\text{η}} \text{ τάξη: } b^{\top} C^2 e = \frac{1}{3},$$

$$b^{\top} A C e = \frac{1}{6},$$

$$\text{Για την 4}^{\text{η}} \text{ τάξη: } b^{\top} C^3 e = \frac{1}{4},$$

$$b^{\top} C A C e = \frac{1}{8},$$

$$b^{\top} A C^2 e = \frac{1}{12},$$

$$b^{\top} A^2 C e = \frac{1}{24},$$

Για την 5^η τάξη: $b^\top C^4 e = \frac{1}{5},$

$$b^\top C^2 A C e = \frac{1}{10},$$

$$b^\top C A C^2 e = \frac{1}{15},$$

$$b^\top C A^2 C e = \frac{1}{30},$$

$$b^\top ((A C e) * (A C e)) = \frac{1}{20},$$

$$b^\top A C^3 e = \frac{1}{20},$$

$$b^\top A C A C e = \frac{1}{40},$$

$$b^\top A^2 C^2 e = \frac{1}{60},$$

$$b^\top A^3 C e = \frac{1}{120}$$

Οι συνθήκες τάξης Runge-Kutta

$$1^{\text{η}} \text{ τάξη:} \quad b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 1,$$

$$2^{\text{η}} \text{ τάξη:} \quad b_2 c_2 + b_3 c_3 + b_4 c_4 + b_5 c_5 + b_6 c_6 = \frac{1}{2},$$

$$3^{\text{η}} \text{ τάξη:} \quad b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 + b_4 c_4^2 + b_5 c_5^2 + b_6 c_6^2 = \frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned} & a_{32} b_3 c_2 + b_4 (a_{42} c_2 + a_{43} c_3) + b_5 (a_{52} c_2 + a_{53} c_3 + a_{54} c_4) \\ & + b_6 (a_{62} c_2 + a_{63} c_3 + a_{64} c_4 + a_{65} c_5) = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

$$4^{\text{η}} \text{ τάξη:} \quad b_2 c_2^3 + b_3 c_3^3 + b_4 c_4^3 + b_5 c_5^3 + b_6 c_6^3 = \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned} & a_{32} b_3 c_3 c_2 + b_4 c_4 (a_{42} c_2 + a_{43} c_3) + b_5 c_5 (a_{52} c_2 + a_{53} c_3 + a_{54} c_4) \\ & + b_6 c_6 (a_{62} c_2 + a_{63} c_3 + a_{64} c_4 + a_{65} c_5) = \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a_{32} b_3 c_2^2 + b_4 (a_{42} c_2^2 + a_{43} c_3^2) + b_5 (a_{52} c_2^2 + a_{53} c_3^2 + a_{54} c_4^2) \\ & + b_6 (a_{62} c_2^2 + a_{63} c_3^2 + a_{64} c_4^2 + a_{65} c_5^2) = \frac{1}{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a_{32} b_4 a_{43} c_2 + b_5 (a_{32} a_{53} c_2 + a_{42} a_{54} c_2 + a_{43} a_{54} c_3) \\ & + b_6 (a_{32} a_{63} c_2 + a_{42} a_{64} c_2 + a_{52} a_{65} c_2 \\ & + a_{43} a_{64} c_3 + a_{53} a_{65} c_3 + a_{54} a_{65} c_4) = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

$$5^{\text{η}} \text{ τάξη: } \begin{aligned} & a_{42}a_{54}a_{65}b_6c_2 + a_{32}(a_{43}a_{54}b_5 + a_{43}a_{64}b_6 + a_{53}a_{65}b_6)c_2 \\ & + a_{43}a_{54}a_{65}b_6c_3 \end{aligned} = \frac{1}{120},$$

$$\begin{aligned} & a_{54}a_{65}b_6c_4c_6 + c_3(a_{43}a_{54}b_5c_5 + a_{43}a_{64}b_6c_6 + a_{53}a_{65}b_6c_6) \\ & + c_2(a_{42}a_{54}b_5c_5 + a_{42}a_{64}b_6c_6 + a_{52}a_{65}b_6c_6 \\ & + a_{32}(a_{43}b_4c_4 + a_{53}b_5c_5 + a_{63}b_6c_6)) \end{aligned} = \frac{1}{30},$$

$$\begin{aligned} & a_{32}b_3c_2c_3^2 + a_{42}b_4c_2c_4^2 + a_{43}b_4c_3c_4^2 + a_{52}b_5c_2c_5^2 + a_{53}b_5c_3c_5^2 \\ & + a_{54}b_5c_4c_5^2 + a_{62}b_6c_2c_6^2 + a_{63}b_6c_3c_6^2 + a_{64}b_6c_4c_6^2 + a_{65}b_6c_5c_6^2 \end{aligned} = \frac{1}{10},$$

$$\begin{aligned} & a_{65}b_6c_5^2c_6 + c_2^2(a_{32}b_3c_3 + a_{42}b_4c_4 + a_{52}b_5c_5 + a_{62}b_6c_6) \\ & + c_3^2(a_{43}b_4c_4 + a_{53}b_5c_5 + a_{63}b_6c_6) + c_4^2(a_{54}b_5c_5 + a_{64}b_6c_6) \end{aligned} = \frac{1}{15},$$

$$\begin{aligned} & (a_{32}b_3 + a_{42}b_4 + a_{52}b_5 + a_{62}b_6)c_2^3 + (a_{43}b_4 + a_{53}b_5 + a_{63}b_6)c_3^3 \\ & + (a_{54}b_5 + a_{64}b_6)c_4^3 + a_{65}b_6c_5^3 \end{aligned} = \frac{1}{20},$$

$$\begin{aligned} & a_{32}(a_{43}b_4 + a_{53}b_5 + a_{63}b_6)c_2c_3 + a_{42}(a_{54}b_5 + a_{64}b_6)c_2c_4 \\ & + a_{43}a_{54}b_5c_3c_4 + a_{43}a_{64}b_6c_3c_4 + a_{52}a_{65}b_6c_2c_5 \\ & + a_{53}a_{65}b_6c_3c_5 + a_{54}a_{65}b_6c_4c_5 \end{aligned} = \frac{1}{20},$$

$$\begin{aligned} & a_{32}^2b_3c_2^2 + b_4(a_{42}c_2 + a_{43}c_3)^2 + b_5(a_{52}c_2 + a_{53}c_3 + a_{54}c_4)^2 \\ & + b_6(a_{62}c_2 + a_{63}c_3 + a_{64}c_4 + a_{65}c_5)^2 \end{aligned} = \frac{1}{20},$$

$$\begin{aligned} & (a_{42}a_{54}b_5 + a_{42}a_{64}b_6 + a_{52}a_{65}b_6 + a_{32}(a_{43}b_4 + a_{53}b_5 + a_{63}b_6))c_2^2 \\ & + (a_{43}a_{54}b_5 + a_{43}a_{64}b_6 + a_{53}a_{65}b_6)c_3^2 + a_{54}a_{65}b_6c_4^2 \end{aligned} = \frac{1}{60},$$

$$b_2c_2^4 + b_3c_3^4 + b_4c_4^4 + b_5c_5^4 + b_6c_6^4 = \frac{1}{5}.$$

3.3 Φράγματα στην τάξη

Μπορούμε να φτιάξουμε 1η, 2η, 3η, 4η τάξη με 1,2,3,4 στάδια αντίστοιχα. Δεν αρκούν όμως 5 στάδια για 5η τάξη όπως λέει ο Butcher[4].

Θεώρημα 3.2 (Butcher (1963)). [5] *Αν μια άμεση μέθοδος έχει τάξη p τότε έχει τουλάχιστον $s=p$ στάδια.*

Ο Kutta ήταν αυτός που έθεσε το ερώτημα αν μπορούμε να κατασκευάσουμε μέθοδο 5ης τάξης που να ικανοποιούνται 17 συνθήκες. Μια μέθοδος Runge-kutta με 5 στάδια έχει 15 συντελεστές (10 για τα a και 5 για τα b) άρα δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε μέθοδο 5ης τάξης με 5 στάδια γιαυτό ο Kutta κατασκεύασε μέθοδο 5ης τάξης με 6 στάδια.

Για την κατασκευή 5ης τάξης δεν αρκούν 5 στάδια αλλά χρειάζονται 6 στάδια. Για την κατασκευή 6ης τάξης απαιτούνται τουλάχιστον 7 στάδια. Από το 1901 που το αναρωτήθηκε ο Kutta αποδείχθηκε το 1963.

Θεώρημα 3.3 (Butcher (1963)). [5] *Αν μια άμεση μέθοδος s σταδίων έχει τάξη $p \geq 5$, τότε $s > p$.*

Για την κατασκευή 7ης τάξης απαιτούνται τουλάχιστον 9 στάδια, αυτό αποδείχθηκε το 1965 από τον Butcher

Θεώρημα 3.4 (Butcher (1965)). [8] *Αν μια άμεση μέθοδος s σταδίων έχει τάξη $p \geq 7$, τότε $s > p+1$.*

Ενώ το 1985 απέδειξε ότι:

Θεώρημα 3.5 (Butcher (1985)). [9] *Αν μια άμεση μέθοδος s σταδίων έχει τάξη $p \geq 8$, τότε $s > p+2$*

Χρειάστηκαν περισσότερα από 60 χρόνια να αποδειχθεί αυτό που είδε ο Kutta το 1901, και απο το 1965 χρειάστηκαν 20 χρόνια για να αποδειχθεί ότι, για τάξη από 8 και πάνω, χρειάζονται περισσότερα από 10 στάδια. Δηλαδή απέδειξε ότι δεν υπάρχει 8η τάξη με 10 στάδια. Αν και δεν

ξέρουμε τον ελάχιστο αριθμό σταδίων για μεθόδους μεγαλύτερης τάξης, γνωρίζουμε όμως ότι υπάρχει 10η τάξη με 17 στάδια που κατασκεύασε ο Hairer το 1978.

Τάξη	1	2	3	4	5	6	7	8
Στάδια	1	2	3	4	6	7	9	11

Συνοψίζοντας σύμφωνα με τον Butcher η εξέλιξη των μεθόδων Runge-Kutta είναι η εξής:[3]

Τάξη	Στάδια	Συγγραφέας	Έτος
2	2	Runge	1895
3	3	Heun	1900
4	4	Kutta	1901
5	6	Kutta	1901
5	6	Nystrom	1925
6	8	Huta	1956
6	7	Butcher	1964
7	9	Butcher	1968
8	11	Curtis	1970
8	11	Cooper-Verner	1972
10	18	Curtis	1975
10	17	Hairer	1978

3.4 Έμμεσες μέθοδοι

Θα αναφερθούμε σύντομα στις έμμεσες μεθόδους. Έμμεσες μεθόδους κατασκεύασαν πρώτοι οι J. Kuntzmann (1961) και Butcher(1963) [5, 7]. Όπως είπαμε και σε προηγούμενη παράγραφο στην περίπτωση αυτή απαιτείται η επίλυση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων. Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε μέθοδο δύο σταδίων

$$k_1 = f(x_0 + a_{11}k_1, y_0 + a_{12}k_2)$$

$$k_2 = f(x_0 + a_{21}k_1, y_0 + a_{22}k_2)$$

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1k_1 + b_2k_2)$$

για τον υπολογισμό των k_1 και k_2 απαιτείται η αριθμητική λύση του συστήματος

$$k_1 = f(x_0 + a_{11}k_1, y_0 + a_{12}k_2)$$

$$k_2 = f(x_0 + a_{21}k_1, y_0 + a_{22}k_2)$$

Η υλοποίηση των έμμεσων μεθόδων είναι δυσκολότερη από τις άμεσες, το πλεονέκτημα τους είναι ότι αντιμετωπίζουν καλύτερα τα δύσκαμπτα προβλήματα. Επιτυγχάνουν τάξη $2s$ με s στάδια για παράδειγμα παραθέτουμε την έμμεση

μέθοδο Gauss τέταρτης τάξης με δύο στάδια

0		
$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Ο Butcher στο πρώτο άρθρο του το 1963 κατασκεύασε μια έμμεση μέθοδο πέμ-
πτης τάξης με τρία στάδια.

0	0	0	0
c_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
c_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}
	b_1	b_2	b_3

$$\begin{aligned}
 c_2 &= \frac{6 - \sqrt{6}}{10}, & c_3 &= \frac{6 + \sqrt{6}}{10}, \\
 a_{21} &= \frac{9 + \sqrt{6}}{75}, & a_{22} &= \frac{24 + \sqrt{6}}{120}, & a_{23} &= \frac{168 - 73\sqrt{6}}{600} \\
 a_{31} &= \frac{9 - \sqrt{6}}{75}, & a_{32} &= \frac{168 + 73\sqrt{6}}{600}, & a_{33} &= \frac{24 - \sqrt{6}}{120} \\
 b_1 &= \frac{1}{9}, & b_2 &= \frac{16 + \sqrt{6}}{36}, & b_3 &= \frac{16 - \sqrt{6}}{36}
 \end{aligned}$$

Παράρτημα Α

Εφαρμογές Matlab

A.1 Κώδικας για επαλήθευση συνθηκών 3ης τάξης

Listing A.1: Ορισμός των πινάκων Butcher για την μέθοδο 3ης τάξης

```
1 %threeorder.m
2 clear; close all; clc;
3 A = [
4     0 0 0;
5     2/3 0 0;
6     0 2/3 0];
7 b = [1/4 3/8 3/8];
8 c = [0; 2/3; 2/3];
9 e = ones(3, 1);
10
11 % 1st order
12 disp('η1 τάξη')
13 b*e-1
14
15 % 2nd order
16 disp('η2 τάξη')
17 b*c-1/2
18
19 % 3rd order
20 disp('η3 τάξη(1 συνθήκη)')
21 b*(c.^2)-1/3
22 disp('η3 τάξη(2 συνθήκη)')
23 b*A*c-1/6
```

1η τάξη

ans =

0

2η τάξη

ans =

0

3η τάξη (1η συνθήκη)

ans =

0

3η τάξη (2η συνθήκη)

ans =

0

Εικόνα Α.1: αποτελέσματα απο των έλεγχο συνθηκών 3ης τάξης

A.2 Κώδικας για επαλήθευση συνθηκών 4ης τάξης

Listing A.2: Έλεγχος συνθηκών Butcher για τη μέθοδο RK4

```
1
2 clear; close all; clc;
3
4 % Ορισμός των πινάκων Butcher για τη μέθοδο RK4
5 A = [
6     0 0 0 0;
7     1/2 0 0 0;
8     0 1/2 0 0;
9     0 0 1 0];
10 b = [1/6 2/6 2/6 1/6];
11 c = [0; 1/2; 1/2; 1];
12 e = ones(4,1);
13
14 % Δημιουργία του διαγώνιου πίνακα C από το διάνυσμα c
15 C = diag(c);
16
17 % η1 Τάξη
18 disp('η1 Τάξη: b^T * e = 1')
19 b*e-1
20
21 % η2 Τάξη
22 disp('η2 Τάξη: b^T * C*e = 1/2')
23 b*C*e - 1/2
24
25 % η3 Τάξη
26 disp('η3 Τάξη (1 συνθήκη): b^T * C^2*e = 1/3')
27 b*(C^2)*e - 1/3
28 disp('η3 Τάξη (2 συνθήκη): b^T * A*C*e = 1/6')
29 b*A*C*e - 1/6
30
31 % η4 Τάξη
32 disp('η4 Τάξη (1 συνθήκη): b^T * C^3*e = 1/4')
33 b*(C^3)*e - 1/4
34 disp('η4 Τάξη (2 συνθήκη): b^T * C*A*C*e = 1/8')
35 b*C*A*C*e - 1/8
36 disp('η4 Τάξη (3 συνθήκη): b^T * A*C^2*e = 1/12')
37 b*A*(C^2)*e - 1/12
```

```

38 disp('4η Τάξη (4 συνθήκη): b^T * A^2*C*e = 1/24')
39 b*A*A*C*e - 1/24

```

1η Τάξη: $b^T * e = 1$

ans =

0

2η Τάξη: $b^T * C*e = 1/2$

ans =

0

3η Τάξη (1η συνθήκη): $b^T * C^2*e = 1/3$

ans =

0

3η Τάξη (2ο συνθήκη): $b^T * A*C*e = 1/6$

ans =

0

4η Τάξη (1ο συνθήκη): $b^T * C^3*e = 1/4$

ans =

-2.7756e-17

4η Τάξη (2ο συνθήκη): $b^T * C*A*C*e = 1/8$

ans =

0

4η Τάξη (3ο συνθήκη): $b^T * A * C^2 * e = 1/12$

ans =

0

4η Τάξη (4ο συνθήκη): $b^T * A^2 * C * e = 1/24$

ans =

0

Εικόνα Α.2: αποτελέσματα απο τον έλεγχο των συνθηκών 4ης τάξης

A.3 Κώδικας για επαλήθευση συνθηκών 5ης τάξης με 6 στάδια 1η μεθοδο Kutta

Listing A.3: Ορισμός των πινάκων Butcher για τη μέθοδο 6 σταδίων (Kutta,p446). Διόρθωση του Nystrom 1925

```
1 %kuttap446.m
2 clear; close all; clc;
3 A=[
4     0 0 0 0 0 0;
5     1/5 0 0 0 0 0 ;
6     0 2/5 0 0 0 0;
7     9/4 -5 15/4 0 0 0;
8     -76/100 180/100 -52/100 8/100 0 0 ;
9     -18/75 60/75 10/75 8/75 0 0];
10 b = [17/144 0 100/144 2/144 -50/144 75/144 ];
11 c = [0; 1/5; 2/5; 1; 3/5; 4/5];
12 % Διάνυσμα μονάδων
13 s = length(b);
14 e = ones(s, 1);
15
16 % Δημιουργία του διαγώνιου πίνακα C από το διάνυσμα c
17 C = diag(c);
18
19 % Υπολογισμός βοηθητικών πινάκων για τις συνθήκες
20 C2 = C*C;
21 C3 = C2*C;
22 C4 = C3*C;
23 A2 = A*A;
24 A3 = A2*A;
25
26 % η1 Τάξη
27 disp('η1 Τάξη: b^T * e = 1')
28 disp(b*e-1)
29
30 % η2 Τάξη
31 disp('η2 Τάξη: b^T * C*e = 1/2')
32 disp(b*C*e - 1/2)
33
34 % η3 Τάξη
35 disp('η3 Τάξη (1 συνθήκη): b^T * C^2*e = 1/3')
```

```

36 disp(b*C2*e - 1/3)
37 disp('η3 Τάξηηη (2 συνθήκη): b^T * A*C*e = 1/6')
38 disp(b*A*C*e - 1/6)
39
40 % η4 Τάξηηη
41 disp('η4 Τάξηηη (1 συνθήκη): b^T * C^3*e = 1/4')
42 disp(b*C3*e - 1/4)
43 disp('η4 Τάξηηη (2 συνθήκη): b^T * C*A*C*e = 1/8')
44 disp(b*C*A*C*e - 1/8)
45 disp('η4 Τάξηηη (3 συνθήκη): b^T * A*C^2*e = 1/12')
46 disp(b*A*C2*e - 1/12)
47 disp('η4 Τάξηηη (4 συνθήκη): b^T * A^2*C*e = 1/24')
48 disp(b*A2*C*e - 1/24)
49
50 % η5 Τάξηηη
51 disp('η5 Τάξηηη (1 συνθήκη): b^T * C^4*e = 1/5')
52 disp(b*C4*e - 1/5)
53 disp('η5 Τάξηηη (2 συνθήκη): b^T * C^2*A*C*e = 1/10')
54 disp(b*C2*A*C*e - 1/10)
55 disp('η5 Τάξηηη (3 συνθήκη): b^T * C*A*C^2*e = 1/15')
56 disp(b*C*A*C2*e - 1/15)
57 disp('η5 Τάξηηη (4 συνθήκη): b^T * C*A^2*C*e = 1/30')
58 disp(b*C*A2*C*e - 1/30)
59 disp('η5 Τάξηηη (5 συνθήκη): b^T * ((A*C*e) .* (A*C*e)) = 1/20')
60 disp(b * ( (A*C*e) .* (A*C*e) ) - 1/20)
61 disp('η5 Τάξηηη (6 συνθήκη): b^T * A*C^3*e = 1/20')
62 disp(b*A*C3*e - 1/20)
63 disp('η5 Τάξηηη (7 συνθήκη): b^T * A*C*A*C*e = 1/40')
64 disp(b*A*C*A*C*e - 1/40)
65 disp('η5 Τάξηηη (8 συνθήκη): b^T * A^2*C^2*e = 1/60')
66 disp(b*A2*C2*e - 1/60)
67 disp('η5 Τάξηηη (9 συνθήκη): b^T * A^3*C*e = 1/120')
68 disp(b*A3*C*e - 1/120)

```

1η Τάξη: $b^T \cdot e = 1$
0

2η Τάξη: $b^T \cdot C^*e = 1/2$
1.1102e-16

3η Τάξη (1η συνθήκη): $b^T \cdot C^2e = 1/3$
1.6653e-16

3η Τάξη (2η συνθήκη): $b^T \cdot A^*C^*e = 1/6$
-0.0181

4η Τάξη (1η συνθήκη): $b^T \cdot C^3e = 1/4$
1.1102e-16

4η Τάξη (2η συνθήκη): $b^T \cdot C^*A^*C^*e = 1/8$
-0.0108

4η Τάξη (3η συνθήκη): $b^T \cdot A^*C^2e = 1/12$
-0.0072

4η Τάξη (4η συνθήκη): $b^T \cdot A^2C^*e = 1/24$
-0.0036

5η Τάξη (1η συνθήκη): $b^T \cdot C^4e = 1/5$
1.1102e-16

5η Τάξη (2η συνθήκη): $b^T \cdot C^2A^*C^*e = 1/10$
-0.0065

5η Τάξη (3η συνθήκη): $b^T \cdot C^*A^*C^2e = 1/15$
-0.0043

5η Τάξη (4η συνθήκη): $b^T \cdot C^*A^2C^*e = 1/30$
-0.0022

5η Τάξη (5η συνθήκη): $b^T * ((A^T C^T e) .* (A^T C^T e)) = 1/20$
-0.0074

5η Τάξη (6η συνθήκη): $b^T * A^T C^3 e = 1/20$
-0.0029

5η Τάξη (7η συνθήκη): $b^T * A^T C^T A^T C^T e = 1/40$
-0.0014

5η Τάξη (8η συνθήκη): $b^T * A^2 C^2 e = 1/60$
-7.2222e-04

5η Τάξη (9η συνθήκη): $b^T * A^3 C^T e = 1/120$
5.2042e-18

Εικόνα Α.3: αποτελέσματα απο των έλεγχο συνθηκών 5ης τάξης,μέθοδο 1η του Kutta

A.4 Κώδικας για επαλήθευση συνθηκών 5ης τάξης με 6 στάδια-Διόρθωση του Nystrom για την 1η μεθοδο Kutta

Listing A.4: Ορισμός των πινάκων Butcher για τη μέθοδο 6 σταδίων (Kutta,p446). Διόρθωση του Nystrom 1925

```
1 %kuttap446_N.m
2 clear; close all; clc;
3 A=[
4     0 0 0 0 0 0;
5     1/5 0 0 0 0 0 ;
6     0 2/5 0 0 0 0;
7     9/4 -5 15/4 0 0 0;
8     -63/100 180/100 -65/100 8/100 0 0 ;
9     -18/75 60/75 10/75 8/75 0 0];
10 b = [17/144 0 100/144 2/144 -50/144 75/144 ];
11 c = [0; 1/5; 2/5; 1; 3/5; 4/5];
12 % Διάνυσμα μονάδων
13 s = length(b);
14 e = ones(s, 1);
15
16 % Δημιουργία του διαγώνιου πίνακα C από το διάνυσμα c
17 C = diag(c);
18
19 % Υπολογισμός βοηθητικών πινάκων για τις συνθήκες
20 C2 = C*C;
21 C3 = C2*C;
22 C4 = C3*C;
23 A2 = A*A;
24 A3 = A2*A;
25
26 % η1 Τάξη
27 disp('η1 Τάξη: b^T * e = 1')
28 disp(b*e-1)
29
30 % η2 Τάξη
31 disp('η2 Τάξη: b^T * C*e = 1/2')
32 disp(b*C*e - 1/2)
33
34 % η3 Τάξη
35 disp('η3 Τάξη (1 συνθήκη): b^T * C^2*e = 1/3')
```

```

36 disp(b*C2*e - 1/3)
37 disp('η3 Τάξηηη (2 συνθήκη): b^T * A*C*e = 1/6')
38 disp(b*A*C*e - 1/6)
39
40 % η4 Τάξηηη
41 disp('η4 Τάξηηη (1 συνθήκη): b^T * C^3*e = 1/4')
42 disp(b*C3*e - 1/4)
43 disp('η4 Τάξηηη (2 συνθήκη): b^T * C*A*C*e = 1/8')
44 disp(b*C*A*C*e - 1/8)
45 disp('η4 Τάξηηη (3 συνθήκη): b^T * A*C^2*e = 1/12')
46 disp(b*A*C2*e - 1/12)
47 disp('η4 Τάξηηη (4 συνθήκη): b^T * A^2*C*e = 1/24')
48 disp(b*A2*C*e - 1/24)
49
50 % η5 Τάξηηη
51 disp('η5 Τάξηηη (1 συνθήκη): b^T * C^4*e = 1/5')
52 disp(b*C4*e - 1/5)
53 disp('η5 Τάξηηη (2 συνθήκη): b^T * C^2*A*C*e = 1/10')
54 disp(b*C2*A*C*e - 1/10)
55 disp('η5 Τάξηηη (3 συνθήκη): b^T * C*A*C^2*e = 1/15')
56 disp(b*C*A*C2*e - 1/15)
57 disp('η5 Τάξηηη (4 συνθήκη): b^T * C*A^2*C*e = 1/30')
58 disp(b*C*A2*C*e - 1/30)
59 disp('η5 Τάξηηη (5 συνθήκη): b^T * ((A*C*e) .* (A*C*e)) = 1/20')
60 disp(b * ( (A*C*e) .* (A*C*e) ) - 1/20)
61 disp('η5 Τάξηηη (6 συνθήκη): b^T * A*C^3*e = 1/20')
62 disp(b*A*C3*e - 1/20)
63 disp('η5 Τάξηηη (7 συνθήκη): b^T * A*C*A*C*e = 1/40')
64 disp(b*A*C*A*C*e - 1/40)
65 disp('η5 Τάξηηη (8 συνθήκη): b^T * A^2*C^2*e = 1/60')
66 disp(b*A2*C2*e - 1/60)
67 disp('η5 Τάξηηη (9 συνθήκη): b^T * A^3*C*e = 1/120')
68 disp(b*A3*C*e - 1/120)

```

1η Τάξηη: $b^{\wedge T} * e = 1$ 0	
2η Τάξηη: $b^{\wedge T} * C^*e = 1/2$ 1.1102e-16	
3η Τάξηη (1η ζπλζεήκη): $b^{\wedge T} * C^{\wedge 2}e = 1/3$ 1.6653e-16	
3η Τάξηη (2η ζπλζεήκη): $b^{\wedge T} * A^*C^*e = 1/6$ 5.5511e-17	
4η Τάξηη (1η ζπλζεήκη): $b^{\wedge T} * C^{\wedge 3}e = 1/4$ 1.1102e-16	
4η Τάξηη (2η ζπλζεήκη): $b^{\wedge T} * C^*A^*C^*e = 1/8$ 2.7756e-17	
4η Τάξηη (3η ζπλζεήκη): $b^{\wedge T} * A^*C^{\wedge 2}e = 1/12$ 2.7756e-17	
4η Τάξηη (4η ζπλζεήκη): $b^{\wedge T} * A^{\wedge 2}C^*e = 1/24$ 6.9389e-18	
5η Τάξηη (1η ζπλζεήκη): $b^{\wedge T} * C^{\wedge 4}e = 1/5$ 1.1102e-16	
5η Τάξηη (2η ζπλζεήκη): $b^{\wedge T} * C^{\wedge 2}A^*C^*e = 1/10$ 2.7756e-17	
5η Τάξηη (3η ζπλζεήκη): $b^{\wedge T} * C^*A^*C^{\wedge 2}e = 1/15$ 1.3878e-17	
5η Τάξηη (4η ζπλζεήκη): $b^{\wedge T} * C^*A^{\wedge 2}C^*e = 1/30$ 6.9389e-18	

5η Τάξη (5η συνθήκη): $b^T * ((A^T C^T e) .* (A^T C^T e)) = 1/20$
2.7756e-17

5η Τάξη (6η συνθήκη): $b^T * A^T C^3 e = 1/20$
1.3878e-17

5η Τάξη (7η συνθήκη): $b^T * A^T C^4 A^T C^T e = 1/40$
3.4694e-18

5η Τάξη (8η συνθήκη): $b^T * A^T 2^T C^4 2^T e = 1/60$
6.9389e-18

5η Τάξη (9η συνθήκη): $b^T * A^T 3^T C^T e = 1/120$
5.2042e-18

Εικόνα Α.4: αποτελέσματα απο των έλεγχο συνθηκων 5ης τάξης,διορθωση Nystrom μέθοδο 1η του Kutta

A.5 Κώδικας για επαλήθευση συνθηκών 5ης τάξης με 6 στάδια- 2η μεθοδο Kutta

Listing A.5: Ορισμός των πινάκων Butcher για τη μέθοδο 6 σταδίων (Kutta,p447). Διόρθωση του Nystrom 1925

```
1 %kuttap447.m
2 % Ορισμός των πινάκων Butcher για τη μέθοδο 6 σταδίων_ Kutta p446
   ptixiaki page47
3 % Διόρθωση του Nystrom 1925
4 clear; close all; clc;
5
6 A = [ 0      0      0      0      0 0 ;
7       1/3    0      0      0      0 0;
8       4/25   6/25    0      0      0 0;
9       1/4    -3      15/4    0      0 0;
10      6/81   90/81  -50/81  8/81  0 0;
11      7/30   18/30  -5/30   4/30  0 0 ];
12 b = [48/192  0   125/192  0 -81/192 100/192];
13 c = [0; 1/3; 2/5; 1; 2/3; 4/5];
14 % Διάνυσμα μονάδων
15 s = length(b);
16 e = ones(s, 1);
17
18 % Δημιουργία του διαγώνιου πίνακα C από το διάνυσμα c
19 C = diag(c);
20
21 % Υπολογισμός βοηθητικών πινάκων για τις συνθήκες
22 C2 = C*C;
23 C3 = C2*C;
24 C4 = C3*C;
25 A2 = A*A;
26 A3 = A2*A;
27
28 % η1 Τάξη
29 disp('η1 Τάξη: b^T * e = 1')
30 disp(b*e-1)
31
32 % η2 Τάξη
33 disp('η2 Τάξη: b^T * C*e = 1/2')
34 disp(b*C*e - 1/2)
```

```

35
36 % η3 Τάξη
37 disp('η3 Τάξη (1 συνθήκη): b^T * C^2*e = 1/3')
38 disp(b*C2*e - 1/3)
39 disp('η3 Τάξη (2 συνθήκη): b^T * A*C*e = 1/6')
40 disp(b*A*C*e - 1/6)
41
42 % η4 Τάξη
43 disp('η4 Τάξη (1 συνθήκη): b^T * C^3*e = 1/4')
44 disp(b*C3*e - 1/4)
45 disp('η4 Τάξη (2 συνθήκη): b^T * C*A*C*e = 1/8')
46 disp(b*C*A*C*e - 1/8)
47 disp('η4 Τάξη (3 συνθήκη): b^T * A*C^2*e = 1/12')
48 disp(b*A*C2*e - 1/12)
49 disp('η4 Τάξη (4 συνθήκη): b^T * A^2*C*e = 1/24')
50 disp(b*A2*C*e - 1/24)
51
52 % η5 Τάξη
53 disp('η5 Τάξη (1 συνθήκη): b^T * C^4*e = 1/5')
54 disp(b*C4*e - 1/5)
55 disp('η5 Τάξη (2 συνθήκη): b^T * C^2*A*C*e = 1/10')
56 disp(b*C2*A*C*e - 1/10)
57 disp('η5 Τάξη (3 συνθήκη): b^T * C*A*C^2*e = 1/15')
58 disp(b*C*A*C2*e - 1/15)
59 disp('η5 Τάξη (4 συνθήκη): b^T * C*A^2*C*e = 1/30')
60 disp(b*C*A2*C*e - 1/30)
61 disp('η5 Τάξη (5 συνθήκη): b^T * ((A*C*e) .* (A*C*e)) = 1/20')
62 disp(b * ( (A*C*e) .* (A*C*e) ) - 1/20)
63 disp('η5 Τάξη (6 συνθήκη): b^T * A*C^3*e = 1/20')
64 disp(b*A*C3*e - 1/20)
65 disp('η5 Τάξη (7 συνθήκη): b^T * A*C*A*C*e = 1/40')
66 disp(b*A*C*A*C*e - 1/40)
67 disp('η5 Τάξη (8 συνθήκη): b^T * A^2*C^2*e = 1/60')
68 disp(b*A2*C2*e - 1/60)
69 disp('η5 Τάξη (9 συνθήκη): b^T * A^3*C*e = 1/120')
70 disp(b*A3*C*e - 1/120)

```

1η Τάξη: $b^T \cdot e = 1$
 0

2η Τάξη: $b^T \cdot C^*e = 1/2$
 -0.1042

3η Τάξη (1η συνθήκη): $b^T \cdot C^2e = 1/3$
 -0.0833

3η Τάξη (2η συνθήκη): $b^T \cdot A^*C^*e = 1/6$
 -0.0694

4η Τάξη (1η συνθήκη): $b^T \cdot C^3e = 1/4$
 -0.0667

4η Τάξη (2η συνθήκη): $b^T \cdot C^*A^*C^*e = 1/8$
 -0.0556

4η Τάξη (3η συνθήκη): $b^T \cdot A^*C^2e = 1/12$
 -0.0270

4η Τάξη (4η συνθήκη): $b^T \cdot A^2C^*e = 1/24$
 -0.0139

5η Τάξη (1η συνθήκη): $b^T \cdot C^4 \cdot e = 1/5$
 -0.0533

5η Τάξη (2η συνθήκη): $b^T \cdot C^2 \cdot A \cdot C \cdot e = 1/10$
 -0.0444

5η Τάξη (3η συνθήκη): $b^T \cdot C \cdot A \cdot C^2 \cdot e = 1/15$
 -0.0222

5η Τάξη (4η συνθήκη): $b^T \cdot C \cdot A^2 \cdot C \cdot e = 1/30$
 -0.0111

5η Τάξη (5η συνθήκη): $b^T \cdot ((A \cdot C \cdot e) \cdot (A \cdot C \cdot e)) = 1/20$
 -0.0296

5η Τάξη (6η συνθήκη): $b^T \cdot A \cdot C^3 \cdot e = 1/20$
 -0.0111

5η Τάξη (7η συνθήκη): $b^T \cdot A \cdot C \cdot A \cdot C \cdot e = 1/40$
 -0.0056

5η Τάξη (8η συνθήκη): $b^T \cdot A^2 \cdot C^2 \cdot e = 1/60$
 -0.0046

5η Τάξη (9η συνθήκη): $b^T \cdot A^3 \cdot C \cdot e = 1/120$
 0

Εικόνα Α.5: αποτελέσματα απο των έλεγχο συνθηκων 5ης τάξης,μέθοδο 2η του Kutta

A.6 Κώδικας για επαλήθευση συνθηκών 5ης τάξης με 6 στάδια-Διόρθωση του Nystrom για την 2η μεθοδο Kutta

Listing A.6: Ορισμός των πινάκων Butcher για τη μέθοδο 6 σταδίων (Kutta,p446 ptixiaki page47). Διόρθωση του Nystrom 1925

```
1 %kuttap_447_N.m
2 clear; close all; clc;
3
4 A =[ 0      0      0      0      0 0 ;
5      1/3    0      0      0      0 0;
6      4/25   6/25    0      0      0 0;
7      1/4    -3      15/4   0      0 0;
8      6/81   90/81  -50/81  8/81  0 0;
9      2/25   12/25   2/15   8/75  0 0 ];
10 b = [23/192  0   125/192  0 -27/64 125/192];
11 c = [0; 1/3; 2/5; 1; 2/3; 4/5];
12 % Διάνυσμα μονάδων
13 s = length(b);
14 e = ones(s, 1);
15
16 % Δημιουργία του διαγώνιου πίνακα C από το διάνυσμα c
17 C = diag(c);
18
19 % Υπολογισμός βοηθητικών πινάκων για τις συνθήκες
20 C2 = C*C;
21 C3 = C2*C;
22 C4 = C3*C;
23 A2 = A*A;
24 A3 = A2*A;
25
26 % η1 Τάξη
27 disp('η1 Τάξη: b^T * e = 1')
28 disp(b*e-1)
29
30 % η2 Τάξη
31 disp('η2 Τάξη: b^T * C*e = 1/2')
32 disp(b*C*e - 1/2)
33
34 % η3 Τάξη
35 disp('η3 Τάξη (1 συνθήκη): b^T * C^2*e = 1/3')
```

```

36 disp(b*C2*e - 1/3)
37 disp('η3 Τάξηηη (2 συνθήκη): b^T * A*C*e = 1/6')
38 disp(b*A*C*e - 1/6)
39
40 % η4 Τάξηηη
41 disp('η4 Τάξηηη (1 συνθήκη): b^T * C^3*e = 1/4')
42 disp(b*C3*e - 1/4)
43 disp('η4 Τάξηηη (2 συνθήκη): b^T * C*A*C*e = 1/8')
44 disp(b*C*A*C*e - 1/8)
45 disp('η4 Τάξηηη (3 συνθήκη): b^T * A*C^2*e = 1/12')
46 disp(b*A*C2*e - 1/12)
47 disp('η4 Τάξηηη (4 συνθήκη): b^T * A^2*C*e = 1/24')
48 disp(b*A2*C*e - 1/24)
49
50 % η5 Τάξηηη
51 disp('η5 Τάξηηη (1 συνθήκη): b^T * C^4*e = 1/5')
52 disp(b*C4*e - 1/5)
53 disp('η5 Τάξηηη (2 συνθήκη): b^T * C^2*A*C*e = 1/10')
54 disp(b*C2*A*C*e - 1/10)
55 disp('η5 Τάξηηη (3 συνθήκη): b^T * C*A*C^2*e = 1/15')
56 disp(b*C*A*C2*e - 1/15)
57 disp('η5 Τάξηηη (4 συνθήκη): b^T * C*A^2*C*e = 1/30')
58 disp(b*C*A2*C*e - 1/30)
59 disp('η5 Τάξηηη (5 συνθήκη): b^T * ((A*C*e) .* (A*C*e)) = 1/20')
60 disp(b * ( (A*C*e) .* (A*C*e) ) - 1/20)
61 disp('η5 Τάξηηη (6 συνθήκη): b^T * A*C^3*e = 1/20')
62 disp(b*A*C3*e - 1/20)
63 disp('η5 Τάξηηη (7 συνθήκη): b^T * A*C*A*C*e = 1/40')
64 disp(b*A*C*A*C*e - 1/40)
65 disp('η5 Τάξηηη (8 συνθήκη): b^T * A^2*C^2*e = 1/60')
66 disp(b*A2*C2*e - 1/60)
67 disp('η5 Τάξηηη (9 συνθήκη): b^T * A^3*C*e = 1/120')
68 disp(b*A3*C*e - 1/120)

```

1η Τάξη: $b^{\wedge T} * e = 1$ -1.1102e-16
2η Τάξη: $b^{\wedge T} * C * e = 1/2$ 0
3η Τάξη (1η συνθήκη): $b^{\wedge T} * C^2 * e = 1/3$ 1.1102e-16
3η Τάξη (2η συνθήκη): $b^{\wedge T} * A * C * e = 1/6$ 0
4η Τάξη (1η συνθήκη): $b^{\wedge T} * C^3 * e = 1/4$ 5.5511e-17
4η Τάξη (2η συνθήκη): $b^{\wedge T} * C * A * C * e = 1/8$ 0
4η Τάξη (3η συνθήκη): $b^{\wedge T} * A * C^2 * e = 1/12$ 0
4η Τάξη (4η συνθήκη): $b^{\wedge T} * A^2 * C * e = 1/24$ 1.3878e-17
5η Τάξη (1η συνθήκη): $b^{\wedge T} * C^4 * e = 1/5$ 5.5511e-17
5η Τάξη (2η συνθήκη): $b^{\wedge T} * C^2 * A * C * e = 1/10$ 1.3878e-17
5η Τάξη (3η συνθήκη): $b^{\wedge T} * C * A * C^2 * e = 1/15$ 1.3878e-17
5η Τάξη (4η συνθήκη): $b^{\wedge T} * C * A^2 * C * e = 1/30$ 1.3878e-17

5η Τάξη (5η συνθήκη): $b^T * ((A^T C^T e) .* (A^T C^T e)) = 1/20$
0

5η Τάξη (6η συνθήκη): $b^T * A^T C^3 e = 1/20$
6.9389e-18

5η Τάξη (7η συνθήκη): $b^T * A^T C^4 A^T C^T e = 1/40$
6.9389e-18

5η Τάξη (8η συνθήκη): $b^T * A^T C^2 C^T C^T e = 1/60$
6.9389e-18

5η Τάξη (9η συνθήκη): $b^T * A^T C^3 C^T e = 1/120$
0

Εικόνα Α.6: αποτελέσματα απο των έλεγχο συνθηκών 5ης τάξης, διορθωση Nystrom μέθοδο 2η του Kutta

Βιβλιογραφία

- [1] Atkinson, K. E. *An Introduction to Numerical Analysis*, 2nd ed.; John Wiley & Sons: New York, NY, USA, 1989.
- [2] Bashforth, F.; Adams, J. C. *An Attempt to Test the Theories of Capillary Action by Comparing the Theoretical and Measured Forms of Drops of Fluid, with an Explanation of the Method of Integration Employed in Constructing the Tables which Give the Theoretical Forms of such Drops*; Cambridge University Press: Cambridge, 1883.
- [3] Butcher, J. C. A history of Runge–Kutta methods. *Applied Numerical Mathematics* **1996**, *20*, 247–260.
- [4] Butcher, J. C. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, 3rd ed.; John Wiley & Sons, 2016.
- [5] Butcher, J. C. Coefficients for the study of Runge-Kutta integration processes. *Journal Australian Mathematical Society* **1963**, *3*, 185-201.
- [6] Butcher, J. C. On Runge-Kutta methods of high order. *Journal Australian Mathematical Society* **1964**, *4*, 179-194.
- [7] Butcher, J. C. Implicit Runge-Kutta processes. *Mathematics of Computation* **1964**, *4*, 50-64.
- [8] Butcher, J. C. On the attainable order of Runge-Kutta methods. *Mathematics of Computation* **1965**, *19*, 408-417.
- [9] Butcher, J. C. The non-existence of ten stage eighth order explicit Runge-Kutta methods. *BIT* **1985**, *25*, 521-540.

- [10] Darwin, G. H. Periodic orbits. *Acta Mathematica* **1897**, 21.
- [11] Gear, C. W.; Skeel, R. D. The development of ODE methods: A symbiosis between hardware and numerical analysis. *Communications of the ACM* **1987**. Ανάκτηση από: <https://dl.acm.org/doi/10.1145/41579.41590>
- [12] Kutta, W. Beitrag zur näherungsweise Integration totaler Differentialgleichungen. *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **1901**, 46, 435–453.
- [13] Moulton, F. R. *New Methods in Exterior Ballistics*; University of Chicago Press: Chicago, USA, 1926.
- [14] Newton, I. *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*; Motte, A., Trans.; Benjamin Motte: London, UK, 1729.
- [15] O'Connor, J. J.; Robertson, E. F. Wilhelm Kutta (1867–1944). *MacTutor History of Mathematics Archive*, University of St Andrews. Ανάκτηση από: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kutta/>
- [16] Runge, C. D. T. Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen. *Mathematische Annalen* **1895**, 46, 167–178. doi:10.1007/BF01446807.
- [17] Wikipedia. Ἡρών. Ανάκτηση 6 Σεπτεμβρίου 2025, από <https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%89%CF%81%CF%89%CE%BD>, 29 Δεκεμβρίου 2024.
- [18] Βραχάτης, Μ. *Αριθμητική Ανάλυση*; Κλειδάριθμος: Αθήνα, Ελλάδα, 2011.
- [19] Βραχάτης, Μ. *Αριθμητική Ανάλυση: Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*; Κλειδάριθμος: Αθήνα, Ελλάδα, 2012.

- [20] Καλογηράτου, Ζ.; Μονοβασίλης, Θ. *Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων*; ΚΑΛΛΙΠΙΟΣ, Ανοιχτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις: Αθήνα, Ελλάδα, 2024.
- [21] Παπαγεωργίου, Γ. *Σύντομες Σημειώσεις στην Αριθμητική Ανάλυση των Διαφορικών Εξισώσεων*; 2001–2002. Ανάκτηση 9 Ιουλίου 2025 από: http://users.ntua.gr/papag/na2_ode.pdf
- [22] Παπαδρακάκης, Ε. Ο ευπατρίδης επιστήμων της διασποράς. *ΤΟ ΒΗΜΑ*, 24 Νοεμβρίου 2008. Ανάκτηση 7 Σεπτεμβρίου 2025, από <https://www.tovima.gr/2008/11/24/opinions/o-eypatridis-epistimwn-tis-diasporas/>