

1 Συμβολισμοί

Θεωρούμε ότι όλες οι συναρτήσεις που εμφανίζονται παρακάτω λαμβάνουν πραγματικές τιμές.

2 Η εξίσωση μεταφοράς με σταθερούς συντελεστές

2.1 ΤΟ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Θεωρούμε την ομογενή εξίσωση μεταφοράς με σταθερούς συντελεστές

$$u_t + bu_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad (1)$$

όπου $b \in \mathbb{R}$ είναι μια σταθερή και $u = u(x, t) \in C^1(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ είναι η άγνωστη συνάρτηση. Επειδή $\nabla u = (u_x, u_t)$, η εξίσωση (1) έρχεται στη μορφή

$$(b, 1) \cdot \nabla u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty),$$

που σημαίνει ότι στην κατεύθυνση του διανύσματος $(b, 1)$, η παράγωγος της u είναι μηδέν, δηλαδή ότι στην κατεύθυνση του διανύσματος $(b, 1)$, η u παραμένει σταθερή. Στη μαθηματική γλώσσα

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad u(x + sb, t + s) = u(x, t) \quad \forall s > -t. \quad (2)$$

Παρατηρούμε ότι αν επιπλέον $u \in C(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, τότε παίρνοντας το όριο $s \rightarrow -t^+$ προκύπτει

$$u(x, t) = u(x - tb, 0) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty).$$

Επομένως, αν $g \in C^1(\mathbb{R})$ τότε

(i) η $u(x, t) := g(x - tb)$ είναι μια $C^1(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ λύση της εξ. (1),

(ii) η $u(x, t) = g(x - tb)$ είναι μια $C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ λύση του π.α.τ.

$$\begin{cases} u_t + bu_x = 0 & \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = g(x) & \text{στο } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3)$$

(iii) Αν $u \in C^1(\mathbb{R} \times (0, \infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ είναι λύση του π.α.τ. (3), τότε $u(x, t) = g(x - tb)$.

2.2 ΤΟ ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Έστω $f \in C(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ και $g \in C^1(\mathbb{R})$. Θεωρούμε το *μη ομογενές* πρόβλημα αρχικών τιμών για την εξίσωση μεταφοράς με σταθερούς συντελεστές

$$\begin{cases} u_t + bu_x = f & \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = g(x) & \text{στο } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4)$$

Στην προηγούμενη παράγραφο (βλ. (2)) εξηγήσαμε ότι αν u είναι λύση της (1), τότε για τη συνάρτηση με τύπο $z(s) := u(x + sb, t + s)$, $s > -t$, ισχύει

$$z'(s) = 0 \quad \forall s > -t.$$

Αυτό φαίνεται και με απ' ευθείας υπολογισμό. Πράγματι, από τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε

$$\begin{aligned} z'(s) &= u_x(x + sb, t + s) \frac{\partial(x + sb)}{\partial s} + u_t(x + sb, t + s) \frac{\partial(t + s)}{\partial t} \\ &= bu_x(x + sb, t + s) + u_t(x + sb, t + s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Απ' αυτό φαίνεται ότι αν $u \in C^1(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ λύνει την πρώτη εξίσωση του π.α.τ. (4), τότε πρέπει

$$z'(s) = f(x + sb, t + s) \quad \forall s > -t.$$

Αν επιπλέον $f \in C(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ και η $u \in C^1(\mathbb{R} \times (0, \infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ είναι λύση του π.α.τ., τότε ολοκληρώνουμε στο $[-t, 0]$ για να πάρουμε

$$\begin{aligned} z(0) - z(-t) &= \int_{-t}^0 f(x + sb, t + s) \, ds \Rightarrow \\ u(x, t) &= u(x - tb, 0) + \int_0^t f(x + (r - t)b, r) \, dr. \end{aligned} \quad (5)$$

Άρα η λύση του π.α.τ. (4) δίνεται τελικά από τον τύπο

$$u(x, t) = g(x - tb) + \int_0^t f(x + (r - t)b, r) \, dr, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty).$$

2.3 ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΕΣ ΧΩΡΙΚΕΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο της προηγούμενης παραγράφου, δείχνουμε ότι αν $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ είναι λύση του π.α.τ.

$$\begin{cases} u_t + \vec{b} \cdot \nabla_{\vec{x}} u = 0 & \text{στο } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(\vec{x}, 0) = g(\vec{x}) & \text{στο } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (6)$$

τότε $u(\vec{x}, t) = g(\vec{x} - t\vec{b})$. Αντιστοίχως, η συνάρτηση

$$u(\vec{x}, t) = g(\vec{x} - t\vec{b}) + \int_0^t f(\vec{x} + (r - t)\vec{b}, r) \, dr, \quad (\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty),$$

είναι μια $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ λύση του π.α.τ.

$$\begin{cases} u_t + \vec{b} \cdot \nabla_{\vec{x}} u = f & \text{στο } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(\vec{x}, 0) = g(\vec{x}) & \text{στο } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

2.4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΤΗ ΜΙΑ ΧΩΡΙΚΗ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

Είναι εύκολο να δούμε ότι αν $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ είναι λύση της κυματικής εξίσωσης

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad (7)$$

τότε η συνάρτηση $v = v(x, t) \in C^1(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ με τύπο $v = u_t - u_x$, ικανοποιεί την εξίσωση

$$v_t + v_x = 0 \quad \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

Αν $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, τότε $v \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ και από την § 1.1 παίρνουμε $v(x, t) = v(x - t, 0)$ για κάθε $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$. Δηλαδή,

$$u_t(x, t) - u_x(x, t) = u_t(x - t, 0) - u_x(x - t, 0).$$

Θεωρώντας τώρα ως $f(x, t)$ το δεξί μέλος της τελευταίας εξίσωσης, από την (5) παίρνουμε αμέσως ότι

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(x + t, 0) + \int_0^t u_t(x + t - 2r, 0) \, dr - \int_0^t u_x(x + t - 2r, 0) \, dr \\ &= u(x + t, 0) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_t(y, 0) \, dy + \frac{1}{2} (u(x - t, 0) - u(x + t, 0)). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (u(x + t, 0) + u(x - t, 0)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_t(y, 0) \, dy.$$

Με άλλα λόγια, αν $g \in C^2(\mathbb{R})$ και $h \in C^1(\mathbb{R})$, τότε η συνάρτηση με τύπο

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (g(x + t) + g(x - t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) \, dy, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty), \quad (8)$$

είναι μια $C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ λύση του π.α.τ.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u_t(x, 0) = h(x), \, u(x, 0) = g(x) & \text{στο } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Η λύση (8) ονομάζεται λύση d' Alembert. Παρατηρήστε ότι δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο επιχείρημα για να λύσουμε την κυματική εξίσωση σε παραπάνω χωρικές διαστάσεις: αν $u = u(x, y, t)$ είναι λύση της $u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0$, τότε η $v = u_t - u_x - u_y$ δεν είναι κατ' ανάγκη λύση της $v_t + v_x + v_y = 0$.

2.5 ΤΟ Π.Α./Σ.Τ. ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΤΗ ΜΙΑ ΧΩΡΙΚΗ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

Αν H είναι μια αρχική της $h \in C^1(\mathbb{R})$, από την λύση (8) παίρνουμε αμέσως ότι

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(g(x+t) + H(x+t) + g(x-t) - H(x-t)), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty).$$

Αυτό μας λέει ότι η λύση d'Alembert είναι της μορφής

$$u(x, t) = F(x+t) + G(x-t), \quad (9)$$

για κατάλληλες $F, G \in C^2(\mathbb{R})$. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την παρατήρηση για να λύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών (π.α./σ.τ.)

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{στο } (0, \infty) \times (0, \infty) \\ u_t(x, 0) = h(x), \quad u(x, 0) = g(x) & \text{στο } (0, \infty) \\ u(0, t) = 0 & \text{στο } (0, \infty). \end{cases} \quad (10)$$

Αν μια u της μορφής (9) ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες, τότε πρέπει

$$\begin{aligned} \begin{cases} F'(x) - G'(x) = h(x) & \text{στο } (0, \infty) \\ F(x) + G(x) = g(x) & \text{στο } (0, \infty) \end{cases} & \Rightarrow \\ \begin{cases} F(x) - G(x) = \int_0^x h(s) \, ds & \text{στο } [0, \infty) \\ F(x) + G(x) = g(x) & \text{στο } [0, \infty) \end{cases} & \Rightarrow \\ \begin{cases} F(x) = \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2} \int_0^x h(s) \, ds, & x \in [0, \infty) \\ G(x) = \frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{2} \int_0^x h(s) \, ds, & x \in [0, \infty). \end{cases} \end{aligned}$$

Επομένως, όταν $x \geq t \geq 0$, τότε $u(x, t) = F(x+t) + G(x-t)$ με F, G ως άνω. Για να ορίσουμε την u όταν $0 \leq x < t$, θα χρησιμοποιήσουμε την συνοριακή συνθήκη, δηλαδή ότι

$$F(t) + G(-t) = 0, \quad t \in (0, \infty).$$

Η συνθήκη μας λέει να αντικαταστήσουμε την $G(x-t)$ με $-F(t-x)$ στην περίπτωση αυτή. Επομένως η λύση του π.α./σ.τ. είναι

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \begin{cases} g(x+t) + g(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} h(s) \, ds & \text{αν } x \geq t \geq 0, \\ g(t+x) - g(t-x) + \int_{t-x}^{t+x} h(s) \, ds & \text{αν } 0 \leq x < t. \end{cases}$$

Η υποθέσεις ότι $g \in C^2(\mathbb{R})$ και $h \in C^1(\mathbb{R})$, δεν είναι αρκετές για να μας εγγυηθούν ότι η λύση που βρήκαμε είναι $C^2((0, \infty) \times (0, \infty))$. Αν όμως $g''(0) = 0$ τότε η παραπάνω λύση είναι $C^2((0, \infty) \times (0, \infty))$ (γιατί;).

3 Εξισώσεις πρώτης τάξης

3.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό και μια συνάρτηση $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχώς διαφορίσιμη ως προς κάθε μεταβλητή. Γράφουμε

$$F = F(\vec{p}, z, \vec{x}) = F(p_1, \dots, p_n, z, x_1, \dots, x_n),$$

όπου $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$ και $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in U$. Γράφουμε επίσης

$$\begin{cases} \nabla_{\vec{p}} F = (F_{p_1}, \dots, F_{p_n}) \\ \nabla_z F = F_z \\ \nabla_{\vec{x}} F = (F_{x_1}, \dots, F_{x_n}). \end{cases}$$

Αποδεικνύουμε στο μάθημα το εξής

Θεώρημα 3.1. Έστω $u = u(\vec{x}) \in C^2(U)$ είναι λύση του

$$F(\nabla u, u, \vec{x}) = 0 \quad \text{στο } U.$$

Υποθέτουμε ότι η $\vec{x}(s) = (x_1(s), \dots, x_n(s))$, $s \in I \subseteq \mathbb{R}$, ρύνει το ακόλουθο σύστημα σ.δ.ε. (σύστημα χαρακτηριστικών καμπυλών)

$$\frac{d}{ds}(\vec{x}(s)) = \nabla_{\vec{p}} F(\vec{p}(s), z(s), \vec{x}(s)) \quad \text{για κάθε } s \in I \text{ με } \vec{x}(s) \in U, \quad (11)$$

όπου $\vec{p}(s) = \nabla u(\vec{x}(s))$ και $z(s) = u(\vec{x}(s))$. Τότε για όλα αυτά τα s , έχουμε ότι η $\vec{p}(s)$ ρύνει το σύστημα σ.δ.ε.

$$\frac{d}{ds}(\vec{p}(s)) = -\nabla_{\vec{x}} F(\vec{p}(s), z(s), \vec{x}(s)) - \nabla_z F(\vec{p}(s), z(s), \vec{x}(s))\vec{p}(s), \quad (12)$$

και η $z(s)$ ρύνει τη σ.δ.ε.

$$\frac{d}{ds}(z(s)) = \nabla_{\vec{p}} F(\vec{p}(s), z(s), \vec{x}(s)) \cdot \vec{p}(s). \quad (13)$$

3.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 3.2. Να βρείτε τη λύση του π.α.τ.

$$\begin{cases} u_{x_1} + u_{x_2} = 3u + x_2 & \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x_1, 0) = x_1^2 & \text{στο } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Λύση. Είναι $F(p_1, p_2, z, x_1, x_2) = p_1 + p_2 - 3z - x_2$. Υπολογίζουμε: $\nabla_{\vec{p}} F = (1, 1)$, επομένως το σύστημα (11) είναι το

$$\begin{cases} x_1'(s) = 1 \\ x_2'(s) = 1, \end{cases}$$

από το οποίο παίρνουμε¹

$$\left. \begin{array}{l} x_1(s) = s + \alpha \\ x_2(s) = s \end{array} \right\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, s \in [0, \infty). \quad (14)$$

Η εξίσωση (13) είναι η $z'(s) = (1, 1) \cdot (p_1(s), p_2(s)) = p_1(s) + p_2(s)$. Όμως $F(p_1(s), p_2(s), z(s), x_1(s), x_2(s)) = 0 \Rightarrow p_1(s) + p_2(s) = 3z(s) + x_2(s)$, και η (13) γίνεται

$$z'(s) = 3z(s) + s,$$

η οποία έχει λύση

$$z(s) = \left(z(0) + \frac{1}{9}\right)e^{3s} - \frac{1}{3}\left(s + \frac{1}{3}\right).$$

Αλλά, $z(0) = u(x_1(0), x_2(0)) = u(\alpha, 0) = \alpha^2$, από τη συνθήκη του π.α.τ., άρα,

$$u(x_1(s), x_2(s)) = \left(\alpha^2 + \frac{1}{9}\right)e^{3s} - \frac{1}{3}\left(s + \frac{1}{3}\right), \quad s \in [0, \infty), \alpha \in \mathbb{R}.$$

Από την (14) έχουμε $s = x_2$ και $\alpha = x_1 - x_2$, επομένως η λύση δίνεται από τον τύπο

$$u(x_1, x_2) = \left((x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{9}\right)e^{3x_2} - \frac{1}{3}\left(x_2 + \frac{1}{3}\right), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times [0, \infty).$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα (12) δεν χρειάστηκε για να λύσουμε το π.α.τ.. $\square$

Παράδειγμα 3.3. Να βρείτε τη λύση του π.α.τ.

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1 + x_1^2)u_{x_1} + \frac{2x_1x_2}{1+x_1^2}u_{x_2} = 2x_1u & \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(0, x_2) = \ln(x_2) & \text{στο } (0, \infty). \end{array} \right.$$

Λύση. Είναι $F(p_1, p_2, z, x_1, x_2) = (1 + x_1^2)p_1 + \frac{2x_1x_2}{1+x_1^2}p_2 - 2x_1z$. Υπολογίζουμε: $\nabla_{\bar{p}}F = (1 + x_1^2, \frac{2x_1x_2}{1+x_1^2})$, επομένως το σύστημα (11) είναι το

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1'(s) = 1 + x_1^2(s) \\ x_2'(s) = \frac{2x_1(s)x_2(s)}{1+x_1^2(s)}, \end{array} \right.$$

από το οποίο παίρνουμε (ζητώντας $x_1 = 0$ όταν η τιμή της παραμέτρου s είναι 0)

$$\left. \begin{array}{l} x_1(s) = \tan s \\ x_2(s) = \alpha e^{-\frac{1}{2}\cos(2s)} \end{array} \right\}, \quad \alpha \in (0, \infty), s \in (-\pi/2, \pi/2). \quad (15)$$

¹ Παρατηρήστε ότι δεν πήραμε $x_2(s) = s + \beta$ με $s \in [-\beta, \infty)$ για κάποιο $\beta \in \mathbb{R}$. Ένας λόγος είναι ότι η αποπαραμετρικοποίηση των δυο εξισώσεων δίνει τις χαρακτηριστικές καμπύλες να είναι οι ευθείες $x_1 = x_2 + \alpha - \beta$, δηλαδή $x_1 = x_2 + \gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Επομένως δε χρειάζεται να εισάγουμε δύο αυθαίρετες σταθερές στη λύση του συστήματος. Στην ουσία όμως, στην (14) έχουμε κάνει επιλογή της αυθαίρετης σταθερής β , ώστε $x_2(0) = 0$. Αυτό δεσμεύει την παράμετρο s να ανήκει στο διάστημα $[0, \infty)$. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να είχαμε κάνει την επιλογή $\beta = 1$, δηλ. $x_2(s) = s + 1$, με s να ανήκει στο διάστημα $[-1, \infty)$.

Η εξίσωση (13) είναι η $z'(s) = \left(1 + x_1^2(s), \frac{2x_1(s)x_2(s)}{1+x_1^2(s)}\right) \cdot (p_1(s), p_2(s))$. Ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, δηλαδή χρησιμοποιώντας ότι $F(p_1(s), p_2(s), z(s), x_1(s), x_2(s)) = 0$, η (13) γίνεται

$$z'(s) = 2 \tan s \, z(s),$$

η οποία έχει λύση

$$z(s) = \frac{z(0)}{\cos^2 s}.$$

Αλλά, $z(0) = u(x_1(0), x_2(0)) = u(0, \alpha e^{-\frac{1}{2}}) = \ln(\alpha e^{-\frac{1}{2}})$, από τη συνθήκη του π.α.τ., άρα,

$$u(x_1(s), x_2(s)) = \frac{\ln(\alpha e^{-\frac{1}{2}})}{\cos^2 s}, \quad s \in (-\pi/2, \pi/2), \quad \alpha > 0.$$

Από την (15) έχουμε $s = \arctan x_1$ και $\alpha = x_2 e^{\frac{1}{2} \cos(2 \arctan x_1)}$, επομένως η λύση δίνεται από τον τύπο²

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= \frac{\ln x_2 + \frac{1}{2}(\cos(2 \arctan x_1) - 1)}{\cos^2(\arctan x_1)} \\ &= (1 + x_1^2) \ln x_2 - x_1^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times (0, \infty). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι και σε αυτό το παράδειγμα, το σύστημα (12) δεν χρειάστηκε για να λύσουμε το π.α.τ.. □

Παράδειγμα 3.4. Να βρείτε τη λύση του π.α.τ.

$$\begin{aligned} uu_{x_1} + u_{x_2} &= 1 \quad \text{στο } U := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > x_2 > 2\}, \\ u(x_1, x_1) &= x_1/2 \quad \text{στο } \Gamma := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2 > 2\} \subset \partial U. \end{aligned}$$

Λύση. Είναι $F(p_1, p_2, z, x_1, x_2) = zp_1 + p_2 - 1$. Υπολογίζουμε: $\nabla_{\vec{p}} F = (z, 1)$, επομένως το σύστημα (11) είναι το

$$\begin{cases} x_1'(s) = z(s) \\ x_2'(s) = 1, \end{cases}$$

από το οποίο παίρνουμε (ζητώντας $x_1 = x_2$ όταν η τιμή της παραμέτρου s είναι 0)

$$\left. \begin{aligned} x_1(s) &= \int_0^s z(t) \, dt + \alpha \\ x_2(s) &= s + \alpha \end{aligned} \right\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

Η εξίσωση (13) είναι η $z'(s) = (z(s), 1) \cdot (p_1(s), p_2(s))$ και χρησιμοποιώντας ότι $F(p_1(s), p_2(s), z(s), x_1(s), x_2(s)) = 0$, η (13) γίνεται

$$z'(s) = 1,$$

² $\sin(\arctan t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

η οποία έχει λύση

$$z(s) = s + z(0).$$

Αλλά, $z(0) = u(x_1(0), x_2(0)) = u(\alpha, \alpha) = \frac{1}{2}\alpha$, από τη συνθήκη του π.α.τ., άρα,

$$z(s) = s + \frac{1}{2}\alpha. \quad (17)$$

Αντικαθιστούμε στην (16) και έχουμε

$$\left. \begin{aligned} x_1(s) &= \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}s\alpha + \alpha \\ x_2(s) &= s + \alpha \end{aligned} \right\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R},$$

από την οποία παίρνουμε

$$\left. \begin{aligned} s &= 2 \frac{x_1 - x_2}{x_2 - 2} \\ \alpha &= \frac{x_2^2 - 2x_1}{x_2 - 2} \end{aligned} \right\}.$$

Αντικαθιστούμε στην (17) και έχουμε

$$u(x_1, x_2) = \frac{x_1 - x_2}{x_2 - 2} + \frac{1}{2}x_2, \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \neq 2.$$

Παρατηρούμε ότι η λύση δεν ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}^2$. Επίσης η λύση είναι αποδεκτή στο χωρίο U με τη συνθήκη στο $\Gamma \subset U$, όπως ορίζονται στην εκφώνηση. Επίσης, το σύστημα (12) δεν χρησιμοποιήθηκε ούτε εδώ. $\square$

Παράδειγμα 3.5. Να βρείτε τη λύση του π.α.τ.

$$\begin{aligned} u_{x_1} u_{x_2} &= u & \text{στο } U &:= \{(x_1, x_2) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}\}, \\ u(0, x_2) &= x_2^2 & \text{στο } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Λύση. Είναι $F(p_1, p_2, z, x_1, x_2) = p_1 p_2 - z$. Υπολογίζουμε: $\nabla_{\vec{p}} F = (p_2, p_1)$, επομένως το σύστημα (11) είναι το

$$\begin{cases} x_1'(s) = p_2(s) \\ x_2'(s) = p_1(s). \end{cases}$$

Για να προχωρήσουμε στην εύρεση της χαρακτηριστικής καμπύλης, θα χρησιμοποιήσουμε και το σύστημα (12). Υπολογίζουμε: $\nabla_x F = (0, 0)$, $\nabla_z F = -1$, επομένως το σύστημα (12) είναι το

$$\begin{cases} p_1'(s) = p_1(s) \\ p_2'(s) = p_2(s). \end{cases}$$

Άρα $p_1(s) = ae^s$, $p_2(s) = be^s$, και το σύστημα (11) γράφεται εκ νέου

$$\begin{cases} x_1'(s) = be^s \\ x_2'(s) = ae^s, \end{cases}$$

από το οποίο παίρνουμε (ζητώντας $x_1 = 0$ όταν η τιμή της παραμέτρου s είναι 0)

$$\left. \begin{aligned} x_1(s) &= b(e^s - 1) \\ x_2(s) &= ae^s + c \end{aligned} \right\}, \quad b \in (0, \infty), \quad a, c \in \mathbb{R}, \quad s \in (0, \infty).$$

Η εξίσωση (13) είναι η $z'(s) = (p_2(s), p_1(s)) \cdot (p_1(s), p_2(s))$ και χρησιμοποιώντας ότι $F(p_1(s), p_2(s), z(s), x_1(s), x_2(s)) = 0$, η (13) γίνεται

$$z'(s) = 2z(s),$$

η οποία έχει λύση

$$z(s) = z(0)e^{2s}.$$

Αλλά, $z(0) = u(x_1(0), x_2(0)) = u(0, a + c) = (a + c)^2$, από τη συνθήκη του π.α.τ., άρα,

$$z(s) = (a + c)^2 e^{2s}. \quad (18)$$

Από την μ.δ.ε. του π.α.τ. έχουμε $p_1(0)p_2(0) = z(0)$, άρα $ab = (a + c)^2$. Επίσης, από τη συνοριακή συνθήκη του π.α.τ. με παραγωγή ως προς x_2 , παίρνουμε τη συνθήκη $p_2(0) = 2x_2(0)$, που δίνει $b = 2(a + c)$. Επομένως $b = 4a$ και $c = a$, δηλαδή

$$\left. \begin{aligned} x_1(s) &= b(e^s - 1) \\ x_2(s) &= \frac{b}{4}(e^s + 1) \end{aligned} \right\}, \quad b \in (0, \infty), \quad s \in (0, \infty).$$

άρα,

$$\left. \begin{aligned} e^s &= \frac{4x_2 + x_1}{4x_2 - x_1} \\ b &= \frac{4x_2 - x_1}{2} \end{aligned} \right\}.$$

Τέλος, από την (18) έχουμε $z(s) = \frac{b^2}{4}e^{2s}$, και αντικαθιστώντας τις τιμές των e^s, b βρίσκουμε

$$u(x_1, x_2) = \left(x_2 + \frac{1}{4}x_1\right)^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Παρατηρούμε ότι η λύση ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}^2$, άρα και στο U . □

3.3 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο των χαρακτηριστικών για να λύσετε τα (4) και (6).
- 2) Να λυθούν με την παραπάνω μέθοδο των χαρακτηριστικών τα προβλήματα (υποθέτουμε κάθε φορά ότι η συνάρτηση g είναι C^1 στο πεδίο ορισμού της):

$$(i) \quad \begin{cases} x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} = 2u & \text{στο } \mathbb{R} \times (1, \infty), \\ u(x_1, 1) = g(x_1) & \text{στο } \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$(ii) \quad \begin{cases} x_1 u_{x_1} + 2x_2 u_{x_2} + u_{x_3} = 3u & \text{στο } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2) & \text{στο } \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$(iii) \quad \begin{cases} x_2 u_{x_1} + x_1 u_{x_2} = x_1 x_2, \\ u(x_1, 0) = x_1^2. \end{cases}$$

$$(iv) \quad \begin{cases} u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 = 1, \\ u(x_1, 1) = \sqrt{x_1^2 + 1}. \end{cases}$$

$$(v) \quad \begin{cases} u_{x_1}^2 - u u_{x_2} = 0, \\ u(x_1, 1 - x_1) = 1. \end{cases}$$

$$(vi) \quad \begin{cases} x_1 x_2 u_{x_1} + (x_1^2 + x_2^2) u_{x_2} = x_2 u, \\ u(x_1, 0) = \sin x_1. \end{cases}$$