

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εξεταζόμενο μάθημα: “Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις” (ΜΕ 59)

ΘΕΜΑΤΑ

1. Λύστε το παρακάτω πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών

$$\begin{cases} u_{x_1} - 2x_1 u_{x_2} = x_2 & \text{στο } U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0\}, \\ u(0, x_2) = x_2 & \text{στο } \partial U. \end{cases}$$

2. (a) Έστω $u = u(x, t) \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Χρησιμοποιήστε την αλλαγή μεταβλητών

$$\xi = \frac{t+x}{2}, \quad \eta = \frac{t-x}{2},$$

για να δείξετε ότι

$$u_{tt} - u_{xx} = \tilde{u}_{\xi\eta},$$

όπου $\tilde{u}$ είναι η συνάρτηση u εκφρασμένη στις μεταβλητές ξ, η , δηλ. $u(x, t) = \tilde{u}(\xi, \eta)$.

(b) Χρησιμοποιήστε το (a) για να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης

$$u_{tt} - u_{xx} = xt \quad \text{στο } \mathbb{R}^2$$

3. Λύστε το παρακάτω πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & (x, t) \in (0, 2) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(2, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = x^2 - 2x, & x \in [0, 2]. \end{cases}$$

4. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, είναι ένα φραγμένο χωρίο με ομαλό (τοπικά C^1) σύνορο $\partial\Omega$ και $T > 0$. Έστω $u \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, T])$ είναι τέτοια ώστε

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u^3 = 0 & \text{στο } \Omega \times (0, T], \\ u = u_t = 0 & \text{στο } \partial\Omega \times [0, T]. \end{cases}$$

Δείξτε ότι $u = 0$ στο $\bar{\Omega} \times [0, T]$.

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ