1

ΠΩΣ ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ ΟΙ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Μετά από τη θεώρηση του νοήματος μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης, θα ασκήσουμε τις μαθηματικές μας δεξιότητες λύνοντας μερικές από αυτές. Στη συνέχεια θα δούμε πώς αυτές προκύπτουν φυσιολογικά στις φυσικές επιστήμες. Η Φυσική θα αποτελέσει το κίνητρο για τη διατύπωση συνοριακών και αρχικών συνθηκών.

1.1 ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ ΜΕΡΙΚΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ;

Η ιδιότητα κλειδί για τον ορισμό μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης (ΜΔΕ) είναι ότι υπάρχουν περισσότερες από μία ανεξάρτητες μεταβλητές $x, y, \ldots$. Υπάρχει μια εξαρτημένη μεταβλητή η οποία είναι άγνωστη συνάρτηση αυτών των μεταβλητών $u(x, y, \ldots)$. Συχνά θα συμβολίζουμε τις παραγώγους της με κάτω δείκτες, π.χ. $\partial u/\partial x = u_x$, και ούτω καθεξής. Μια ΜΔΕ είναι μια σχέση που συνδέει τις ανεξάρτητες μεταβλητές, την εξαρτημένη μεταβλητή u και τις μερικές παραγώγους της u. Μπορεί να γραφεί ως

$$F(x,\, y,\, u(x,y),\, u_x(x,y),\, u_y(x,y)) = F(x,y,u,u_x,u_y) = 0. \tag{1}$$

Αυτή είναι η πιο γενική μορφή ΜΔΕ *πρώτης* τάξης με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές. *Τάξη* μιας εξίσωσης είναι η τάξη της ανώτερης παραγώγου που εμφανίζεται σ' αυτήν. Η πιο γενική ΜΔΕ *δεύτερης* τάξης με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές είναι η

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy}) = 0. \tag{2}$$

Λύση μιας ΜΔΕ αποτελεί μια συνάρτηση $u(x, y, \ldots)$ που ικανοποιεί την εξίσωση ταυτοτικά, τουλάχιστον σε κάποια περιοχή των μεταβλητών $x, y, \ldots$.

Κατά την επίλυση μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης (ΣΔΕ), ορισμένες φορές αντιστρέφουμε τον ρόλο των ανεξάρτητων και των εξαρτημένων μεταβλητών – λόγου χάριν, όπως στη διαχωρίσιμη ΣΔΕ $\dfrac{du}{dx} = u^3$. Στις ΜΔΕ, η διάκριση μεταξύ των ανεξάρτητων μεταβλητών και της εξαρτημένης μεταβλητής (του αγνώστου) διατηρείται πάντοτε.

Ορισμένα παραδείγματα ΜΔΕ (που προκύπτουν σε φυσικές θεωρίες) είναι:

1. $u_x + u_y = 0$ (μεταφορά)
2. $u_x + yu_y = 0$ (μεταφορά)
3. $u_x + uu_y = 0$ (κρουστικό κύμα)
4. $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (εξίσωση Laplace)
5. $u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0$ (κύμα με αλληλεπίδραση)
6. $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$ (κύμα με διασπορά)
7. $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$ (ταλαντούμενη ράβδος)
8. $u_t - iu_{xx} = 0$ $(i = \sqrt{-1})$ (κβαντική μηχανική)

Κάθε μία από αυτές τις ΜΔΕ έχει δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, οι οποίες γράφονται είτε ως x και y είτε ως x και t. Τα παραδείγματα 1 έως 3 είναι πρώτης τάξης, τα 4, 5 και 8 είναι δεύτερης, το 6 τρίτης και το 7 τέταρτης. Τα παραδείγματα 3, 5 και 6 ξεχωρίζουν από τα υπόλοιπα επειδή δεν είναι «γραμμικά». Θα εξηγήσουμε αμέσως αυτή την έννοια.

Γραμμικότητα σημαίνει η εξίσωση να γράφεται στη μορφή $\mathscr{L}u = 0$, όπου ο $\mathscr{L}$ είναι *τελεστής*. Δηλαδή, αν η u είναι οποιαδήποτε συνάρτηση, τότε η $\mathscr{L}u$ είναι μια νέα συνάρτηση. Για παράδειγμα, ο $\mathscr{L} = \partial/\partial x$ είναι ο τελεστής που δρώντας στη u τη μετατρέπει στη μερική της παράγωγο u_x. Στο Παράδειγμα 2, ο τελεστής $\mathscr{L}$ είναι $\mathscr{L} = \partial/\partial x + y\partial/\partial y$ ($\mathscr{L}u = u_x + yu_y$). Ο ορισμός που θέλουμε για τη γραμμικότητα είναι

$$\mathscr{L}(u+v) = \mathscr{L}u + \mathscr{L}v \qquad \mathscr{L}(cu) = c\mathscr{L}u \tag{3}$$

για οποιεσδήποτε συναρτήσεις u, v και οποιαδήποτε σταθερά c. Οποτεδήποτε ισχύει η (3) (για όλες τις επιλογές των u, v και c), ο $\mathscr{L}$ ονομάζεται *γραμμικός τελεστής*. Η εξίσωση

$$\mathscr{L}u = 0 \tag{4}$$

ονομάζεται *γραμμική* αν ο $\mathscr{L}$ είναι γραμμικός τελεστής. Η εξίσωση (4) ονομάζεται *ομογενής γραμμική εξίσωση*. Η εξίσωση

$$\mathscr{L}u = g, \tag{5}$$

όπου $g \neq 0$ μια γνωστή συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών, ονομάζεται *μη ομογενής γραμμική εξίσωση*. Για παράδειγμα, η εξίσωση,

$$(\cos xy^2)u_x - y^2 u_y = \tan(x^2 + y^2) \tag{6}$$

είναι μη ομογενής γραμμική εξίσωση.

Όπως μπορούμε να επαληθεύσουμε εύκολα, πέντε από τις πιο πάνω οκτώ εξισώσεις είναι γραμμικές και ομογενείς. Το παράδειγμα 5, από την άλλη, δεν αποτελεί γραμμική εξίσωση επειδή αν και οι παράγωγοι $(u+v)_{xx} = u_{xx} + v_{xx}$ και $(u+v)_{tt} = u_{tt} + v_{tt}$ ικανοποιούν την ιδιότητα (3), ο κυβικός όρος δεν την ικανοποιεί:

$$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 \neq u^3 + v^3.$$

Το πλεονέκτημα της γραμμικότητας της εξίσωσης $\mathscr{L}u = 0$ είναι ότι αν οι u και v είναι αμφότερες λύσεις της εξίσωσης, τότε λύση είναι και η $(u + v)$. Αν οι $u_1, \ldots, u_n$ είναι όλες τους λύσεις, το ίδιο είναι και οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός τους

$$c_1 u_1(x) + \ldots + c_n u_n(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j(x) \qquad (c_j = \text{σταθερές}).$$

(Αυτό ορισμένες φορές καλείται αρχή της υπέρθεσης). Μια άλλη συνέπεια της γραμμικότητας είναι ότι αν προσθέσουμε μια ομογενή λύση [μια λύση της (4)] σε μια μη ομογενή λύση [μια λύση της (5)], παίρνουμε μια μη ομογενή λύση (Γιατί;). Η μαθηματική δομή που αντιμετωπίζει γραμμικούς συνδυασμούς και γραμμικούς τελεστές είναι ο διανυσματικός χώρος. Οι Ασκήσεις 5-10 αποτελούν προβλήματα επανάληψης στους διανυσματικούς χώρους.

Θα μελετήσουμε, σχεδόν αποκλειστικά, γραμμικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές. Υπενθυμίζουμε ότι στις ΣΔΕ παίρνουμε γραμμικούς συνδυασμούς. Οι συντελεστές είναι οι αυθαίρετες σταθερές, όπου *για μια ΣΔΕ τάξης m, παίρνουμε m αυθαίρετες σταθερές.*

Ας δούμε ορισμένες ΜΔΕ.

Παράδειγμα 1.

Θα βρούμε όλες τις συναρτήσεις $u(x, y)$ που ικανοποιούν την εξίσωση $u_{xx} = 0$. Μπορούμε, αρχικά, να ολοκληρώσουμε την εξίσωση μία φορά και να πάρουμε την $u_x =$ σταθερά. Όμως αυτό δεν είναι στην πραγματικότητα σωστό από τη στιγμή που υπάρχει και άλλη μεταβλητή y. Αυτό που ουσιαστικά παίρνουμε είναι η $u_x(x, y) = f(y)$, όπου η συνάρτηση $f(y)$ είναι αυθαίρετη. Επαναλαμβάνουμε την ολοκλήρωση και παίρνουμε $u(x, y) = f(y)x + g(y)$. Αυτή είναι η λύση. Σημειώνουμε ότι *υπάρχουν δύο αυθαίρετες* συναρτήσεις *στη λύση*. Αυτή την περίπτωση θα την ξαναδούμε και στα δύο επόμενα παραδείγματα. □

Παράδειγμα 2.

Θα λύσουμε τη ΜΔΕ $u_{xx} + u = 0$. Και πάλι, πρόκειται για μια ΣΔΕ με μια επιπλέον μεταβλητή y. Γνωρίζουμε πώς να λύσουμε τη ΣΔΕ, και η λύση είναι

$$u = f(y)\cos x + g(y)\sin x$$

όπου και πάλι οι $f(y)$ και $g(y)$ είναι δύο αυθαίρετες συναρτήσεις του y. Μπορούμε να ελέγξουμε εύκολα αν αυτή η σχέση αποτελεί λύση παραγωγίζοντάς την δύο φορές και επαληθεύοντας ότι $u_{xx} = -u$. □

Παράδειγμα 3.

Θα λύσουμε τη ΜΔΕ $u_{xy} = 0$. Ούτε και αυτή η εξίσωση είναι ιδιαίτερα δύσκολη. Πρώτα ολοκληρώνουμε ως προς x, θεωρώντας το y σταθερό. Έτσι παίρνουμε

$$u_y(x, y) = f(y).$$

Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε ως προς y θεωρώντας το x σταθερό και παίρνουμε τη λύση

$$u(x, y) = F(y) + G(x),$$

όπου $F' = f$. □

Συμπέρασμα *Μια ΜΔΕ έχει αυθαίρετες συναρτήσεις στη λύση της.* Σ' αυτά τα παραδείγματα οι αυθαίρετες συναρτήσεις είναι συναρτήσεις μίας μεταβλητής που συνδυάζονται και δίνουν μια συνάρτηση $u(x, y)$ δύο μεταβλητών, η οποία είναι μόνο εν μέρει αυθαίρετη.

Μια συνάρτηση δύο μεταβλητών περιλαμβάνει *κατά πολύ* περισσότερες πληροφορίες από μια συνάρτηση με μόνο μία μεταβλητή. Από γεωμετρική άποψη, είναι προφανές ότι μια επιφάνεια $\{u = f(x, y)\}$, που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών, είναι ένα πολύ πιο περίπλοκο αντικείμενο από μια καμπύλη $\{u = f(x)\}$, που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μίας μεταβλητής.

Προκειμένου να διευκρινίσουμε τον παραπάνω ισχυρισμό, μπορούμε να αναρωτηθούμε πώς ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής θα καταγράψει μια συνάρτηση $u = f(x)$. Έστω ότι επιλέγουμε 100 σημεία για να την περιγράψουμε χρησιμοποιώντας ισαπέχουσες τιμές του x: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{100}$. Θα μπορούσαμε να καταγράψουμε αυτές τις τιμές σε μια στήλη, και δίπλα από κάθε μία τιμή x_j θα μπορούσαμε να γράψουμε την αντίστοιχη τιμή $u_j = f(x_j)$. Τι κάνουμε όμως για μια συνάρτηση της μορφής $u = f(x, y)$; Έστω ότι επιλέγουμε 100 ισαπέχουσες τιμές του x καθώς επίσης και του y: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{100}$ και $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{100}$. Κάθε *ζεύγος* x_i, y_j παρέχει μια τιμή $u_{ij} = f(x_i, y_j)$, επομένως απαιτούνται $100^2 = 10000$ γραμμές της μορφής

$$x_i \qquad y_j \qquad u_{ij}$$

για την περιγραφή της συνάρτησης! (Αν είχαμε ένα εκ των προτέρων διατεταγμένο σύστημα, θα χρειαζόταν να καταγράψουμε μόνο τις τιμές u_{ij}). Μια συνάρτηση τριών μεταβλητών που περιγράφεται με διακριτό τρόπο από 100 τιμές κάθε μεταβλητής θα απαιτούσε ένα εκατομμύριο αριθμούς!

Για την κατανόηση αυτού του βιβλίου τι θα πρέπει να γνωρίζει κάποιος από τον απειροστικό λογισμό; Ασφαλώς όλες τις βασικές γνώσεις σχετικά με τις μερικές παραγώγους και τα πολλαπλά ολοκληρώματα. Για μια σύντομη παρουσίαση τέτοιων ζητημάτων, βλ. το Παράρτημα. Εδώ παρουσιάζουμε μερικά ζητήματα που πρέπει να έχετε κατά νου, ορισμένα από τα οποία ίσως τα βλέπετε πρώτη φορά.

1. Οι παράγωγοι είναι *τοπικές*. Για να υπολογίσουμε, λόγου χάριν, την παράγωγο $(\partial u/\partial x)(x_0, t_0)$ σε ένα συγκεκριμένο σημείο, πρέπει απλώς να γνωρίζουμε τις τιμές της $u(x, t_0)$ για τα x *κοντά* στο x_0, από τη στιγμή που η παράγωγος είναι το όριο καθώς $x \to x_0$.

2. Οι μεικτές παράγωγοι είναι ίσες: $u_{xy} = u_{yx}$. (Σε ολόκληρο το βιβλίο υποθέτουμε, εκτός και αν διατυπώνεται ρητά κάτι διαφορετικό, ότι όλες οι παράγωγοι υπάρχουν και είναι συνεχείς).

3. Στις ΜΔΕ χρησιμοποιείται συχνά ο κανόνας της αλυσίδας. Για παράδειγμα,

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(g(x, t))] = f'(g(x, t)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x, t).$$

4. Για τα ολοκληρώματα παραγώγων, ο αναγνώστης καλό θα είναι να γνωρίζει το θεώρημα Green και το θεώρημα της απόκλισης ή αν τα γνωρίζει να τα ξαναδεί. (Βλ. το τέλος της Ενότητας A.3 στο Παράρτημα).

5. Παράγωγοι ολοκληρωμάτων όπως το $I(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx$ (βλ. Ενότητα Α.3).
6. Ορίζουσα Jacobi (αλλαγή μεταβλητής σε διπλό ολοκλήρωμα) (βλ. Ενότητα Α.1).
7. Σειρές συναρτήσεων και παραγώγισή τους (βλ. Ενότητα Α.2).
8. Παράγωγοι κατά κατεύθυνση (βλ. Ενότητα Α.1).
9. Συχνά θα ανάγουμε ΜΔΕ σε ΣΔΕ, έτσι θα πρέπει να γνωρίζουμε πώς να λύνουμε απλές ΣΔΕ. Όμως δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τα πάντα για περίπλοκες ΣΔΕ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Επαληθεύστε τη γραμμικότητα και τη μη γραμμικότητα των οκτώ παραδειγμάτων ΜΔΕ που δόθηκαν στο κείμενο, ελέγχοντας κατά πόσον οι εξισώσεις (3) ισχύουν ή όχι.
2. Ποιοι από τους ακόλουθους τελεστές είναι γραμμικοί;
   (α′) $\mathscr{L}u = u_x + xu_y$
   (β′) $\mathscr{L}u = u_x + uu_y$
   (γ′) $\mathscr{L}u = u_x + u_y^2$
   (δ′) $\mathscr{L}u = u_x + u_y + 1$
   (ε′) $\mathscr{L}u = \sqrt{1+x^2}(\cos y)u_x + u_{yxy} - [\arctan(x/y)]u$
3. Για κάθε μία από τις ακόλουθες εξισώσεις, προσδιορίστε την τάξη της και κατά πόσον είναι μη γραμμική, γραμμική μη ομογενής ή γραμμική ομογενής και δικαιολογήστε την απάντησή σας.
   (α′) $u_t - u_{xx} + 1 = 0$
   (β′) $u_t - u_{xx} + xu = 0$
   (γ′) $u_t - u_{xxt} + uu_x = 0$
   (δ′) $u_{tt} - u_{xx} + x^2 = 0$
   (ε′) $iu_t - u_{xx} + u/x = 0$
   (στ′) $u_x(1+u_x^2)^{-1/2} + u_y(1+u_y^2)^{-1/2} = 0$
   (ζ′) $u_x + e^y u_y = 0$
   (η′) $u_t + u_{xxxx} + \sqrt{1+u} = 0$
4. Δείξτε ότι η διαφορά δύο λύσεων μιας μη ομογενούς γραμμικής εξίσωσης $\mathscr{L}u = g$ με την ίδια συνάρτηση g είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης $\mathscr{L}u = 0$.
5. Ποιες από τις ακόλουθες συλλογές διανυσμάτων σε 3 διαστάσεις $[a, b, c]$ είναι διανυσματικοί χώροι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
   (α′) Τα διανύσματα με $b = 0$.
   (β′) Τα διανύσματα με $b = 1$.
   (γ′) Τα διανύσματα με $ab = 0$.
   (δ′) Όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί των δύο διανυσμάτων $[1, 1, 0]$ και $[2, 0, 1]$.
   (ε′) Όλα τα διανύσματα τέτοια ώστε $c - a = 2b$.
6. Είναι τα διανύσματα $[1, 2, 3]$, $[-2, 0, 1]$ και $[1, 10, 17]$ γραμμικώς εξαρτημένα ή ανεξάρτητα; Γράφονται όλα τα διανύσματα συναρτήσει αυτών ή όχι;
7. Οι συναρτήσεις $1+x$, $1-x$ και $1+x+x^2$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες ή ανεξάρτητες; Γιατί;

8. Βρείτε ένα διάνυσμα το οποίο, μαζί με τα διανύσματα $[1, 1, 1]$ και $[1, 2, 1]$, να συγκροτεί μια βάση του $\mathbb{R}^3$.
9. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $(c_1 + c_2 \sin^2 x + c_3 \cos^2 x)$ συγκροτούν διανυσματικό χώρο. Βρείτε μια βάση του. Ποια είναι η διάστασή του;
10. Δείξτε ότι οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $u''' - 3u'' + 4u = 0$ συγκροτούν διανυσματικό χώρο. Βρείτε μια βάση του.
11. Επαληθεύστε ότι η συνάρτηση $u(x, y) = f(x)g(y)$ είναι λύση της ΜΔΕ $uu_{xy} = u_x u_y$ για όλα τα ζεύγη των (παραγωγίσιμων) συναρτήσεων f και g μίας μεταβλητής.
12. Επαληθεύστε με απευθείας αντικατάσταση ότι η συνάρτηση

$$u_n(x, y) = \sin nx \sinh ny$$

είναι λύση της εξίσωσης $u_{xx} + u_{yy} = 0$ για κάθε $n > 0$.

1.2 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη των ΜΔΕ επιλύοντας μερικές απλές σε εντελώς γεωμετρικό πνεύμα.

Η απλούστερη δυνατή ΜΔΕ είναι η $\partial u/\partial x = 0$ [όπου $u = u(x, y)$]. Η γενική λύση της είναι η $u = f(y)$, όπου η f είναι τυχαία συνάρτηση *μίας* μεταβλητής. Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $u = y^2 - y$ και $u = e^y \cos y$ είναι δύο λύσεις. Επειδή οι λύσεις δεν εξαρτώνται από το x είναι σταθερές πάνω στις ευθείες $y =$ σταθερά στο επίπεδο xy.

Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Ας λύσουμε την εξίσωση

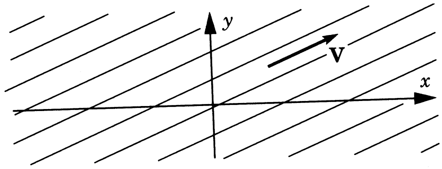
$$\boxed{au_x + bu_y = 0,} \tag{1}$$

όπου οι a και b είναι σταθερές όχι και οι δύο μηδενικές.

Γεωμετρική μέθοδος Η ποσότητα $au_x + bu_y$ είναι η κατά κατεύθυνση παράγωγος της u στην κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{V} = (a, b) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. Η ποσότητα αυτή πρέπει να ισούται πάντα με μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι η $u(x, y)$ πρέπει να είναι σταθερή κατά την κατεύθυνση του $\mathbf{V}$. Το διάνυσμα $(b, -a)$ είναι ορθογώνιο στο $\mathbf{V}$. Οι ευθείες που είναι παράλληλες στο $\mathbf{V}$ (βλ. Σχήμα 1) έχουν εξισώσεις $bx - ay =$ σταθερά. (Ονομάζονται *χαρακτηριστικές*). Η λύση είναι σταθερή σε κάθε τέτοια ευθεία. Συνεπώς, η $u(x, y)$ εξαρτάται μόνο από την ποσότητα $bx - ay$. Επομένως, η λύση είναι

$$\boxed{u(x, y) = f(bx - ay),} \tag{2}$$

όπου η f είναι οποιαδήποτε συνάρτηση μίας μεταβλητής. Ας εξηγήσουμε διεξοδικότερα αυτό το αποτέλεσμα. Πάνω στην ευθεία $bx - ay = c$, η λύση u έχει σταθερή τιμή και, έστω ότι αυτή η τιμή είναι η $f(c)$. Τότε $u(x, y) = f(c) = f(bx - ay)$. Από τη στιγμή που η c είναι αυθαίρετη, έχουμε τη σχέση (2) για όλες τις τιμές των x και y. Στον χώρο xyu η λύση



Σχήμα 1

ορίζει μια επιφάνεια που παράγεται από παράλληλες οριζόντιες ευθείες όπως ένα φύλλο αυλακωτού σιδήρου.

Μέθοδος των συντεταγμένων Αλλάζουμε τις μεταβλητές (ή «κάνουμε αλλαγή συντεταγμένων», Σχήμα 2) σε

$$x' = ax + by \qquad y' = bx - ay. \tag{3}$$

Αντικαθιστούμε όλες τις παραγώγους ως προς x και y με τις παραγώγους ως προς x' και y'. Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε,

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} = au_{x'} + bu_{y'}$$

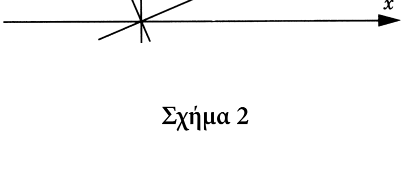
και

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} = bu_{x'} - au_{y'}.$$

Συνεπώς, $au_x + bu_y = a(au_{x'} + bu_{y'}) + b(bu_{x'} - au_{y'}) = (a^2+b^2)u_{x'}$. Έτσι, από τη στιγμή που $a^2 + b^2 \neq 0$, η εξίσωση παίρνει τη μορφή $u_{x'} = 0$ στις νέες (τονούμενες) μεταβλητές. Επομένως, η λύση είναι $u = f(y') = f(bx - ay)$, με την f αυθαίρετη συνάρτηση *μίας* μεταβλητής. Πρόκειται για την ίδια ακριβώς απάντηση όπως προηγουμένως!

Παράδειγμα 1.

Λύνουμε τη ΜΔΕ $4u_x - 3u_y = 0$, μαζί με τη βοηθητική συνθήκη $u(0, y) = y^3$. Από την εξίσωση (2) έχουμε $u(x, y) = f(-3x - 4y)$. Αυτή είναι η γενική λύση της ΜΔΕ. Θέτοντας $x = 0$ καταλήγουμε στην εξίσωση $y^3 = f(-4y)$, και θεωρώντας $w = -4y$ προκύπτει $f(w) = -w^3/64$. Συνεπώς, $u(x, y) = (3x + 4y)^3/64$.



Σχήμα 2

Η επαλήθευση των λύσεων είναι συνήθως πολύ πιο εύκολη από την εύρεσή τους. Επαληθεύουμε αν αυτή η συνάρτηση αποτελεί λύση της εξίσωσης με μια απλή παραγώγιση: $u_x = 9(3x+4y)^2/64$ και $u_y = 12(3x+4y)^2/64$, οπότε $4u_x - 3u_y = 0$. Επιπλέον, $u(0,y) = (3\cdot 0 + 4y)^3/64 = y^3$. □

Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Η εξίσωση

$$\boxed{u_x + yu_y = 0} \tag{4}$$

είναι γραμμική και ομογενής αλλά έχει μεταβλητό συντελεστή (y). Θα δείξουμε πώς χρησιμοποιείται, όπως στο Παράδειγμα 1, η γεωμετρική μέθοδος για την εξίσωση (4).

Η ίδια η ΜΔΕ (4) δείχνει ότι *η κατά κατεύθυνση παράγωγος στην κατεύθυνση του διανύσματος* $(1, y)$ *είναι μηδέν*. Οι καμπύλες στο επίπεδο xy με τα $(1, y)$ ως εφαπτόμενα διανύσματα έχουν κλίση y (βλ. Σχήμα 3) και οι εξισώσεις τους είναι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1}. \tag{5}$$

Αυτή η ΣΔΕ έχει τις λύσεις

$$y = Ce^x. \tag{6}$$

Αυτές οι καμπύλες ονομάζονται *χαρακτηριστικές καμπύλες* της ΜΔΕ (4). Καθώς μεταβάλλεται η C, οι καμπύλες γεμίζουν πλήρως το επίπεδο xy χωρίς να τέμνονται. Πάνω σε κάθε μία από τις καμπύλες η $u(x,y)$ είναι σταθερή επειδή

$$\frac{d}{dx}u(x, Ce^x) = \frac{\partial u}{\partial x} + Ce^x \frac{\partial u}{\partial y} = u_x + yu_y = 0.$$

Επομένως, η συνάρτηση $u(x, Ce^x) = u(0, Ce^0) = u(0, C)$ είναι ανεξάρτητη του x. Θέτοντας $y = Ce^x$ και $C = e^{-x}y$ έχουμε

$$u(x,y) = u(0, e^{-x}y).$$

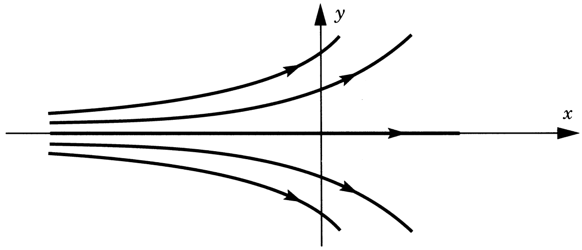
Έπεται ότι η συνάρτηση

$$\boxed{u(x,y) = f(e^{-x}y)} \tag{7}$$

είναι η *γενική λύση* αυτής της ΜΔΕ, όπου και πάλι η f είναι αυθαίρετη συνάρτηση μίας και μόνο μεταβλητής. Αυτό μπορούμε να το επαληθεύσουμε εύκολα με παραγώγιση και χρήση του κανόνα της αλυσίδας (βλ. Άσκηση 4). Από γεωμετρική άποψη, η «εικόνα» της λύσης $u(x,y)$ είναι ότι η λύση είναι *σταθερή πάνω σε κάθε χαρακτηριστική καμπύλη* στο Σχήμα 3.

Παράδειγμα 2.

Βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης (4) που ικανοποιεί τη βοηθητική συνθήκη $u(0,y) = y^3$. Πράγματι, θέτοντας, $x = 0$ στην (7), έχουμε $y^3 = f(e^{-0}y)$, οπότε $f(y) = y^3$. Συνεπώς, $u(x,y) = (e^{-x}y)^3 = e^{-3x}y^3$. □



Σχήμα 3

Παράδειγμα 3.

Λύνουμε τη ΜΔΕ

$$\boxed{u_x + 2xy^2 u_y = 0.} \tag{8}$$

Οι χαρακτηριστικές καμπύλες ικανοποιούν τη ΣΔΕ $dy/dx = 2xy^2/1 = 2xy^2$. Προκειμένου να λύσουμε τη ΣΔΕ, κάνουμε χωρισμό των μεταβλητών: $dy/y^2 = 2x\,dx$ και, συνεπώς, $-1/y = x^2 - C$, οπότε

$$y = (C - x^2)^{-1}. \tag{9}$$

Αυτές οι καμπύλες είναι οι χαρακτηριστικές. Και πάλι, η $u(x, y)$ είναι σταθερή πάνω σε κάθε τέτοια καμπύλη (επαληθεύστε γράφοντάς την). Επομένως, $u(x, y) = f(C)$, όπου η f είναι αυθαίρετη συνάρτηση. Συνεπώς, η γενική λύση της (8) προκύπτει από την επίλυση της (9) ως προς C, δηλαδή,

$$\boxed{u(x, y) = f\left(x^2 + \frac{1}{y}\right).} \tag{10}$$

Και πάλι αυτό το αποτέλεσμα επαληθεύεται εύκολα με παραγώγιση και χρήση του κανόνα της αλυσίδας: $u_x = 2x \cdot f'(x^2 + 1/y)$ και $u_y = -(1/y^2) \cdot f'(x^2 + 1/y)$, απ' όπου $u_x + 2xy^2 u_y = 0$. □

Συνοψίζοντας, η γεωμετρική μεθόδος δίνει καλά αποτελέσματα για οποιαδήποτε ΜΔΕ της μορφής $a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0$. Ανάγει την επίλυση της ΜΔΕ στην επίλυση της ΣΔΕ $dy/dx = b(x, y)/a(x, y)$. Αν μπορεί να επιλυθεί η ΣΔΕ, τότε μπορεί να επιλυθεί και η ΜΔΕ. Κάθε λύση της ΜΔΕ είναι σταθερή πάνω στις καμπύλες των λύσεων της ΣΔΕ.

Συμπέρασμα Οι λύσεις των ΜΔΕ εξαρτώνται εν γένει από αυθαίρετες συναρτήσεις (και όχι από αυθαίρετες σταθερές). Χρειαζόμαστε μια βοηθητική συνθήκη αν θέλουμε να προσδιορίσουμε μια μοναδική λύση. Τέτοιες συνθήκες συνήθως ονομάζονται *αρχικές* ή *συνοριακές* και θα συναντήσουμε τέτοιου είδους συνθήκες σε ολόκληρο το βιβλίο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθεί η πρώτης τάξης εξίσωση $2u_t + 3u_x = 0$ με τη βοηθητική συνθήκη $u = \sin x$ όταν $t = 0$.
2. Να λυθεί η εξίσωση $3u_y + u_{xy} = 0$. (*Υπόδειξη*: Έστω $v = u_y$).
3. Να λυθεί η εξίσωση $(1 + x^2)u_x + u_y = 0$. Να σχεδιασθούν κάποιες από τις χαρακτηριστικές καμπύλες.
4. Επαληθεύστε ότι η σχέση (7) είναι λύση της εξίσωσης (4).
5. Να λυθεί η εξίσωση $xu_x + yu_y = 0$.
6. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{1 - x^2}u_x + u_y = 0$ με τη συνθήκη $u(0, y) = y$.
7. (α′) Να λυθεί η εξίσωση $yu_x + xu_y = 0$ με $u(0, y) = e^{-y^2}$.
   (β′) Σε ποια περιοχή του επιπέδου xy η λύση προσδιορίζεται με μοναδικό τρόπο;
8. Να λυθεί η εξίσωση $au_x + bu_y + cu = 0$.
9. Να λυθεί η εξίσωση $u_x + u_y = 1$.
10. Να λυθεί η εξίσωση $u_x + u_y + u = e^{x+2y}$ με $u(x, 0) = 0$.
11. Να λυθεί η εξίσωση $au_x + bu_y = f(x, y)$ όπου η $f(x, y)$ είναι γνωστή συνάρτηση. Αν $a \neq 0$, γράψτε τη λύση στη μορφή

$$u(x, y) = (a^2 + b^2)^{-1/2} \int_L f\, ds + g(bx - ay),$$

όπου η g είναι αυθαίρετη συνάρτηση μίας μεταβλητής, η L είναι το τμήμα της χαρακτηριστικής ευθείας από τον άξονα y μέχρι το σημείο (x, y) και το ολοκλήρωμα είναι είναι επικαμπύλιο. (*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο των συντεταγμένων).
12. Δείξτε ότι οι νέοι άξονες συντεταγμένων όπως ορίζονται από την (3) είναι ορθογώνιοι.
13. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο των συντεταγμένων για την επίλυση της εξίσωσης

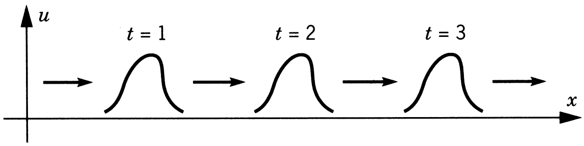
$$u_x + 2u_y + (2x - y)u = 2x^2 + 3xy - 2y^2.$$

1.3 ΡΟΕΣ, ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΔΙΑΧΥΣΗΣ

Το αντικείμενο των ΜΔΕ ήταν πρακτικά κλάδος της Φυσικής μέχρι τον εικοστό αιώνα. Σ’ αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε μια σειρά παραδειγμάτων ΜΔΕ όπως αυτές ανακύπτουν στη Φυσική. Αυτές οι εξισώσεις αποτελούν το βασικό κίνητρο για όλα τα προβλήματα ΜΔΕ που θα μελετήσουμε στο υπόλοιπο βιβλίο. Θα δούμε ότι πολύ συχνά στα φυσικά προβλήματα οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι εκείνες του χώρου x, y, z και του χρόνου t.

Παράδειγμα 1. Απλή μεταφορά

Θεωρούμε ένα ρευστό, έστω νερό, που ρέει με σταθερό ρυθμό c κατά μήκος οριζόντιου αγωγού σταθερής διατομής κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα x. Μια ουσία,



Σχήμα 1

έστω ρυπαντική, διοχετεύεται στο νερό. Έστω $u(x,t)$ η συγκέντρωσή της σε γραμμάρια/εκατοστό κατά τη χρονική στιγμή t. Τότε

$$\boxed{u_t + cu_x = 0.} \tag{1}$$

(Δηλαδή, ο ρυθμός μεταβολής u_t της συγκέντρωσης είναι ανάλογος της u_x. Η διάχυση θεωρείται αμελητέα). Επιλύοντας αυτή την εξίσωση όπως στην Ενότητα 1.2, βρίσκουμε ότι η συγκέντρωση είναι συνάρτηση μόνο του $(x-ct)$. Αυτό σημαίνει ότι η ουσία μεταφέρεται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα c. Κάθε μεμονωμένο σωματίδιο κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα c, δηλαδή, κινείται στο επίπεδο xt, κατά μήκος μιας χαρακτηριστικής ευθείας (βλ. Σχήμα 1). □

Παραγωγή της εξίσωσης (1). Η ποσότητα της ρυπαντικής ουσίας στο διάστημα $[0,b]$ τη χρονική στιγμή t είναι $M = \int_0^b u(x,t)\,dx$, έστω σε γραμμάρια. Στη μεταγενέστερη χρονική στιγμή $t+h$, τα ίδια μόρια της ρυπαντικής ουσίας έχουν μετακινηθεί προς τα δεξιά κατά $c \cdot h$ εκατοστά. Συνεπώς,

$$M = \int_0^b u(x,t)\,dx = \int_{ch}^{b+ch} u(x,t+h)\,dx.$$

Παραγωγίζοντας ως προς b, έχουμε

$$u(b,t) = u(b+ch, t+h).$$

Παραγωγίζοντας ως προς h και θέτοντας $h=0$, έχουμε

$$0 = cu_x(b,t) + u_t(b,t),$$

η οποία είναι η εξίσωση (1). □

Παράδειγμα 2. Ταλαντούμενη χορδή

Θεωρούμε μια εύκαμπτη, ελαστική ομογενή χορδή, ή νήμα, μήκους l η οποία υπόκειται σε σχετικά μικρές εγκάρσιες ταλαντώσεις. Για παράδειγμα, μπορεί να είναι η χορδή μιας κιθάρας ή μια νυσσόμενη[1] χορδή βιολιού. Σε δεδομένη χρονική στιγμή t, η χορδή ενδέχεται να φαίνεται όπως στο Σχήμα 2 και υποθέτουμε ότι παραμένει διαρκώς στο ίδιο

[1]Σ.τ.Μ.: Από το ρήμα «νύσσω» που σημαίνει τραβώ, τρυπώ, κεντώ. Τα έγχορδα στα οποία ο ήχος παράγεται από τη νύξη των χορδών ονομάζονται *νυκτά*.

Σχήμα 2

επίπεδο. Έστω ότι $u(x,t)$ είναι η μετατόπισή της από τη θέση ισορροπίας στη θέση x, κατά τη χρονική στιγμή t. Επειδή η χορδή είναι απολύτως εύκαμπτη, η τάση (δύναμη) έχει διεύθυνση εφαπτομενική κατά μήκος της χορδής (Σχήμα 3). Έστω ότι $T(x,t)$ είναι το μέτρο αυτού του διανύσματος τάσης και ρ η πυκνότητα (μάζα ανά μονάδα μήκους) της χορδής. Η πυκνότητα είναι σταθερή επειδή η χορδή είναι ομογενής. Θα γράψουμε τον νόμο του Νεύτωνα για το τμήμα της χορδής μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων $x = x_0$ και $x = x_1$. Η κλίση της χορδής στη θέση x_1 είναι $u_x(x_1,t)$. Η διαμήκης (x) και η εγκάρσια (u) συνιστώσα του νόμου του Νεύτωνα $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ είναι

$$\left.\frac{T}{\sqrt{1+u_x^2}}\right|_{x_0}^{x_1} = 0 \qquad \text{(διαμήκης)}$$

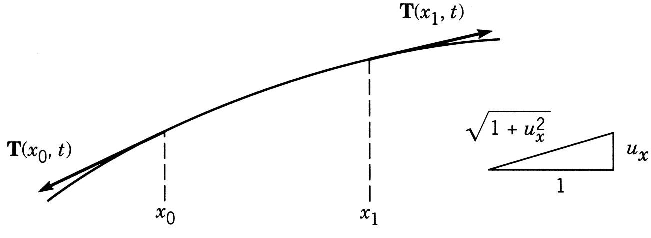
$$\left.\frac{T\,u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\right|_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} \rho u_{tt}\,dx \quad \text{(εγκάρσια)}$$

Τα δεξιά μέλη είναι οι συνιστώσεις της μάζας επί την επιτάχυνση που ολοκληρώνονται σε ένα τμήμα της χορδής. Από τη στιγμή που έχουμε υποθέσει ότι η κίνηση είναι αμιγώς εγκάρσια, δεν υπάρχει διαμήκης κίνηση.

Υποθέτουμε, επίσης, ότι η κίνηση είναι μικρή – ειδικότερα, ότι το $|u_x|$ είναι αρκετά μικρό. Τότε η ποσότητα $\sqrt{1+u_x^2}$ μπορεί να αντικατασταθεί από το 1. Αυτή η αντικατάσταση δικαιολογείται από το ανάπτυγμα Taylor, ουσιαστικά από το διωνυμικό ανάπτυγμα,

$$\sqrt{1+u_x^2} = 1 + \frac{1}{2}u_x^2 + \dots$$

όπου οι τελείες αναπαριστούν ανώτερες δυνάμεις του u_x. Αν το u_x είναι μικρό, έχει νόημα να παραλείψουμε την ακόμη πιο μικρή ποσότητα u_x^2 και τις ανώτερες δυνάμεις



Σχήμα 3

του. Με την τετραγωνική ρίζα να έχει αντικατασταθεί από το 1, σύμφωνα με την πρώτη εξίσωση το T είναι σταθερό κατά μήκος της χορδής. Ας υποθέσουμε ότι το T είναι ανεξάρτητο του t, καθώς και του x. Σύμφωνα με τη δεύτερη εξίσωση, όταν πάρουμε την παράγωγο αυτής ως προς x, ισχύει

$$(Tu_x)_x = \rho u_{tt}.$$

Δηλαδή,

$$\boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad \text{όπου } c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}.} \tag{2}$$

Αυτή είναι η *κυματική εξίσωση*. Σ' αυτό το σημείο δεν είναι σαφές γιατί η σταθερά c ορίζεται κατ' αυτό τον τρόπο, αλλά πολύ σύντομα θα δούμε ότι η c είναι η *ταχύτητα του κύματος*. □

Υπάρχουν πολλές *παραλλαγές* αυτής της εξίσωσης:

(i) Αν υπάρχει σημαντική αντίσταση αέρα r, τότε έχουμε έναν επιπλέον όρο ανάλογο της ταχύτητας u_t, δηλαδή:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + r u_t = 0 \qquad \text{όπου } r > 0. \tag{3}$$

(ii) Αν υπάρχει εγκάρσια ελαστική δύναμη, τότε έχουμε έναν επιπλέον όρο ανάλογο της μετατόπισης u, όπως σε ένα συσπειρωμένο ελατήριο, δηλαδή:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + k u = 0 \qquad \text{όπου } k > 0. \tag{4}$$

(iii) Αν υπάρχει εξωτερικά εφαρμοζόμενη δύναμη, τότε αυτή εμφανίζεται στην εξίσωση ως επιπλέον όρος, δηλαδή:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t), \tag{5}$$

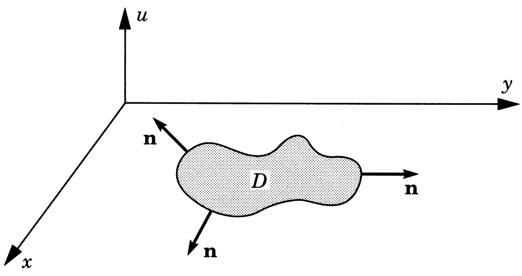
γεγονός που καθιστά την εξίσωση μη ομογενή.

Η παραγωγή της κυματικής εξίσωσης που δείξαμε εδώ υπήρξε γρήγορη αλλά όχι πολύ ακριβής. Μπορούμε, ωστόσο, να ακολουθήσουμε μια πιο προσεκτική διαδικασία, στην οποία χρησιμοποιούνται πιο ακριβείς φυσικές και μαθηματικές υποθέσεις [We, Κεφ. 1].

Η ίδια κυματική εξίσωση ή μια παραλλαγή της περιγράφει πολλά άλλα φαινόμενα κυματικής φύσης, όπως οι ταλαντώσεις μιας ελαστικής ράβδου, τα ηχητικά κύματα σε έναν αγωγό και τα μακρά υδάτινα κύματα σε μια ευθύγραμμη διώρυγα. Ένα άλλο παράδειγμα είναι η εξίσωση του ηλεκτρικού ρεύματος σε μια γραμμή μεταφοράς,

$$u_{xx} = CLu_{tt} + (CR + GL)u_t + GRu,$$

όπου C η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους, G η διαρροή λόγω αντίστασης ανά μονάδα μήκους, R η ωμική αντίσταση ανά μονάδα μήκους και L η αυτεπαγωγή ανά μονάδα μήκους.



Σχήμα 4

Παράδειγμα 3. Ταλαντούμενη μεμβράνη τυμπάνου

Η διδιάστατη εκδοχή της χορδής είναι μια ελαστική, εύκαμπτη, ομογενής μεμβράνη τυμπάνου, δηλαδή μια μεμβράνη που βρίσκεται τεντωμένη σε ένα πλαίσιο. Αν το πλαίσιο βρίσκεται στο επίπεδο xy (βλ. Σχήμα 4), τότε η $u(x, y, t)$ είναι η κάθετη μετατόπιση, ενώ δεν υπάρχει οριζόντια κίνηση. Οι οριζόντιες συνιστώσες του νόμου του Νεύτωνα δίνουν και πάλι σταθερή τάση T. Έστω D οποιοδήποτε χωρίο του επιπέδου xy, όπως, π.χ., ένας κυκλικός δίσκος ή ένα ορθογώνιο. Έστω[2] ∂D η συνοριακή καμπύλη του χωρίου D. Χρησιμοποιούμε συλλογιστική παρόμοια με τη μονοδιάστατη περίπτωση. Η κάθετη συνιστώσα δίνει (προσεγγιστικά)

$$F = \int_{\partial D} T \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = \iint_{D} \rho u_{tt} \, dx \, dy = ma,$$

όπου το αριστερό μέλος είναι η συνολική δύναμη που δρα στο τμήμα D της μεμβράνης, και όπου $\partial u / \partial n = \mathbf{n} \cdot \nabla u$ είναι η κατά κατεύθυνση παράγωγος στην προς τα έξω κάθετη κατεύθυνση, με το $\mathbf{n}$ να είναι το μοναδιαίο προς τα έξω, κάθετο στην καμπύλη ∂D, διάνυσμα. Από το θεώρημα Green (βλ. Ενότητα A.3 του Παραρτήματος), η πιο πάνω σχέση μπορεί να γραφεί εκ νέου ως

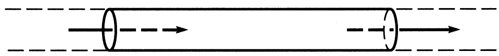
$$\iint_{D} \nabla \cdot (T \nabla u) \, dx \, dy = \iint_{D} \rho u_{tt} \, dx \, dy.$$

Από τη στιγμή που το χωρίο D είναι αυθαίρετο, από το δεύτερο θεώρημα μηδενισμού στην Ενότητα A.1 συμπεραίνουμε ότι $\rho u_{tt} = \nabla \cdot (T \nabla u)$. Επειδή το T είναι σταθερό, έχουμε

$$\boxed{u_{tt} = c^2 \nabla \cdot (\nabla u) \equiv c^2 (u_{xx} + u_{yy}),} \tag{6}$$

όπου $c = \sqrt{T/\rho}$ όπως και πριν, ενώ η ποσότητα $\nabla \cdot (\nabla u) = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = u_{xx} + u_{yy}$ είναι γνωστή ως ο *διδιάστατος τελεστής Laplace*. Η εξίσωση (6) είναι η διδιάστατη κυματική εξίσωση. □

[2]Σ.τ.Μ.: Στο πρωτότυπο, το σύνορο του χωρίου D συμβολίζεται ως bdy D, ωστόσο για την ελληνική έκδοση υιοθετήσαμε τον δόκιμο συμβολισμό ∂D.



Σχήμα 5

Το πρότυπο είναι πλέον σαφές. Απλές ταλαντώσεις σε τρεις διαστάσεις υπακούουν στην εξίσωση

$$\boxed{u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}).} \tag{7}$$

Ο τελεστής $\mathscr{L} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ ονομάζεται *τριδιάστατος τελεστής Laplace* και συνήθως συμβολίζεται με Δ ή ∇^2. Φυσικά παραδείγματα που περιγράφονται από την τριδιάστατη κυματική εξίσωση ή κάποια παραλλαγή της περιλαμβάνουν ταλαντώσεις ενός ελαστικού στερεού σώματος, ηχητικά κύματα στον αέρα, ηλεκτρομαγνητικά κύματα (φως, ραντάρ, κλπ.), γραμμικοποιημένη υπερηχητική ροή αέρα, ελεύθερα μεσόνια στην πυρηνική φυσική και σεισμικά κύματα που διαδίδονται στο εσωτερικό της γης.

Παράδειγμα 4. Διάχυση

Ας φανταστούμε ένα ακίνητο υγρό που γεμίζει έναν ευθύγραμμο σωλήνα ή αγωγό και μια χημική ουσία, έστω χρωστική, η οποία διαχέεται στο υγρό. Η απλή διάχυση χαρακτηρίζεται από τον ακόλουθο νόμο. [Αυτή δεν πρέπει να συγχέεται με τη συναγωγή (μεταφορά), η οποία αναφέρεται σε ρεύματα εντός του ρευστού]. Η χρωστική ουσία κινείται από περιοχές υψηλότερης συγκέντρωσης προς περιοχές χαμηλότερης συγκέντρωσης. Ο ρυθμός της κίνησης είναι ανάλογος προς τη βαθμίδα[3] της συγκέντρωσης. (Αυτό το συμπέρασμα είναι γνωστό ως νόμος του Fick για τη διάχυση). Έστω ότι η $u(x,t)$ είναι η συγκέντρωση (μάζα ανά μονάδα μήκους) της χρωστικής ουσίας στη θέση x του αγωγού κατά τη χρονική στιγμή t.

Στο τμήμα του αγωγού από τη θέση x_0 έως τη θέση x_1 (βλ. Σχήμα 5), η μάζα της χρωστικής ουσίας είναι

$$M(t) = \int_{x_0}^{x_1} u(x,t)\,dx, \qquad \text{άρα} \quad \frac{dM}{dt} = \int_{x_0}^{x_1} u_t(x,t)\,dx.$$

Η μάζα σ' αυτό το τμήμα του αγωγού δεν μπορεί να μεταβληθεί παρά μόνο με εισροή στα άκρα του ή εκροή από αυτά. Από τον νόμο του Fick, έχουμε

$$\frac{dM}{dt} = \text{εισροή} - \text{εκροή} = ku_x(x_1,t) - ku_x(x_0,t),$$

όπου k μια σταθερά αναλογίας. Συνεπώς, οι δύο εκφράσεις είναι ίσες:

$$\int_{x_0}^{x_1} u_t(x,t)\,dx = ku_x(x_1,t) - ku_x(x_0,t).$$

[3]Σ.τ.Μ.: Στην ελληνική βιβλιογραφία απαντά και ο όρος *κλίση*.

Παραγωγίζοντας ως προς x_1, έχουμε

$$\boxed{u_t = k u_{xx}.} \tag{8}$$

Αυτή είναι η *εξίσωση διάχυσης*.

Σε τρεις διαστάσεις έχουμε

$$\iiint_D u_t \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial D} k(\mathbf{n} \cdot \nabla u) \, dS,$$

όπου D είναι οποιοδήποτε τριδιάστατο χωρίο και ∂D η συνοριακή επιφάνειά του. Από το θεώρημα της απόκλισης (χρησιμοποιώντας τυχαίο χωρίο D όπως στο Παράδειγμα 3), έχουμε την *τριδιάστατη εξίσωση διάχυσης*

$$\boxed{u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = k \, \Delta u.} \tag{9}$$

Αν υπάρχει μια εξωτερική πηγή (ή «καταβόθρα») της χρωστικής ουσίας, και αν ο ρυθμός διάχυσης, k, είναι μεταβλητός, έχουμε τη γενικότερη μη ομογενή εξίσωση

$$u_t = \nabla \cdot (k \, \nabla u) + f(x, t).$$

Η ίδια εξίσωση περιγράφει τη διάδοση θερμότητας, την κίνηση Brown, πρότυπα διάχυσης στην πληθυσμιακή δυναμική και πολλά άλλα φαινόμενα. □

Παράδειγμα 5. Ροή θερμότητας

Θεωρούμε ότι η συνάρτηση $u(x, y, z, t)$ είναι η θερμοκρασία και η συνάρτηση $H(t)$ είναι η ποσότητα της θερμότητας (έστω, σε θερμίδες) που περιέχεται σε μια περιοχή D. Τότε

$$H(t) = \iiint_D c\rho u \, dx \, dy \, dz,$$

όπου c είναι η «ειδική θερμότητα» του υλικού και ρ η πυκνότητά του (μάζα ανά μονάδα όγκου). Η μεταβολή της θερμότητας είναι

$$\frac{dH}{dt} = \iiint_D c\rho u_t \, dx \, dy \, dz.$$

Σύμφωνα με τον νόμο του Fourier, η θερμότητα ρέει από θερμές προς ψυχρές περιοχές ανάλογα προς τη βαθμίδα της θερμοκρασίας. Όμως η θερμότητα δεν μπορεί να χαθεί από την περιοχή D εκτός κι αν διαφύγει από το σύνορο. Αυτός είναι ο νόμος διατήρησης της ενέργειας. Συνεπώς, η μεταβολή της ενέργειας θερμότητας στην περιοχή D ισούται επίσης με τον ρυθμό μεταβολής της θερμότητας διαμέσου του συνόρου,

$$\frac{dH}{dt} = \iint_{\partial D} \kappa \, (\mathbf{n} \cdot \nabla u) \, dS,$$

όπου κ ένας συντελεστής αναλογίας (η «θερμική αγωγιμότητα»). Από το θεώρημα της απόκλισης,

$$\iiint\limits_D c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dx\, dy\, dz = \iiint\limits_D \nabla \cdot (\kappa \,\nabla u)\, dx\, dy\, dz$$

και έτσι έχουμε την *εξίσωση θερμότητας*

$$\boxed{c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \,\nabla u).} \tag{10}$$

Αν οι c, ρ και κ είναι σταθερές, πρόκειται ακριβώς για μια εξίσωση ίδια με την εξίσωση διάχυσης! □

Παράδειγμα 6. Στάσιμα κύματα και διαδικασίες διάχυσης

Θεωρούμε οποιοδήποτε από τα προηγούμενα τέσσερα παραδείγματα σε μια περίπτωση όπου η φυσική κατάσταση δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο. Τότε $u_t = u_{tt} = 0$. Έτσι, *τόσο* η κυματική εξίσωση *όσο* και η εξίσωση διάχυσης ανάγονται στην εξίσωση

$$\boxed{\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.} \tag{11}$$

Αυτή η εξίσωση ονομάζεται *εξίσωση Laplace* και οι λύσεις της ονομάζονται *αρμονικές συναρτήσεις*. Για παράδειγμα, θεωρούμε ένα θερμό αντικείμενο το οποίο θερμαίνεται συνεχώς σε έναν κλίβανο. Η θερμότητα δεν αναμένεται να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη σε ολόκληρο τον κλίβανο. Η θερμοκρασία του αντικειμένου τελικά φθάνει σε μια σταθερή κατάσταση (ή κατάσταση ισορροπίας) και δίνεται από μια αρμονική συνάρτηση $u(x, y, z)$. (Βεβαίως, αν η θερμότητα παρεχόταν εξίσου προς όλες τις κατευθύνσεις, στη σταθερή κατάσταση θα είχαμε $u =$ σταθερά). Στη *μονοδιάστατη* περίπτωση (π.χ. σε μια πλευρικά μονωμένη λεπτή ράβδο που ανταλλάσσει θερμότητα με το περιβάλλον της μόνο διαμέσου των άκρων της), η u θα είναι συνάρτηση μόνο του x. Έτσι η εξίσωση Laplace θα ανάγεται απλώς στη $u_{xx} = 0$. Συνεπώς, $u = c_1x + c_2$. Η διδιάστατη και η τριδιάστατη περίπτωση είναι *πολύ* πιο ενδιαφέρουσες (βλ. Κεφάλαιο 6 για τις λύσεις). □

Παράδειγμα 7. Το άτομο του υδρογόνου

Το άτομο του υδρογόνου αποτελείται από ένα ηλεκτρόνιο που κινείται γύρω από ένα πρωτόνιο. Έστω m η μάζα του ηλεκτρονίου, e το φορτίο του και $\hbar$ η σταθερά του Planck διαιρεμένη διά 2π. Υποθέτουμε ότι η αρχή του συστήματος συντεταγμένων (x, y, z) βρίσκεται στο πρωτόνιο και ότι το $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ είναι η σφαιρική συντεταγμένη. Τότε η κίνηση του ηλεκτρονίου περιγράφεται από μια «κυματοσυνάρτηση» $u(x, y, z, t)$ η οποία ικανοποιεί την εξίσωση Schrödinger

$$\boxed{-i\hbar u_t = \frac{\hbar^2}{2m}\Delta u + \frac{e^2}{r}u} \tag{12}$$

σε ολόκληρο τον χώρο $-\infty < x, y, z < +\infty$. Επιπλέον, υποτίθεται ότι έχουμε $\iiint |u|^2 dx\, dy\, dz = 1$ (το ολοκλήρωμα θεωρείται σε ολόκληρο τον χώρο). Σημειώνουμε ότι $i = \sqrt{-1}$ και ότι η u παίρνει μιγαδικές τιμές. Ο συντελεστής e^2/r ονομάζεται δυναμικό. Για οποιοδήποτε άλλο άτομο με ένα μόνο ηλεκτρόνιο, όπως το ιόν του ηλίου, το e^2 αντικαθίσταται από το Ze^2, όπου Z ο ατομικός αριθμός. □

Τι σημαίνει αυτό από φυσική άποψη; Στην κβαντική μηχανική τα φυσικά μεγέθη δεν μπορούν να μετρηθούν με ακρίβεια αλλά μόνο με συγκεκριμένη πιθανότητα. Η *κυματοσυνάρτηση* $u(x, y, z, t)$ αναπαριστά μια δυνατή *κατάσταση* του ηλεκτρονίου. Αν D είναι *οποιαδήποτε* περιοχή του χώρου xyz, τότε το ολοκλήρωμα

$$\iiint_D |u|^2 dx\, dy\, dz$$

εκφράζει την πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιο στην περιοχή D κατά τη χρονική στιγμή t. Η *αναμενόμενη τιμή της συντεταγμένης* z *της θέσης* του ηλεκτρονίου κατά τη χρονική στιγμή t είναι η τιμή του ολοκληρώματος

$$\iiint z|u(x, y, z, t)|^2 dx\, dy\, dz$$

και ομοίως βρίσκουμε τις αναμενόμενες τιμές για τις συντεταγμένες x και y. Η *αναμενόμενη τιμή της συνιστώσας* z *της ορμής* είναι

$$\iiint -i\hbar \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z, t) \cdot \bar{u}(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz,$$

όπου $\bar{u}$ είναι η συζυγής μιγαδική συνάρτηση της u. Όλα τα υπόλοιπα παρατηρήσιμα μεγέθη δίνονται από τελεστές A, οι οποίοι δρουν σε συναρτήσεις. Η αναμενόμενη τιμή του παρατηρήσιμου μεγέθους A ισούται με

$$\iiint Au(x, y, z, t) \cdot \bar{u}(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz.$$

Επομένως η θέση δίνεται από τον τελεστή $Au = \mathbf{x}u$, όπου $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, ενώ η ορμή δίνεται από τον τελεστή $Au = -i\hbar\nabla u$.

Η εξίσωση Schrödinger θεωρείται για ευκολία απλώς ως ένα αξίωμα που οδηγεί στα σωστά φυσικά συμπεράσματα, παρά ως εξίσωση που μπορεί να παραχθεί από απλούστερες αρχές. Εξηγεί γιατί τα άτομα είναι ευσταθή και δεν καταρρέουν. Εξηγεί τις ενεργειακές στάθμες του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου οι οποίες παρατηρήθηκαν από τον Bohr. Περαιτέρω επεξεργασία της εξίσωσης Schrödinger εξηγεί, κατ' αρχήν, τη δομή *όλων* των ατόμων και των μορίων και έτσι ολόκληρης της χημείας! Στην περίπτωση πολλών σωματιδίων, η κυματοσυνάρτηση u εξαρτάται από τον χρόνο t και από όλες τις συντεταγμένες όλων των σωματιδίων και έτσι είναι συνάρτηση ενός μεγάλου πλήθους μεταβλητών. Τότε, η εξίσωση Schrödinger γίνεται

$$-i\hbar u_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{\hbar^2}{2m_i}(u_{x_i x_i} + u_{y_i y_i} + u_{z_i z_i}) + V(x_1, \ldots, z_n)u$$

για n σωματίδια, όπου η συνάρτηση δυναμικού V εξαρτάται από όλες τις $3n$ συντεταγμένες. Εκτός από τα άτομα του υδρογόνου και του ηλίου (με το τελευταίο να έχει δύο ηλεκτρόνια), η μαθηματική επίλυση είναι αδύνατο να διεξαχθεί πλήρως αναλυτικά και δεν είναι δυνατό να γίνουν υπολογισμοί ακόμη και με τη βοήθεια σύγχρονων υπολογιστών. Παρόλα αυτά, με τη χρήση διάφορων προσεγγίσεων, μπορούν να κατανοηθούν πολλά σχετικά με πιο πολύπλοκα άτομα και σχετικά με τους χημικούς δεσμούς μορίων. □

Αυτή ήταν μια σύντομη εισαγωγή στη προέλευση των ΜΔΕ από φυσικά προβλήματα. Πολλές ρεαλιστικές περιπτώσεις οδηγούν σε πολύ πιο πολύπλοκες ΜΔΕ. Βλ. Κεφάλαιο 13 για ορισμένα επιπλέον παραδείγματα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να παραχθεί προσεκτικά η εξίσωση μιας χορδής σε μέσο στο οποίο η αντίσταση είναι ανάλογη της ταχύτητας.
2. Μια εύκαμπτη αλυσίδα μήκους l είναι αναρτημένη από το ένα άκρο $x = 0$ αλλά ταλαντώνεται οριζόντια. Έστω ότι ο άξονας x κατευθύνεται προς τα κάτω και ο άξονας u κατευθύνεται προς τα δεξιά. Υποθέστε ότι η δύναμη της βαρύτητας σε κάθε σημείο της αλυσίδας ισούται με το βάρος του τμήματος της αλυσίδας κάτω από το σημείο αυτό και έχει διεύθυνση εφαπτομενική κατά μήκος της αλυσίδας. Υποθέστε ότι οι ταλαντώσεις είναι μικρές. Βρείτε τη ΜΔΕ που ικανοποιεί η αλυσίδα.
3. Στα πλευρικά τοιχώματα μιας λεπτής ράβδου, λαμβάνει χώρα ανταλλαγή θερμότητας (που υπακούει στον νόμο του Νεύτωνα για την ψύξη, σύμφωνα με τον οποίο ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας είναι ανάλογος της διαφοράς θερμοκρασίας) με ένα μέσο σταθερής θερμοκρασίας T_0. Ποια είναι η εξίσωση που ικανοποιεί η θερμοκρασία $u(x,t)$, αν θεωρήσετε αμελητέα τη μεταβολή αυτής διαμέσου της ράβδου;
4. Έστω ότι κάποια σωματίδια που αιωρούνται σε υγρό μέσο μπορούν να κινηθούν προς τα κάτω με σταθερή ταχύτητα $V > 0$ εξαιτίας της βαρύτητας χωρίς την παρουσία διάχυσης. Λαμβάνοντας υπόψη τη διάχυση, βρείτε την εξίσωση της συγκέντρωσης των σωματιδίων. Υποθέστε ομογένεια στις οριζόντιες διευθύνσεις x και y και θεωρήστε ότι ο άξονας z κατευθύνεται προς τα πάνω.
5. Να παραχθεί η εξίσωση της μονοδιάστατης διάχυσης σε μέσο που κινείται κατά μήκος του άξονα x προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα V.
6. Θεωρήστε ροή θερμότητας σε έναν κυκλικό κύλινδρο μεγάλου μήκους όπου η θερμοκρασία εξαρτάται μόνο από τον χρόνο t και την απόσταση r από τον άξονα του κυλίνδρου. Εδώ $r = \sqrt{x^2+y^2}$ είναι η κυλινδρική συντεταγμένη. Από την τριδιάστατη εξίσωση θερμότητας να παραχθεί η εξίσωση $u_t = k(u_{rr} + u_r/r)$.
7. Να λυθεί η Άσκηση 6 για μια σφαίρα μόνο που τώρα η θερμοκρασία θα εξαρτάται μόνο από τη σφαιρική συντεταγμένη $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Να παραχθεί η εξίσωση $u_t = k(u_{rr} + 2u_r/r)$.
8. Για το άτομο του υδρογόνου, αν $\int |u|^2\, d\mathbf{x} = 1$ για $t = 0$, να δειχθεί ότι το ίδιο ισχύει για όλες τις μεταγενέστερες χρονικές στιγμές. (*Υπόδειξη*: Παραγωγίστε το ολοκλήρωμα ως προς t, έχοντας κατά νου ότι η λύση παίρνει μιγαδικές τιμές. Υποθέστε ότι η u και η $\nabla u \to 0$ αρκετά γρήγορα καθώς $|\mathbf{x}| \to \infty$).

9. Αυτή είναι μια άσκηση στο θεώρημα της απόκλισης

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, d\mathbf{x} = \iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

το οποίο ισχύει για οποιοδήποτε φραγμένο χωρίο D στον χώρο με συνοριακή επιφάνεια ∂D και μοναδιαίο προς τα έξω κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}$. Αν δεν το έχετε ξαναδεί, ανατρέξτε στην Ενότητα Α.3. Είναι ζωτικής σημασίας το D να είναι φραγμένο. Ως άσκηση επαληθεύστε το θεώρημα για την ακόλουθη περίπτωση υπολογίζοντας τα δύο μέλη της εξίσωσης ξεχωριστά: $\mathbf{F} = r^2\mathbf{x}$, $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ και $D =$ σφαίρα με ακτίνα a και κέντρο στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων.

10. Αν η συνάρτηση $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ είναι συνεχής και $|\mathbf{f}(\mathbf{x})| \leqslant 1/(|\mathbf{x}|^3 + 1)$ για κάθε $\mathbf{x}$, δείξτε ότι

$$\iiint_{\text{όλος ο χώρος}} \nabla \cdot \mathbf{f}\, d\mathbf{x} = 0.$$

(*Υπόδειξη*: Θεωρήστε ως D μια μεγάλη σφαίρα, εφαρμόστε το θεώρημα της απόκλισης και θεωρήστε ότι η ακτίνα της τείνει στο άπειρο).

11. Αν $\operatorname{curl} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ σε ολόκληρο τον τριδιάστατο χώρο, δείξτε ότι υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση $\phi(x, y, z)$ τέτοια ώστε $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \phi$.

1.4 ΑΡΧΙΚΕΣ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Επειδή οι ΜΔΕ έχουν τυπικά πάρα πολλές λύσεις, όπως είδαμε στην Ενότητα 1.2, απομονώνουμε μία λύση επιβάλλοντας βοηθητικές συνθήκες, τις οποίες επιχειρούμε να διατυπώσουμε με τέτοιον τρόπο ώστε να προσδιορίζεται μία και μοναδική λύση. Αυτές τις συνθήκες τις υποδεικνύει η Φυσική και χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, τις αρχικές και τις συνοριακές συνθήκες.

Μια *αρχική συνθήκη* προσδιορίζει τη φυσική κατάσταση σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0. Για την εξίσωση διάχυσης η αρχική συνθήκη είναι

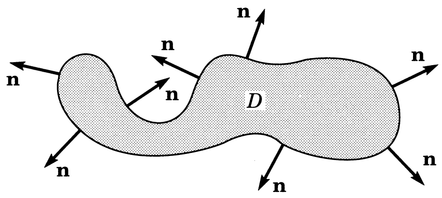
$$u(\mathbf{x}, t_0) = \phi(\mathbf{x}), \tag{1}$$

όπου $\phi(\mathbf{x}) = \phi(x, y, z)$ γνωστή συνάρτηση. Για μια διαχεόμενη ουσία, η $\phi(\mathbf{x})$ είναι η αρχική συγκέντρωση. Για τη ροή θερμότητας, η $\phi(\mathbf{x})$ είναι η αρχική θερμοκρασία. Για την εξίσωση Schrödinger, επίσης, η (1) είναι η συνήθης αρχική συνθήκη.

Για την κυματική εξίσωση υπάρχει ένα *ζεύγος* αρχικών συνθηκών

$$u(\mathbf{x}, t_0) = \phi(\mathbf{x}) \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t_0) = \psi(\mathbf{x}), \tag{2}$$

όπου $\phi(\mathbf{x})$ είναι η αρχική θέση και $\psi(\mathbf{x})$ η αρχική ταχύτητα. Με βάση φυσικά επιχειρήματα, είναι σαφές ότι αμφότερες οι συναρτήσεις πρέπει να καθορισθούν προκειμένου να προσδιοριστεί η θέση $u(\mathbf{x}, t)$ σε μεταγενέστερες χρονικές στιγμές. (Αυτό θα το αποδείξουμε επίσης μαθηματικά). □



Σχήμα 1

Σε κάθε φυσικό πρόβλημα έχουμε δει ότι υπάρχει ένα *χωρίο* D στο οποίο ισχύει η ΜΔΕ. Για την ταλαντούμενη χορδή, το D είναι το διάστημα $0 < x < l$, οπότε το σύνορο του D αποτελείται μόνο από τα δύο σημεία $x = 0$ και $x = l$. Για την ταλαντούμενη μεμβράνη, το χωρίο είναι μια επίπεδη περιοχή και το σύνορο αυτής είναι μια κλειστή καμπύλη. Για τη διαχεόμενη χημική ουσία, D είναι το δοχείο που περιέχει το υγρό, και έτσι το σύνορό του είναι μια επιφάνεια $S = \partial D$. Για το άτομο του υδρογόνου, το χωρίο είναι ολόκληρος ο χώρος και έτσι δεν υπάρχει σύνορο.

Είναι σαφές, και πάλι από τη φυσική μας διαίσθηση, ότι είναι απαραίτητο να καθορισθεί κάποια *συνοριακή συνθήκη* αν πρόκειται να προσδιορίσουμε τη λύση. Τα τρία κυριότερα είδη συνοριακών συνθηκών είναι:

(D) είναι καθορισμένη η u («συνθήκη *Dirichlet*»)

(N) είναι καθορισμένη η παράγωγος κατά την κάθετη κατεύθυνση $\partial u/\partial n$ («συνθήκη *Neumann*»)

(R) είναι καθορισμένη η ποσότητα $\partial u/\partial n + au$ («συνθήκη *Robin*»)

όπου a είναι γνωστή συνάρτηση των x, y, z και t. Κάθε συνθήκη πρέπει να ισχύει για όλες τις χρονικές στιγμές t και με το $\mathbf{x} = (x, y, z)$ να ανήκει στο ∂D. Συνήθως, γράφουμε τις (D), (N) και (R) ως εξισώσεις. Για παράδειγμα, η (N) γράφεται

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(\mathbf{x}, t), \tag{3}$$

όπου g μια γνωστή συνάρτηση που θα μπορούσε να ονομασθεί συνοριακό δεδομένο. Οποιαδήποτε από αυτές τις συνοριακές συνθήκες ονομάζεται *ομογενής* αν η καθορισμένη συνάρτηση $g(\mathbf{x}, t)$ μηδενίζεται. Διαφορετικά, ονομάζεται μη ομογενής. Ως συνήθως, το $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ συμβολίζει το μοναδιαίο κάθετο στο σύνορο ∂D διάνυσμα, το οποίο κατευθύνεται προς τα έξω από την D (βλ. Σχήμα 1). Επίσης, το $\partial u/\partial n \equiv \mathbf{n} \cdot \nabla u$ συμβολίζει την κατά κατεύθυνση παράγωγο της u στην προς τα έξω κάθετη κατεύθυνση.

Σε *μονοδιάστατα* προβλήματα όπου το D είναι το διάστημα $0 < x < l$, το σύνορο αποτελούν μόνο τα σημεία των δύο άκρων, και αυτές οι συνοριακές συνθήκες παίρνουν την απλή μορφή

(D) $u(0,t) = g(t) \qquad \text{και} \qquad u(l,t) = h(t)$

(N) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = g(t) \qquad \text{και} \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) = h(t)$

και ομοίως για τη συνθήκη Robin. □

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε κάποια φυσικά προβλήματα που αντιστοιχούν σ' αυτές τις συνοριακές συνθήκες.

Η ΤΑΛΑΝΤΟΥΜΕΝΗ ΧΟΡΔΗ

Αν η χορδή διατηρείται *πακτωμένη* και στα δύο άκρα της, όπως μια χορδή βιολιού, έχουμε τις ομογενείς συνθήκες Dirichlet $u(0,t) = u(l,t) = 0$.

Φανταστείτε, από την άλλη, ότι ένα άκρο της χορδής είναι *ελεύθερο* να κινηθεί εγκάρσια χωρίς αντίσταση (έστω, κατά μήκος ράγας, χωρίς τριβή). Τότε δεν υπάρχει κατακόρυφη συνιστώσα της τάσης T σ' αυτό το άκρο, και έτσι $u_x = 0$. Αυτή είναι συνθήκη Neumann.

Τρίτον, η συνθήκη Robin θα ήταν η σωστή αν θεωρούσαμε ότι το ένα άκρο της χορδής ήταν ελεύθερο να κινηθεί κατά μήκος μιας ράγας αλλά ήταν προσαρτημένο σε ένα συσπειρωμένο ελατήριο ή μια ελαστική ταινία (που υπακούουν στον νόμο του Hooke) που θα έτεινε να έλξει το άκρο πίσω προς τη θέση ισορροπίας. Σ' αυτή την περίπτωση η χορδή θα αντάλλασσε μέρος της ενέργειάς της με το συσπειρωμένο ελατήριο.

Τέλος, αν το ένα άκρο της χορδής κινούνταν απλώς κατά συγκεκριμένο τρόπο, θα είχαμε μια μη ομογενή συνθήκη Dirichlet σ' αυτό το άκρο.

ΔΙΑΧΥΣΗ

Αν η διαχεόμενη ουσία περιέχεται σε δοχείο D έτσι ώστε να μην μπορεί ούτε να διαφύγει από το δοχείο ούτε να εισέλθει σ' αυτό κάποια ποσότητα αυτής της ουσίας, τότε, από τον νόμο του Fick, η βαθμίδα της συγκέντρωσης κατά την κάθετη κατεύθυνση θα πρέπει να μηδενίζεται (βλ. Άσκηση 2). Έτσι $\partial u/\partial n = 0$ πάνω στο σύνορο $S = \partial D$, που είναι η συνθήκη Neumann.

Αν, από την άλλη, το δοχείο είναι διαπερατό και κατασκευασμένο έτσι ώστε οποιαδήποτε ουσία που διαφεύγει προς το σύνορο του δοχείου αμέσως να απομακρύνεται, τότε έχουμε $u = 0$ πάνω στο S.

ΘΕΡΜΟΤΗΤΑ

Η διάδοση θερμότητας περιγράφεται από την εξίσωση διάχυσης με $u(\mathbf{x},t) =$ θερμοκρασία. Αν το αντικείμενο D διαμέσου του οποίου ρέει η θερμότητα είναι τέλεια *μονωμένο*, τότε δεν διαπερνά καθόλου θερμότητα το σύνορο και έχουμε τη συνθήκη Neumann $\partial u/\partial n = 0$ (βλ. Άσκηση 2).

Από την άλλη, αν το αντικείμενο ήταν βυθισμένο σε μια μεγάλη *δεξαμενή* συγκεκριμένης θερμοκρασίας $g(t)$ και υπήρχε τέλεια θερμική διάδοση, τότε θα είχαμε τη συνθήκη Dirichlet $u = g(t)$ πάνω στο σύνορο ∂D.

Έστω ότι έχουμε ομοιόμορφη ράβδο μονωμένη σ' όλο το μήκος της $0 \leqslant x \leqslant l$, με το άκρο της στο $x = l$ βυθισμένο στη δεξαμενή θερμοκρασίας $g(t)$. Αν ανταλλάσσεται θερμότητα μεταξύ του άκρου και της δεξαμενής ώστε να ικανοποιείται ο νόμος του Νεύτωνα για την ψύξη, τότε

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = -a[u(l,t) - g(t)],$$

όπου $a > 0$. Θερμότητα από τη θερμή ράβδο εκπέμπεται προς την ψυχρή δεξαμενή και πρόκειται για μη ομογενή συνθήκη Robin.

ΦΩΣ

Το φως είναι ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και ως τέτοιο περιγράφεται από τις εξισώσεις Maxwell (βλ. Κεφάλαιο 13). Κάθε συνιστώσα του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου ικανοποιεί την κυματική εξίσωση. Οι διάφορες συνιστώσεις σχετίζονται η μία με την άλλη («συζεύγνυνται») μέσω των συνοριακών συνθηκών. Φανταστείτε, για παράδειγμα, φως που ανακλάται από μια σφαίρα με ανακλαστική επιφάνεια. Αυτό είναι ένα πρόβλημα σκέδασης. Το χωρίο D στο οποίο το φως διαδίδεται είναι το εξωτερικό της σφαίρας. Τότε οι συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου ικανοποιούν συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες. Όταν δεν μελετώνται φαινόμενα πόλωσης, ορισμένοι επιστήμονες χρησιμοποιούν την κυματική εξίσωση με ομογενείς συνθήκες Dirichlet ή Neumann ως ένα κατά πολύ απλοποιημένο μοντέλο μιας τέτοιας κατάστασης.

ΗΧΟΣ

Το αυτί μας ανιχνεύει μικρές διαταραχές στον αέρα. Οι διαταραχές περιγράφονται από τις εξισώσεις της αεριοδυναμικής, οι οποίες συγκροτούν ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων με την ταχύτητα $\mathbf{v}$ και την πυκνότητα ρ, ως τις άγνωστες συναρτήσεις. Όμως *μικρές* διαταραχές περιγράφονται αρκετά καλά από τις αποκαλούμενες γραμμικοποιημένες εξισώσεις, οι οποίες είναι πολύ απλούστερες, δηλαδή,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0}\operatorname{grad}\rho = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{5}$$

(συνολικά τέσσερις βαθμωτές εξισώσεις). Εδώ ρ_0 είναι η πυκνότητα και c_0 η ταχύτητα του ήχου στον ακίνητο αέρα.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο στροβιλισμός του $\mathbf{v}$ είναι μηδέν, πράγμα που σημαίνει ότι δεν υπάρχουν «στρόβιλοι» ήχου και ότι το πεδίο ταχυτήτων $\mathbf{v}$ είναι αστρόβιλο. Αποδεικνύεται ότι η πυκνότητα ρ και οι τρεις συνιστώσες της ταχύτητας $\mathbf{v}$ ικανοποιούν την κυματική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta \mathbf{v} \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta \rho. \tag{6}$$

Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης θα βρει πώς παράγονται αυτές οι εξισώσεις στην Ενότητα 13.2.

Αν τώρα περιγράψουμε τη διάδοση του ήχου σε μια κλειστή, ηχομονωμένη αίθουσα D με *άκαμπτα* τοιχώματα, έστω μια αίθουσα συναυλιών, τότε τα μόρια του αέρα στο τοίχωμα μπορούν να κινηθούν μόνο παράλληλα προς το σύνορο, έτσι ώστε στην κάθετη προς το σύνορο κατεύθυνση να μην μπορεί να κινηθεί καθόλου ήχος. Άρα, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ πάνω στο ∂D. Από τη στιγμή που $\operatorname{curl}\mathbf{v} = 0$, από τον διανυσματικό λογισμό γνωρίζουμε (Άσκηση

1.3.11) ότι υπάρχει μια συνάρτηση «δυναμικού» ψ τέτοια ώστε $\mathbf{v} = -\mathrm{grad}\, \psi$. Το δυναμικό ικανοποιεί επίσης την κυματική εξίσωση $\partial^2\psi/\partial t^2 = c_0^2 \Delta\psi$, και η συνοριακή συνθήκη για αυτή την εξίσωση είναι η $-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathrm{grad}\, \psi = 0$, δηλαδή η συνθήκη Neumann για την ψ.

Σε ένα *ανοικτό* παράθυρο της αίθουσας D, η ατμοσφαιρική πίεση είναι σταθερή και δεν υπάρχει διαφορά στην πίεση διαμέσου του παραθύρου. Η πίεση p είναι ανάλογη της πυκνότητας ρ, για μικρές διαταραχές του αέρα. Επομένως η πυκνότητα ρ είναι σταθερή στο παράθυρο, πράγμα που σημαίνει ότι η ρ ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη Dirichlet $\rho = \rho_0$.

Σε ένα *μαλακό* τοίχωμα, όπως μια ελαστική μεμβράνη που καλύπτει ένα ανοικτό παράθυρο, η διαφορά πίεσης $p - p_0$ διαμέσου της μεμβράνης είναι ανάλογη της κάθετης ταχύτητας $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, δηλαδή

$$p - p_0 = Z\mathbf{v} \cdot \mathbf{n},$$

όπου το Z ονομάζεται ακουστική εμπέδηση του τοιχώματος. (Ένα άκαμπτο τοίχωμα έχει πολύ μεγάλη εμπέδηση, ενώ ένα ανοικτό παράθυρο έχει μηδενική εμπέδηση). Τώρα η διαφορά $p - p_0$ είναι με τη σειρά της ανάλογη της διαφοράς $\rho - \rho_0$ για μικρές διαταραχές. Έτσι το σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων (4), (5) ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = a(\rho - \rho_0),$$

όπου a είναι μια σταθερά ανάλογη του $1/Z$. (Βλ. [MI] για περαιτέρω μελέτη). □

Ένα διαφορετικό είδος συνοριακής συνθήκης στην περίπτωση της κυματικής εξίσωσης είναι η

$$\frac{\partial u}{\partial n} + b\frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{7}$$

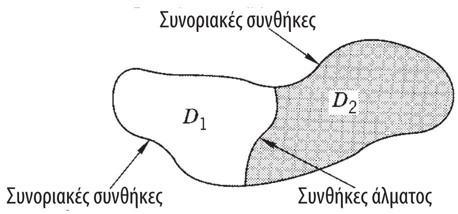
Αυτή η συνθήκη σημαίνει ότι ενέργεια *εκπέμπεται προς* το εξωτερικό ($b > 0$) ή *απορροφάται από* αυτό ($b < 0$) διαμέσου του συνόρου. Για παράδειγμα, μια ταλαντούμενη χορδή της οποίας τα άκρα βρίσκονται βυθισμένα σε υγρό με ιξώδες θα ικανοποιεί την (7) με $b > 0$ από τη στιγμή που ενέργεια εκπέμπεται προς το υγρό.

ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Σε περίπτωση που το χωρίο D δεν είναι φραγμένο, η Φυσική συνήθως παρέχει συνθήκες στο άπειρο, οι οποίες ενδέχεται να είναι περίπλοκες. Ένα παράδειγμα είναι η εξίσωση Schrödinger, όπου το χωρίο D είναι ολόκληρος ο χώρος, και απαιτούμε $\int |u|^2\, d\mathbf{x} = 1$. Το γεγονός ότι το ολοκλήρωμα αυτό είναι πεπερασμένο σημαίνει, ουσιαστικά, ότι η u «μηδενίζεται στο άπειρο».

Ένα δεύτερο παράδειγμα προσφέρεται από τη σκέδαση ακουστικών ή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Αν επιθυμούμε να μελετήσουμε ηχητικά ή φωτεινά κύματα που εκπέμπονται προς τα έξω (προς το άπειρο), η κατάλληλη συνθήκη στο άπειρο είναι η «συνθήκη εξερχόμενης ακτινοβολίας του Sommerfeld»

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0, \tag{8}$$



Σχήμα 2

όπου το $r = |\mathbf{x}|$ είναι η σφαιρική συντεταγμένη. (Σε δεδομένο μαθηματικό πλαίσιο αυτό το όριο θα καταστεί ακριβέστερο). (Βλ. Ενότητα 13.3.)

ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΑΛΜΑΤΟΣ

Αυτές οι συνθήκες ανακύπτουν όταν το χωρίο D αποτελείται από δύο μέρη, $D = D_1 \cup D_2$ (βλ. Σχήμα 2), με διαφορετικές φυσικές ιδιότητες. Ένα παράδειγμα είναι η διάδοση θερμότητας, όπου τα D_1 και D_2 αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικά υλικά (βλ. Άσκηση 6).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Με τη μέθοδο δοκιμής και σφάλματος, να βρεθεί μια λύση της εξίσωσης διάχυσης $u_t = u_{xx}$ με την αρχική συνθήκη $u(x, 0) = x^2$.
2. (α′) Να δειχθεί ότι η θερμοκρασία μεταλλικής ράβδου, μονωμένης στο άκρο $x = 0$, ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη $\partial u/\partial x = 0$. (Να χρησιμοποιηθεί ο νόμος του Fourier).
   (β′) Να γίνει το ίδιο για τη διάχυση αερίου κατά μήκος σωλήνα που είναι κλειστός στο άκρο $x = 0$. (Να χρησιμοποιηθεί ο νόμος του Fick).
   (γ′) Να δειχθεί ότι η τριδιάστατη εκδοχή του ερωτήματος (α′) (μονωμένο στερεό) ή του (β′) (μη διαπερατό δοχείο) οδηγεί στη συνοριακή συνθήκη $\partial u/\partial n = 0$.
3. Ένα ομογενές σώμα που καταλαμβάνει την τριδιάστατη περιοχή D είναι απολύτως μονωμένο και η αρχική του θερμοκρασία είναι $f(\mathbf{x})$. Να βρεθεί η θερμοκρασία της σταθερής κατάστασης στην οποία φτάνει το σώμα μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα. (*Υπόδειξη*: Δεν υπάρχει απώλεια ούτε παραγωγή θερμότητας).
4. Μια ράβδος που καταλαμβάνει το διάστημα $0 \leqslant x \leqslant l$ υποβάλλεται στην πηγή θερμότητας $f(x) = 0$ για $0 < x < \frac{l}{2}$ και $f(x) = H$ για $\frac{l}{2} < x < l$, όπου $H > 0$. Η ράβδος έχει φυσικές σταθερές $c = \rho = \kappa = 1$ και τα άκρα της διατηρούνται σε μηδενική θερμοκρασία.
   (α′) Να βρεθεί η θερμοκρασία της σταθερής κατάστασης της ράβδου.
   (β′) Ποιο σημείο είναι το θερμότερο και ποια είναι η θερμοκρασία του;
5. Στην Άσκηση 1.3.4, να βρεθεί η συνοριακή συνθήκη αν τα σωματίδια βρίσκονται πάνω από το μη διαπερατό οριζόντιο επίπεδο $z = a$.
6. Δύο ομογενείς ράβδοι έχουν την ίδια διατομή, την ίδια ειδική θερμότητα c, την ίδια πυ-

κνότητα ρ, αλλά διαφορετικές θερμικές αγωγιμότητες κ_1 και κ_2 και διαφορετικά μήκη L_1 και L_2. Έστω $k_j = \kappa_j / c\rho$ οι σταθερές διάχυσής τους. Οι ράβδοι συγκολλώνται έτσι ώστε η θερμοκρασία u και ο ρυθμός ροής θερμότητας κu_x στο σημείο της συγκόλλησης να είναι συνεχείς. Το αριστερό άκρο της αριστερής ράβδου διατηρείται σε μηδενική θερμοκρασία, ενώ το δεξιό άκρο της δεξιάς ράβδου σε θερμοκρασία T βαθμών.

(α′) Να βρεθεί η κατανομή της θερμοκρασίας στην κατάσταση *ισορροπίας* της σύνθετης ράβδου.

(β′) Να σχεδιασθεί η κατανομή αυτή ως συνάρτηση του x για την περίπτωση $k_1 = 2$, $k_2 = 1, L_1 = 3, L_2 = 2$ και $T = 10$. (Αυτή η άσκηση απαιτεί αρκετές στοιχειώδεις αλγεβρικές πράξεις αλλά αξίζει τον κόπο).

7. Στη γραμμικοποιημένη αεριοδυναμική (ήχος), να επαληθευτούν τα ακόλουθα:

(α′) Αν $\operatorname{curl}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ για $t = 0$, τότε $\operatorname{curl}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ για όλες τις μεταγενέστερες χρονικές στιγμές.

(β′) Κάθε συνιστώσα της $\mathbf{v}$ και η ρ ικανοποιούν την κυματική εξίσωση.

1.5 ΚΑΛΑ ΤΟΠΟΘΕΤΗΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Τα καλά τοποθετημένα προβλήματα αποτελούνται από μια ΜΔΕ σε ένα χωρίο μαζί με ένα σύνολο αρχικών ή/και συνοριακών συνθηκών (ή άλλων βοηθητικών συνθηκών) και διαθέτουν τις ακόλουθες θεμελιώδεις ιδιότητες:

(i) *Ύπαρξη*: Υπάρχει τουλάχιστον μία λύση $u(x, t)$ που ικανοποιεί όλες αυτές τις συνθήκες.

(ii) *Μοναδικότητα*: Υπάρχει το πολύ μία λύση.

(iii) *Ευστάθεια*: Η μοναδική λύση $u(x, t)$ εξαρτάται κατά ευσταθή τρόπο από τα δεδομένα του προβλήματος. Αυτό σημαίνει ότι αν τα δεδομένα μεταβληθούν λίγο, η αντίστοιχη λύση μεταβάλλεται μόνο λίγο.

Για ένα φυσικό πρόβλημα που μοντελοποιείται από μια ΜΔΕ, ο επιστήμονας συνήθως προσπαθεί να διατυπώσει φυσικά ρεαλιστικές βοηθητικές συνθήκες οι οποίες συνολικά να συνιστούν ένα καλά τοποθετημένο πρόβλημα. Ο μαθηματικός προσπαθεί να αποδείξει ότι ένα δεδομένο πρόβλημα είναι ή δεν είναι καλά τοποθετημένο. Αν επιβληθούν λιγότερες βοηθητικές συνθήκες, τότε ενδέχεται να υπάρξουν περισσότερες από μία λύσεις (*έλλειψη μοναδικότητας*) και το πρόβλημα ονομάζεται υποκαθορισμένο. Αν, από την άλλη, υπάρχουν πολλές βοηθητικές συνθήκες, ενδέχεται να μην υπάρχει καμία λύση (*μη ύπαρξη*) και το πρόβλημα ονομάζεται υπερκαθορισμένο.

Η ιδιότητα της ευστάθειας (iii) απαιτείται συνήθως σε μοντέλα φυσικών προβλημάτων. Αυτό συμβαίνει επειδή δεν μπορούμε ποτέ να μετρήσουμε τα δεδομένα με μαθηματική ακρίβεια αλλά μόνο με ακρίβεια κάποιων δεκαδικών ψηφίων. Δεν μπορούμε να διακρίνουμε ένα σύνολο δεδομένων από μια μικρή διαταραχή του. Η λύση οφείλει να μην επηρεάζεται σημαντικά από τέτοιες μικρές διαταραχές, και έτσι πρέπει να μεταβάλλεται πολύ λίγο.

Ας θεωρήσουμε ένα παράδειγμα. Γνωρίζουμε ότι μια, λόγω εξωτερικής δύναμης, ταλαντούμενη χορδή της οποίας τα άκρα κινούνται κατά συγκεκριμένο τρόπο, ικανοποιεί το πρόβλημα

$$\begin{gathered} Tu_{tt} - \rho u_{xx} = f(x,t) \\ u(x,0) = \phi(x) \qquad u_t(x,0) = \psi(x) \\ u(0,t) = g(t) \qquad u(L,t) = h(t) \end{gathered} \tag{1}$$

για $0 < x < L$. Τα *δεδομένα* αυτού του προβλήματος αποτελούνται από τις πέντε συναρτήσεις $f(x,t)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$ και $h(t)$. Ύπαρξη και μοναδικότητα θα σήμαινε ότι υπάρχει ακριβώς μία λύση $u(x,t)$ για αυθαίρετες (διαφορίσιμες) συναρτήσεις f, ϕ, ψ, g και h. Ευστάθεια θα σήμαινε ότι αν οποιαδήποτε από αυτές τις πέντε συναρτήσεις διαταραχθεί ελαφρώς, τότε η u θα μεταβληθεί επίσης ελαφρώς. Για να καταστεί αυτό ακριβές απαιτείται ένας ορισμός της «*εγγύτητας*» συναρτήσεων. Από μαθηματική άποψη, αυτή απαιτεί την έννοια μιας «απόστασης», «μετρικής», «νόρμας» ή «τοπολογίας» στον χώρο των συναρτήσεων και θα μελετηθεί στο πλαίσιο συγκεκριμένων παραδειγμάτων (βλ. Ενότητες 2.3, 3.4 ή 5.5). Το πρόβλημα (1) είναι πράγματι καλά τοποθετημένο αν κάνουμε την κατάλληλη επιλογή «εγγύτητας».

Ως δεύτερο παράδειγμα, θεωρούμε την εξίσωση διάχυσης. Δεδομένης μιας αρχικής συνθήκης $u(x,0) = f(x)$, αναμένουμε μία μοναδική λύση, για την ακρίβεια, το πρόβλημα είναι καλά τοποθετημένο για $t > 0$. Όμως ας θεωρήσουμε το πρόβλημα προς τα πίσω στον χρόνο! Δεδομένης της $f(x)$, ας βρούμε την $u(x,t)$ για $t < 0$. Ποια παρελθοντική συμπεριφορά θα μπορούσε να έχει οδηγήσει στη συγκέντρωση $f(x)$ τη χρονική στιγμή $t = 0$; Οποιοσδήποτε χημικός γνωρίζει ότι η διάχυση είναι μια διεργασία εξομάλυνσης από τη στιγμή που η συγκέντρωση μιας ουσίας τείνει να εξομαλύνεται. Πηγαίνοντας προς τα πίσω στον χρόνο («*αντιδιάχυση*»), η κατάσταση γίνεται ολοένα και πιο χαοτική. Συνεπώς, *δεν* αναμένουμε το προς τα πίσω στον χρόνο πρόβλημα για την εξίσωση διάχυσης να είναι καλά τοποθετημένο.

Ως τρίτο παράδειγμα, θεωρούμε την επίλυση μιας εξίσωσης πινάκων αντί μιας ΜΔΕ: δηλαδή, της εξίσωσης $Au = b$, όπου A πίνακας $m \times n$ και b γνωστό διάνυσμα διάστασης m. Τα «δεδομένα» αυτού του προβλήματος εμπεριέχουν το διάνυσμα b. Αν $m > n$, υπάρχουν περισσότερες γραμμές από στήλες και το σύστημα είναι υπερκαθορισμένο. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορεί να υπάρξει καμία λύση για συγκεκριμένα διανύσματα b. Δηλαδή, δεν έχουμε απαραίτητα ύπαρξη. Αν, από την άλλη, $n > m$, υπάρχουν περισσότερες στήλες από γραμμές και το σύστημα είναι υποκαθορισμένο. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν πολλές λύσεις για συγκεκριμένα διανύσματα b. Δηλαδή, δεν μπορούμε να έχουμε μοναδικότητα.

Τώρα υποθέτουμε ότι $m = n$, αλλά ο A είναι ιδιάζων πίνακας, δηλαδή, $\det A = 0$ ή, ισοδύναμα, ο A δεν έχει αντίστροφο. Τότε το πρόβλημα συνεχίζει να μην είναι καλά τοποθετημένο (ούτε ύπαρξη ούτε μοναδικότητα). Επίσης, είναι ασταθές. Για να εξηγήσουμε περαιτέρω την αστάθεια, θεωρούμε έναν μη ιδιάζοντα πίνακα A με μία πολύ μικρή ιδιοτιμή. Η λύση είναι μοναδική αλλά αν το b διαταραχθεί ελαφρώς, τότε το σφάλμα στη λύση u θα μεγεθυνθεί κατά πολύ. Ένας τέτοιος πίνακας, στο πλαίσιο των υπολογιστικών Μαθηματικών, ονομάζεται μη καλά συμπεριφερόμενος. Η μη καλή συμπεριφορά προέρχεται από την αστάθεια της εξίσωσης πινάκων με ιδιάζοντα πίνακα.

Ως τέταρτο παράδειγμα, θεωρούμε την εξίσωση Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ στην περιοχή $D = \{-\infty < x < \infty, 0 < y < \infty\}$. Ο ταυτόχρονος προσδιορισμός των u και u_y στο σύνορο της περιοχής D *δεν* είναι καλά τοποθετημένο πρόβλημα για τον εξής λόγο. Το πρόβλημα έχει τις λύσεις

$$u_n(x,y) = \frac{1}{n} e^{-\sqrt{n}} \sin nx \, \sinh ny. \tag{2}$$

Σημειώνουμε ότι αυτές έχουν συνοριακά δεδομένα $u_n(x,0) = 0$ και $(\partial u_n/\partial y)(x,0) = e^{-\sqrt{n}} \sin nx$, τα οποία τείνουν στο μηδέν καθώς $n \to \infty$. Όμως για $y \neq 0$ οι λύσεις $u_n(x,y)$ δεν τείνουν στο μηδέν καθώς $n \to \infty$. Συνεπώς παραβιάζεται η συνθήκη ευστάθειας (iii).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωρήστε το πρόβλημα

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0$$
$$u(0) = 0 \qquad \text{και} \quad u(L) = 0,$$

που αποτελείται από μια ΣΔΕ και ένα ζεύγος συνοριακών συνθηκών. Προφανώς, η συνάρτηση $u(x) \equiv 0$ είναι λύση. Είναι αυτή η λύση *μοναδική ή όχι*; Εξαρτάται η απάντηση από το L;

2. Θεωρήστε το πρόβλημα

$$u''(x) + u'(x) = f(x)$$
$$u'(0) = u(0) = \frac{1}{2}[u'(l) + u(l)],$$

με την $f(x)$ γνωστή συνάρτηση.

(α′) Είναι η λύση *μοναδική*; Δώστε μια εξήγηση.

(β′) *Υπάρχει* κατ' ανάγκη μια λύση ή υπάρχει μια συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η $f(x)$ για την ύπαρξη; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

3. Να λυθεί το συνοριακό πρόβλημα $u''(x) = 0$ για $0 < x < 1$ με $u'(0) + ku(0) = 0$ και $u'(1) \pm ku(1) = 0$. Να εξετασθούν οι περιπτώσεις $+$ και $-$ ξεχωριστά. Τι το ξεχωριστό έχει η περίπτωση $k = 2$;

4. Θεωρήστε το πρόβλημα Neumann

$$\Delta u = f(x,y,z) \qquad \text{στο } D$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad \text{πάνω στο } \partial D.$$

(α′) Τι μπορούμε με βεβαιότητα να προσθέσουμε σε οποιαδήποτε λύση προκειμένου να πάρουμε μια άλλη λύση; Συνεπώς δεν έχουμε μοναδικότητα.

(β′) Με χρήση του θεωρήματος της απόκλισης και της ΜΔΕ να δειχθεί ότι η σχέση

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = 0$$

είναι αναγκαία συνθήκη για να έχει λύση το πρόβλημα Neumann.

(γ′) Μπορείτε να δώσετε μια φυσική ερμηνεία των ερωτημάτων (α′) ή/και (β′) είτε για ροή θερμότητας είτε για διάχυση;

5. Θεωρήστε την εξίσωση

$$u_x + yu_y = 0$$

με συνοριακή συνθήκη $u(x, 0) = \phi(x)$.

(α′) Για $\phi(x) \equiv x$, δείξτε ότι δεν υπάρχει καμία λύση.

(β′) Για $\phi(x) \equiv 1$, δείξτε ότι υπάρχουν πολλές λύσεις.

6. Να λυθεί η εξίσωση $u_x + 2xy^2u_y = 0$, με $u(x, 0) = \phi(x)$.

1.6 ΕΙΔΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Σ' αυτή την ενότητα θα δείξουμε πώς η εξίσωση Laplace, η κυματική εξίσωση και η εξίσωση διάχυσης είναι υπό κάποια έννοια αντιπροσωπευτικές μεταξύ όλων των ΜΔΕ δεύτερης τάξης. Ωστόσο, αυτές οι τρεις εξισώσεις είναι αρκετά διαφορετικές μεταξύ τους. Είναι φυσιολογικό η εξίσωση Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ και η κυματική εξίσωση $u_{xx} - u_{yy} = 0$ να έχουν πολύ διαφορετικές ιδιότητες. Σε τελική ανάλυση, η *αλγεβρική* εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ αναπαριστά κύκλο, ενώ η εξίσωση $x^2 - y^2 = 1$ αναπαριστά υπερβολή. Η παραβολή βρίσκεται κάπου ανάμεσα.

Ας θεωρήσουμε, γενικά, τη ΜΔΕ

$$\boxed{a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y + a_0u = 0,} \tag{1}$$

η οποία είναι μια γραμμική εξίσωση δεύτερης τάξης με δύο μεταβλητές και έξι πραγματικούς σταθερούς συντελεστές. (Ο παράγοντας 2 έχει εισαχθεί για λόγους απλούστευσης).

Θεώρημα 1. Μέσω ενός γραμμικού μετασχηματισμού των ανεξάρτητων μεταβλητών, η εξίσωση μπορεί να αναχθεί σε μία από τρεις μορφές, ως εξής:

(i) *Ελλειπτική περίπτωση*: Αν $a_{12}^2 < a_{11}a_{22}$, η εξίσωση (1) ανάγεται στην

$$u_{xx} + u_{yy} + \ldots = 0$$

(όπου οι ... υποδηλώνουν όρους τάξης 1 ή 0).

(ii) *Υπερβολική περίπτωση*: Αν $a_{12}^2 > a_{11}a_{22}$ η εξίσωση (1) ανάγεται στην

$$u_{xx} - u_{yy} + \ldots = 0$$

(iii) *Παραβολική περίπτωση*: Αν $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$ η εξίσωση (1) ανάγεται στην

$$u_{xx} + \ldots = 0$$

(εκτός και αν $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$).

Η απόδειξη είναι εύκολη και είναι ακριβώς ίδια με την κατάταξη των κωνικών τομών στην αναλυτική γεωμετρία είτε σε ελλείψεις είτε σε υπερβολές είτε σε παραβολές. Για λόγους απλούστευσης, ας υποθέσουμε ότι $a_{11} = 1$, και $a_1 = a_2 = a_0 = 0$. Συμπληρώνοντας το τετράγωνο, μπορούμε να γράψουμε την (1) ως

$$(\partial_x + a_{12}\partial_y)^2 u + (a_{22} - a_{12}^2)\partial_y^2 u = 0 \tag{2}$$

(όπου χρησιμοποιήσαμε συμβολισμό με τελεστές $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y^2 = \partial^2/\partial y^2$, κλπ.). Στην ελλειπτική περίπτωση, $a_{12}^2 < a_{22}$. Έστω $b = (a_{22} - a_{12}^2)^{1/2} > 0$. Εισάγουμε τις νέες μεταβλητές ξ και η ως εξής:

$$x = \xi, \qquad y = a_{12}\xi + b\eta. \tag{3}$$

Τότε $\partial_\xi = 1 \cdot \partial_x + a_{12}\partial_y$, $\partial_\eta = 0 \cdot \partial_x + b\partial_y$, και έτσι η εξίσωση γίνεται

$$\partial_\xi^2 u + \partial_\eta^2 u = 0, \tag{4}$$

που είναι η εξίσωση Laplace. Η διαδικασία είναι παρόμοια και για τις άλλες περιπτώσεις. □

Παράδειγμα 1.

Θα ταξινομήσουμε τις εξισώσεις

(α′) $u_{xx} - 5u_{xy} = 0$.

(β′) $4u_{xx} - 12u_{xy} + 9u_{yy} + u_y = 0$.

(γ′) $4u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = 0$.

Πράγματι, ελέγχουμε το πρόσημο της «διακρίνουσας» $\mathscr{D} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$. Για την περίπτωση (α′) έχουμε $\mathscr{D} = (-5/2)^2 - (1)(0) = 25/4 > 0$, και έτσι η εξίσωση είναι υπερβολική. Για την περίπτωση (β′), έχουμε $\mathscr{D} = (-6)^2 - (4)(9) = 36 - 36 = 0$, και έτσι η εξίσωση είναι παραβολική. Για την περίπτωση (γ′), έχουμε $\mathscr{D} = (3)^2 - (4)(9) = 9 - 36 < 0$, και η εξίσωση είναι ελλειπτική. □

Η ίδια ανάλυση μπορεί να γίνει για οποιοδήποτε πλήθος μεταβλητών, με χρήση γραμμικής άλγεβρας. Έστω ότι υπάρχουν n μεταβλητές, που συμβολίζονται με x_1, x_2, …, x_n, και η εξίσωση είναι

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + a_0 u = 0, \tag{5}$$

με τις σταθερές a_{ij}, a_i και a_0 πραγματικές. Από τη στιγμή που οι μεικτές παράγωγοι είναι ίσες, μπορούμε κάλλιστα να υποθέσουμε ότι $a_{ij} = a_{ji}$. Έστω $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Θεωρούμε οποιαδήποτε γραμμική αλλαγή των ανεξάρτητων μεταβλητών:

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \boldsymbol{\xi} = B\mathbf{x},$$

όπου B πίνακας $n \times n$. Δηλαδή,

$$\xi_k = \sum_m b_{km} x_m. \tag{6}$$

Μεταβαίνουμε στις νέες μεταβλητές με χρήση του κανόνα της αλυσίδας:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_k}$$

και

$$u_{x_i x_j} = \left(\sum_k b_{ki} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \right) \left(\sum_l b_{lj} \frac{\partial}{\partial \xi_l} \right) u.$$

Συνεπώς η ΜΔΕ έχει μετατραπεί στην εξίσωση

$$\sum_{i,j} a_{ij} u_{x_i x_j} = \sum_{k,l} \left(\sum_{i,j} b_{ki} a_{ij} b_{lj} \right) u_{\xi_k \xi_l}. \tag{7}$$

(Προσέξτε ότι στο αριστερό μέλος το u θεωρείται συνάρτηση του $\mathbf{x}$, ενώ στο δεξιό μέλος συνάρτηση του $\boldsymbol{\xi}$). Έτσι στις νέες μεταβλητές $\boldsymbol{\xi}$ έχουμε μια εξίσωση δεύτερης τάξης, αλλά με τον *νέο πίνακα των συντελεστών*, ο οποίος δίνεται εντός των παρενθέσεων. Δηλαδή, ο νέος πίνακας είναι

$$BAB^t,$$

όπου ο $A = (a_{ij})$ είναι ο αρχικός πίνακας των συντελεστών, ο πίνακας $B = (b_{ij})$ ορίζει τον μετασχηματισμό και ο $B^t = (b_{ji})$ είναι ο ανάστροφός του.[4]

Σύμφωνα με ένα θεώρημα της γραμμικής άλγεβρας, για οποιονδήποτε συμμετρικό πραγματικό πίνακα A, υπάρχει μια στροφή B (ένας ορθογώνιος πίνακας με ορίζουσα 1) τέτοια ώστε ο BAB^t να είναι ο διαγώνιος πίνακας

$$BAB^t = D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & d_2 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & d_n \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Οι πραγματικοί αριθμοί $d_1, \ldots, d_n$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A. Τέλος, μια αλλαγή κλίμακας θα μετέτρεπε τον πίνακα D σε διαγώνιο με κάθε ένα από τα d να ισούται με $+1$, -1 ή 0. (Ουσιαστικά, αυτό κάναμε προηγουμένως σ' αυτή την ενότητα για την περίπτωση $n = 2$).

Επομένως, οποιαδήποτε ΜΔΕ της μορφής (5) μπορεί να μετατραπεί μέσω μιας γραμμικής αλλαγής μεταβλητών σε μια ΜΔΕ με διαγώνιο πίνακα των συντελεστών.

Ορισμός. Η ΜΔΕ (5) ονομάζεται *ελλειπτική* αν οι ιδιοτιμές $d_1, \ldots, d_n$ είναι όλες θετικές ή όλες αρνητικές. [Αυτό ισοδυναμεί με το να πούμε ότι ο αρχικός πίνακας των συντελεστών A (ή ο $-A$) είναι θετικά ορισμένος]. Η ΜΔΕ ονομάζεται *υπερβολική* αν καμία από τις ιδιοτιμές $d_1, \ldots, d_n$ δεν μηδενίζεται και μία από αυτές έχει αντίθετο πρόσημο από τις υπόλοιπες

[4]Σ.τ.Μ.: Στο πρωτότυπο ο ανάστροφος πίνακας συμβολίζεται ως ${}^tB$, ωστόσο στην ελληνική έκδοση χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό B^t, όπως συνηθίζεται στην ελληνική βιβλιογραφία.

$(n-1)$. Αν καμία ιδιοτιμή δεν μηδενίζεται, αλλά τουλάχιστον δύο από αυτές είναι θετικές και τουλάχιστον δύο είναι αρνητικές, η ΜΔΕ ονομάζεται *υπερ-υπερβολική*. Αν ακριβώς μία από τις ιδιοτιμές είναι μηδέν και όλες οι υπόλοιπες έχουν το ίδιο πρόσημο, η ΜΔΕ ονομάζεται *παραβολική*.

Υπερ-υπερβολικές εξισώσεις ανακύπτουν αρκετά σπάνια στη Φυσική και στα Μαθηματικά, και έτσι δεν θα τις μελετήσουμε περισσότερο. Όπως ακριβώς κάθε μία από τις τρεις κωνικές τομές έχει πολύ διακριτές ιδιότητες (ιδιότητα φραγμένου, σχήμα, ασύμπτωτες), έτσι έχει διακριτές ιδιότητες και κάθε ένα από τα τρία είδη ΜΔΕ. □

Γενικότερα, αν οι συντελεστές είναι μεταβλητοί, δηλαδή, οι a_{ij} είναι συναρτήσεις του **x**, η εξίσωση ενδέχεται να είναι ελλειπτική σε κάποια περιοχή και υπερβολική σε κάποια άλλη.

Παράδειγμα 2.

Να βρεθούν οι περιοχές του επιπέδου xy όπου η εξίσωση

$$yu_{xx} - 2u_{xy} + xu_{yy} = 0$$

είναι ελλειπτική, υπερβολική ή παραβολική. Πράγματι, $\mathscr{D} = (-1)^2 - (y)(x) = 1 - xy$. Άρα η εξίσωση είναι παραβολική πάνω στην υπερβολή ($xy = 1$), ελλειπτική στις δύο κυρτές περιοχές ($xy > 1$) και υπερβολική στη συνεκτική περιοχή ($xy < 1$). □

Αν η εξίσωση είναι μη γραμμική, οι περιοχές της ελλειπτικότητας (και ούτω καθεξής) μπορεί να εξαρτώνται από το ποια λύση μελετάμε. Ορισμένες φορές, αντί γραμμικών μετασχηματισμών όπως ο B πιο πάνω, είναι σημαντικοί μη γραμμικοί μετασχηματισμοί. Όμως πρόκειται για πολύπλοκο αντικείμενο που δεν έχει κατανοηθεί πλήρως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποιος είναι ο τύπος κάθε μίας από τις ακόλουθες εξισώσεις;
   (α′) $u_{xx} - u_{xy} + 2u_y + u_{yy} - 3u_{yx} + 4u = 0$.
   (β′) $9u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0$.
2. Να βρεθούν οι περιοχές του επιπέδου xy όπου η εξίσωση

   $$(1 + x)u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0$$

   είναι ελλειπτική, υπερβολική ή παραβολική. Να σχεδιασθούν αυτές οι περιοχές.
3. Μεταξύ όλων των εξισώσεων της μορφής (1), δείξτε ότι οι μόνες που παραμένουν αμετάβλητες σε όλων των ειδών τις στροφές (*αναλλοίωτες σε στροφές*) έχουν τη μορφή $a(u_{xx} + u_{yy}) + bu = 0$.
4. Ποιος είναι ο *τύπος* της εξίσωσης

   $$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0;$$

   Να δειχθεί με απευθείας αντικατάσταση ότι η συνάρτηση $u(x, y) = f(y+2x)+xg(y+2x)$ είναι λύση για αυθαίρετες συναρτήσεις f και g.

5. Να αναχθεί η ελλειπτική εξίσωση

$$u_{xx} + 3u_{yy} - 2u_x + 24u_y + 5u = 0$$

στη μορφή $v_{xx} + v_{yy} + cv = 0$ με την αλλαγή της εξαρτημένης μεταβλητής $u = ve^{\alpha x + \beta y}$ και στη συνέχεια με την αλλαγή κλίμακας $y' = \gamma y$.

6. Θεωρήστε την εξίσωση $3u_y + u_{xy} = 0$.
   (α′) Ποιος είναι ο τύπος της;
   (β′) Να βρεθεί η γενική λύση. (*Υπόδειξη*: Να γίνει η αντικατάσταση $v = u_y$).
   (γ′) Με τις βοηθητικές συνθήκες $u(x, 0) = e^{-3x}$ και $u_y(x, 0) = 0$, υπάρχει λύση; Είναι αυτή μοναδική;