

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(n\pi x), \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

- (i) Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση την $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
- (ii) Δείξτε ότι $\lim \int_0^1 (f_n)^2 = 0$.
- (iii) Τι έχετε να πείτε για το $\lim \int_0^1 (f'_n)^2$;

ΘΕΜΑ 2

Έστω $\{f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ με

$$f_n(x) = \frac{n(x^3 + x)e^{-x}}{nx + 1}.$$

- (i) Βρείτε το κατα σημείο όριο $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ της $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
- (ii) Συγκλίνει η $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ομοιόμορφα στην f στο $[0, 1]$;
- (iii) Δείξτε ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, 1]$ για κάθε $a \in (0, 1)$.
- (iv) Υπολογίστε το $\lim \int_0^1 f_n$.

ΘΕΜΑ 3

Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2} + \sqrt{1+x^2}},$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 4

Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} x^n.$$

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ