

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εξέταση στο “Απειροστικός Λογισμός ΙΙ” (ΜΥ 2Ι)

27/06/2025

ΘΕΜΑ 1 [1/10]

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μονότονη. Δείξτε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

ΘΕΜΑ 2 [2/10]

(i) Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμες. Δείξτε ότι

$$\int_a^b |fg| \leq \left(\int_a^b f^2 \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2 \right)^{1/2}.$$

(ii) Δείξτε ότι αν η $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και $f(0) = 0$, τότε

$$\int_0^1 f^2 \leq \int_0^1 (f')^2.$$

ΘΕΜΑ 3 [1/10]

Υπολογίστε τα

$$(i) \quad \int_0^{\pi/4} \frac{(\sin x)^{2024}}{(\cos x)^{2026}} dx,$$
$$(ii) \quad \int_1^e (\log x)^2 dx.$$

ΘΕΜΑ 4 [1/10]

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι περιττή, δηλ. $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι

$$\int_{-a}^a f = 0 \quad \forall a > 0. \quad (*)$$

Ισχύει το αντίστροφο; Δηλαδή αν ισχύει η (*), είναι η f περιττή;

ΘΕΜΑ 5 [1/10]

Έστω I ένα ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ και $\{f_n : I \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο I . Αν οι f_n , $n \in \mathbb{N}$, είναι συνεχείς στο $x_0 \in I$, δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 .

ΘΕΜΑ 6 [2,5/10]

- (A) Έστω $\{f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες και $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

- (B) Έστω $\{f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ με

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{x + n}.$$

- (i) Βρείτε το κατα σημείο όριο $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ της $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
- (ii) Συγκλίνει η $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ομοιόμορφα στην f στο $[0, 1]$;
- (iii) Υπολογίστε το όριο της $\{\int_0^1 f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

ΘΕΜΑ 7 [2/10]

- (i) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2(n+1))^n}{n!} x^n,$$

$$(b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n}.$$

Επίσης να υπολογίσετε το άθροισμα στο (b).

- (ii) Για τις διάφορες τιμές του $p \in [1, \infty)$, εξετάστε την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς στο $[0, \infty)$ και τη συνέχεια της f , όταν

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{n^p + x^2 n}.$$

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ