

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εβόλιμη εξέταση στο “Απειροστικός Λογισμός ΙΙ” (ΜΥ 21)

28/01/2026

ΘΕΜΑ 1 [1/10] Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μονότονη. Δείξτε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Λύση: Άσκηση 7.3 στις σελίδες 110-111.

ΘΕΜΑ 2 [1,5/10] Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αν υπάρχει σταθερή $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(x) + f(b + a - x) = c \quad \forall x \in [a, b],$$

να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f = f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Λύση: Με αλλαγή μεταβλητής βλέπουμε εύκολα ότι

$$\int_a^b f(a+b-x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Επομένως, ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[a, b]$ τη δοσμένη σχέση παίρνουμε

$$2 \int_a^b f = c(b-a) \Rightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b f = \frac{c}{2}.$$

Για $x = \frac{a+b}{2}$ στην δοσμένη σχέση παίρνουμε $c = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, κι έτσι έχουμε την πρώτη ισότητα. Για $x = a$ ή $x = b$ στην δοσμένη σχέση παίρνουμε $c = f(a) + f(b)$, κι έτσι έχουμε την δεύτερη ισότητα.

ΘΕΜΑ 3 [1/10] Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμες. Δείξτε ότι

$$\int_a^b |fg| \leq \left(\int_a^b f^2 \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2 \right)^{1/2}.$$

Λύση: Άσκηση 7.26 στη σελίδα 120.

ΘΕΜΑ 4 [1/10] Υπολογίστε τα

$$(i) \quad \int_0^{\pi/3} \frac{\sin 3x}{2 - \cos 3x} dx, \quad (ii) \quad \int_0^{\pi} e^x (\sin x + \cos x) dx.$$

Λύση: (i) Με την αλλαγή μεταβλητής $y = 2 - \cos 3x$ έχουμε

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin 3x}{2 - \cos 3x} dx = \frac{1}{3} \int_1^3 \frac{1}{y} dy = \frac{\ln 3}{3}.$$

(ii) Με παραγοντική ολοκλήρωση

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^x \sin x \, dx &= \int_0^\pi (e^x)' \sin x \, dx = - \int_0^\pi e^x \cos x \, dx + [e^x \sin x]_{x=0}^{x=\pi} \Rightarrow \\ &\int_0^\pi e^x (\sin x + \cos x) \, dx = 0.\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 5 [(1+0,5)/10]

1. Έστω I ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ και $\{f_n : I \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο I . Αν οι f_n , $n \in \mathbb{N}$, είναι συνεχείς στο I , δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο I .

2. Βρείτε το κατά σημείο όριο της ακολουθίας

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}, \quad x \in [0, 1].$$

Είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη;

Λύση: 1. Απόδειξη του πρώτου Θεωρήματος στη σελίδα 126.

2. (i) Είναι $f_n(0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in (0, 1]$ έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{nx+1} = \frac{x}{x} = 1.$$

Επομένως, το κατά σημείο όριο της $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in [0, 1]$, είναι η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{όταν } x = 0, \\ 1 & \text{όταν } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

(ii) Επειδή η ακολουθία $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in [0, 1]$, αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις, αν η σύγκλιση στην f ήταν ομοιόμορφη θα είχαμε λόγω του (A) ότι η f είναι συνεχής. Άρα η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

ΘΕΜΑ 6 [(1+1)/10]

1. Έστω $\{f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες και $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

2. Έστω $\{g_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ με

$$g_n(x) = (-1)^n \left(1 + \frac{x^2}{n}\right).$$

(i) Δείξτε ότι η $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει για κανένα $x \in [-1, 1]$.

(ii) Βρείτε το κατά σημείο όριο $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ της $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ και δείξτε ότι η $\{|g_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην g στο $[-1, 1]$;

(iii) Υπολογίστε το $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 |g_n|$.

Λύση: 1. Απόδειξη του δεύτερου Θεωρήματος στη σελίδα 126.

2. (i) Επειδή για κάθε $x \in [-1, 1]$ έχουμε $g_{2n}(x) = 1 + \frac{x^2}{2n} \rightarrow 1$ καθώς $n \rightarrow \infty$, αλλά $g_{2n-1}(x) = -1 - \frac{x^2}{2n-1} \rightarrow -1$ καθώς $n \rightarrow \infty$, η ακολουθία $\{g_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει για κανένα $x \in [-1, 1]$.

(ii) Επειδή για κάθε $x \in [-1, 1]$ έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right) = 1,$$

το κατα σημείο όριο της $\{|g_n(x)|\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in [-1, 1]$, είναι η $g(x) = 1$, $x \in [-1, 1]$. Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |g_n(x) - g(x)| = \sup_{x \in [-1, 1]} \frac{x^2}{n} = \frac{1}{n},$$

η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

(iii) Λόγω του (A) έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 |g_n| = \int_{-1}^1 g = 2$. (μπορείτε και με απ' ευθείας υπολογισμό).

ΘΕΜΑ 7 [(1+1)/10]

1. Για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, να εξετάστε ως προς την σύγκλιση/απόλυτη σύγκλιση τη δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^{1/3} 5^n}.$$

2. Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Λύση: 1. Για τη δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^{1/3} 5^n},$$

έχουμε $a_n := 1/(n^{1/3} 5^n) \neq 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, επομένως η ακτίνα σύγκλισης R δίνεται από τον τύπο $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ (βλ. πρώτο θεώρημα στη σελίδα 139). Αλλά,

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{(n+1)^{1/3} 5^{n+1}}{n^{1/3} 5^n} = 5(1+1/n)^{1/3}.$$

Επομένως $R = 5$, και η δοσμένη σειρά συγκλίνει απολύτως όταν $|x-3| < 5 \Leftrightarrow x \in (-2, 8)$ ενώ δεν συγκλίνει για κανένα $x \in (-\infty, -2) \cup (8, \infty)$. Για $x = 8$, η σειρά είναι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$ η οποία αποκλίνει (είναι της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ με $p \leq 1$). Για $x = -2$, η

σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/3}}$ η οποία συγκλίνει υπό συνθήκη, δηλαδή συγκλίνει αλλά όχι απολύτως. Για να το δούμε αυτό χρησιμοποιούμε το κριτήριο του Dirichlet (βλ. σελ. 45). Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ έχει φραγμένα μερικά αθροίσματα, και η ακολουθία $\frac{1}{n^{1/3}}$ φθίνει στο 0. Άρα σύμφωνα με το κριτήριο, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/3}}$ συγκλίνει. Από την άλλη, όπως είδαμε και στην περίπτωση $x = 8$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$ αποκλίνει, πράγμα που σημαίνει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/3}}$ δεν συγκλίνει απολύτως.

2. (κατά σημείο) Για $x = 0$ έχουμε τη μηδενική σειρά η οποία συγκλίνει. Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε

$$\left| \frac{x}{1+n^2x^2} \right| = \frac{|x|}{1+n^2x^2} \leq \frac{|x|}{n^2x^2} = \frac{1}{n^2|x|},$$

και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2|x|}$ συγκλίνει διότι η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της είναι $s_n(x) = \frac{1}{|x|} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει (είναι της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ με $p > 1$). Επομένως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$ συγκλίνει (απολύτως) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(ομοιόμορφη) Έστω $\gamma > 0$. Όταν $|x| \geq \gamma$ έχουμε από την παραπάνω ανισότητα ότι

$$\left| \frac{x}{1+n^2x^2} \right| \leq \frac{1}{\gamma n^2} =: M_n,$$

και η $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει (είναι της μορφής $\frac{1}{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ με $p > 1$). Σύμφωνα με το κριτήριο Weierstraß, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\{|x| \geq \gamma\}$ για κάθε $\gamma > 0$. Όμως δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Για την ακρίβεια, δεν συγκλίνει ομοιόμορφα σε κανένα διάστημα που περιέχει το μηδέν. Για παράδειγμα, έστω το διάστημα $I = \{|x| \leq \gamma\}$, $\gamma > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ώ. $\frac{1}{n} \in I$ για κάθε $n \geq n_0$. Για κάθε τέτοιο n έχουμε

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in I} \left| \sum_{k=1}^n \frac{x}{1+k^2x^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} \right| \\ &= \sup_{x \in I} \left(|x| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x^2} \right) \\ &\geq \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2/n^2} \quad (\text{πήραμε } x = 1/n) \\ &\geq \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{1+k^2/n^2} \\ &\geq \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{5} \quad (\text{διότι } k/n \leq 2 \text{ για κάθε } k \in \{n+1, \dots, 2n\}) \\ &= \frac{1}{5}, \end{aligned}$$

δηλαδή $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=1}^n \frac{x}{1+k^2x^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} \right| \geq \frac{1}{5} > 0$.