

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εξέταση στο “Απειροστικός Λογισμός ΙΙ” (ΜΥ 21)

27/06/2025

ΘΕΜΑ 1 [1/10]

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μονότονη. Δείξτε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Λύση: Άσκηση 7.3 στις σελίδες 110-111.

ΘΕΜΑ 2 [2/10]

(i) Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμες. Δείξτε ότι

$$\int_a^b |fg| \leq \left(\int_a^b f^2 \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2 \right)^{1/2}.$$

(ii) Δείξτε ότι αν η $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και $f(0) = 0$, τότε

$$\int_0^1 f^2 \leq \int_0^1 (f')^2.$$

Λύση: (i) Άσκηση 7.26 στη σελίδα 120.

(ii) Άσκηση 7.27 στη σελίδα 120, αφού παρατηρήσουμε πρώτα ότι

$$\int_0^1 f^2 \leq \sup_{x \in [0,1]} f^2(x).$$

ΘΕΜΑ 3 [1/10]

Υπολογίστε τα

$$(i) \int_0^{\pi/4} \frac{(\sin x)^{2024}}{(\cos x)^{2026}} dx,$$

$$(ii) \int_1^e (\log x)^2 dx.$$

Λύση: (i) Με την αλλαγή μεταβλητής $\tan x = y$:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{(\sin x)^{2024}}{(\cos x)^{2026}} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{(\tan x)^{2024}}{(\cos x)^2} dx = \int_0^1 y^{2024} dy = \frac{1}{2025}.$$

(ii) Με παραγοντική ολοκλήρωση δύο φορές:

$$\begin{aligned} \int_1^e (x)'(\log x)^2 dx &= -2 \int_1^e \log x dx + [x(\log x)^2]_{x=1}^{x=e} = -2 \int_1^e (x)' \log x dx + e \\ &= 2(e-1) - 2[x \log x]_{x=1}^{x=e} + e = e - 2. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4 [I/IO]

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι περιττή, δηλ. $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι

$$\int_{-a}^a f = 0 \quad \forall a > 0. \quad (*)$$

Ισχύει το αντίστροφο; Δηλαδή αν ισχύει η $(*)$, είναι η f περιττή;

Λύση: Για κάθε $a > 0$ έχουμε

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx. \quad (**)$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $y = -x$ στο πρώτο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους, παίρνουμε

$$\int_{-a}^a f(x) dx = - \int_a^0 f(-y) dy + \int_0^a f(x) dx = \int_a^0 f(y) dy + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

Αν ισχύει η $(*)$ τότε η $(**)$ δίνει

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx \quad \forall a > 0 \Rightarrow - \int_0^{-a} f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx \quad \forall a > 0,$$

και παίρνοντας την παράγωγο ως προς a (χρησιμοποιήστε το 2ο θεώρημα της σελ. 107, δηλ. το 1ο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, καθώς επίσης και τον κανόνα της αλυσίδας), προκύπτει

$$f(-a) = -f(a) \quad \forall a > 0.$$

Αυτό όμως είναι το ίδιο με $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή ότι η f είναι περιττή.

ΘΕΜΑ 5 [I/IO]

Έστω I ένα ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ και $\{f_n : I \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο I . Αν οι f_n , $n \in \mathbb{N}$, είναι συνεχείς στο $x_0 \in I$, δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 .

Λύση: Απόδειξη του πρώτου Θεωρήματος στη σελίδα 126.

ΘΕΜΑ 6 [2,5/IO]

(A) Έστω $\{f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες και $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

(B) Έστω $\{f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ με

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{x + n}.$$

- (i) Βρείτε το κατα σημείο όριο $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ της $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
- (ii) Συγκλίνει η $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ομοιόμορφα στην f στο $[0, 1]$;
- (iii) Υπολογίστε το όριο της $\{\int_0^1 f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Λύση: (A) Απόδειξη του δεύτερου Θεωρήματος στη σελίδα 126.

(B) (i) Επειδή για κάθε $x \in [0, 1]$ έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ne^{-x} + x^2}{x + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-x} + \frac{x^2}{n}}{\frac{x}{n} + 1} = \frac{e^{-x} + 0}{0 + 1} = e^{-x},$$

το κατα σημείο όριο της $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in [0, 1]$, είναι η $f(x) = e^{-x}$.

(ii) Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} \frac{|x - e^{-x}|}{x + n} \leq \frac{1}{n} \sup_{x \in [0, 1]} |x - e^{-x}| = \frac{1}{n} M,$$

η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

(iii) Λόγω του (A) έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f = -[e^{-x}]_{x=0}^{x=1} = 1 - 1/e$.

ΘΕΜΑ 7 [2/10]

(i) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2(n+1))^n}{n!} x^n,$$

$$(b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n}.$$

Επίσης να υπολογίσετε το άθροισμα στο (b).

(ii) Για τις διάφορες τιμές του $p \in [1, \infty)$, εξετάστε την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς στο $[0, \infty)$ και τη συνέχεια της f , όταν

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{n^p + x^2 n}.$$

Λύση: (i) (a) Είναι $a_n := \frac{(2(n+1))^n}{n!} \neq 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, επομένως η ακτίνα σύγκλισης R δίνεται από τον τύπο $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ (βλ. πρώτο θεώρημα στη σελίδα 139). Αλλά,

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{(2(n+1))^n}{n!} \frac{(n+1)!}{(2(n+2))^{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \right)^n \frac{n+1}{n+2}.$$

Επομένως, $R = \frac{1}{2} \frac{e}{e^2} = 1/(2e)$.

(b) Από το παράδειγμα 3 στη σελίδα 139, η δυναμοσειρά $\sum y^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης 1. Για $y = (x/2)^2$, παίρνουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum \frac{x^{2n}}{4^n}$ έχει ακτίνα σύγκλισης 2. Επίσης, $\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y}$ για κάθε $y \in (-1, 1)$. Αυτό δίνει $\sum_{n=1}^{\infty} y^n = \frac{y}{1-y}$ για κάθε $y \in (-1, 1)$. Άρα, για $y = (x/2)^2$, παίρνουμε $\sum \frac{x^{2n}}{4^n} = \frac{x^2}{4-x^2}$ για κάθε $x \in (-2, 2)$.

(ii) Για $p = 1$, η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς είναι η $s_n(x) = \frac{x}{1+x^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, η οποία συγκλίνει μόνο για $x = 0$ (αρμονική σειρά). Για $p > 1$, η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς είναι η $s_n(x) = x \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p + x^2 k}$. Σύμφωνα με το κριτήριο Weierstraß (πάρτε $M_n = \frac{1}{n^p}$), η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p + x^2 n}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Επομένως, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^p + x^2 n}$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ