

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εξέταση στο “Απειροστικός Λογισμός ΙΙ” (ΜΥ 21)

08/09/2025

ΘΕΜΑ 1 [1/10]

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

ΘΕΜΑ 2 [2/10]

(i) Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμες. Δείξτε ότι

$$\int_a^b |fg| \leq \left(\int_a^b f^2 \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2 \right)^{1/2}.$$

(ii) Δείξτε ότι αν η $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και $f(0) = 0$, τότε

$$\left(\int_0^1 |f|^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_0^1 (f')^2 \right)^{1/2},$$

όπου $p > 0$.

ΘΕΜΑ 3 [1/10]

Υπολογίστε τα

(i) $\int_e^\pi e^x \cos(2e^x + 1) dx,$

(ii) $\int_0^1 x \arctan x dx.$

ΘΕΜΑ 4 [1/10]

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι άρτια, δηλ. $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι

$$\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f \quad \forall a > 0. \quad (*)$$

Ισχύει το αντίστροφο; Δηλαδή αν ισχύει η $(*)$, είναι η f άρτια;

ΘΕΜΑ 5 [1/10]

Έστω I ένα ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ και $\{f_n : I \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο I . Αν οι f_n , $n \in \mathbb{N}$, είναι συνεχείς στο $x_0 \in I$, δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 .

ΘΕΜΑ 6 [2/10]

- (A) Έστω $\{f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες και $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

- (B) Έστω $\{f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ με

$$f_n(x) = (-1)^n \left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

- (i) Δείξτε ότι η $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει για κανένα $x \in [0, 1]$.
(ii) Βρείτε το κατά σημείο όριο f της $\{|f_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ και δείξτε ότι η $\{|f_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[0, 1]$;
(iii) Υπολογίστε το όριο της $\{\int_0^1 |f_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$.

ΘΕΜΑ 7 [2/10]

- (i) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} \left(\frac{x}{e}\right)^n,$$

$$(b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\pi}\right)^n.$$

Επίσης να υπολογίσετε το άθροισμα στο (b).

- (ii) Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2 x^2}, \quad x > 0.$$

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ