

Σ.Δ.Ε. Χειμερινό 25-26 - Σύνοψη

1 Προαπαιτούμενα από τον απειροστικό λογισμό

(i) Κανόνας της αλυσίδας.

Έστω $f = f(x, y) \in C^1(D)$, όπου D ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, και $g = g(x) \in C^1(I)$, όπου I ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τ.ώ. $(x, g(x)) \in D$ για κάθε $x \in I$. Τότε

$$\frac{d}{dx}f(x, g(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + g'(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \quad \forall x \in I.$$

(ii) Κανόνας του Leibnitz.

Έστω $f = f(x, y) \in C^1(D)$, όπου D ως άνω, και $a = a(x) \in C^1(I)$, $b = b(x) \in C^1(I)$, όπου I ως άνω, τ.ώ. $\forall x \in I$: $a(x) \leq b(x)$ και $(x, t) \in D$, $\forall t \in [a(x), b(x)]$. Τότε

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy \right) = b'(x)f(x, b(x)) - a'(x)f(x, a(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy \quad \forall x \in I.$$

(iii) Θεώρημα του Schwarz: αν $f = f(x, y) \in C^2(D)$, όπου D ως άνω, τότε

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) \quad \forall (x, y) \in D.$$

(iv) Θεώρημα του Fubini: αν $f = f(x, y) \in C(D)$, όπου D ως άνω, τότε

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \quad \forall [a, b] \times [c, d] \subset D.$$

(v) Ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων.

• Έστω $\{g_n \in C(I)\}_{n \in \mathbb{N}}$ και g ορισμένη στο I , όπου I ένα οποιοδήποτε διάστημα του $\mathbb{R}$. Αν $g_n \rightarrow g$ ομοιόμορφα στο I , τότε $g \in C(I)$.

• Έστω $\{g_n \in \mathcal{R}([a, b])\}_{n \in \mathbb{N}}$ ¹ και g ορισμένη στο $[a, b]$. Αν $g_n \rightarrow g$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$, τότε $g \in \mathcal{R}([a, b])$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I g_n = \int_I g$.

¹με $\mathcal{R}([a, b])$ συμβολίζουμε το σύνολο των συναρτήσεων που είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο διάστημα $[a, b]$

2 Εξισώσεις 1ης τάξης

Ορισμός 2.1. Έστω $f : I \times S \rightarrow \mathbb{R}$, όπου S είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και I είναι ένα οποιοδήποτε διάστημα του $\mathbb{R}$ με μη κενό εσωτερικό. Λέμε ότι η $u \in C^1(I)$ λύνει στο I τη σ.δ.ε. πρώτης τάξης

$$y' = f(x, y), \quad (1)$$

όταν $u(x) \in S$ και $u'(x) = f(x, u(x))$ για κάθε $x \in I$.

Παρατήρηση: Αν από την (1) μπορούμε να καταλήξουμε σε μια αλγεβρική εξίσωση των x, y μόνο, τότε θεωρούμε ότι η (1) έχει λυθεί.

2.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

Μάθαμε να λύνουμε την (1) στις ακόλουθες περιπτώσεις

(i) $f(x, y) = a(x)$.

(1ο θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού)

(ii) $f(x, y) = a(x)y + b(x)$ (γραμμική).

(Πολλαπλασιάζουμε με $e^{-A(x)}$, όπου $A \in C^1(I)$ είναι τ.ώ. $A'(x) = a(x)$, και η (1) καταλήγει στην $(e^{-A(x)}y)' = e^{-A(x)}b(x)$ που λύνεται όπως το (i).)

(iii) $f(x, y) = a(x)y + b(x)y^\gamma$ με $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ (Bernoulli).

(Θέτουμε $u = y^{1-\gamma}$ και η (1) καταλήγει σε γραμμική ως προς τη u .)

(iv) $f(x, y) = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ με $c \neq 0$ (Riccati).

(Αν y_1 είναι μια λύση, θέτουμε $v = y - y_1$ και η (1) καταλήγει σε Bernoulli με $\gamma = 2$ ως προς v . Επομένως, θέτοντας $w = (y - y_1)^{-1}$, η (1) καταλήγει σε γραμμική ως προς τη w .)

(v) $f(x, y) = g(x)/h(y)$ (χωριζομένων μεταβλητών).

(Η (1) γράφεται $h(y)y' = g$ και με ολοκλήρωση παίρνουμε την αλγεβρική εξίσωση $H(y) = G(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, όπου H είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο πεδίο ορισμού της με $H' = h$ και $G \in C^1(I)$ με $G' = g$.)

Για την περίπτωση ανισότητας στην περίπτωση (ii) (γραμμική), έχουμε την ακόλουθη χρήσιμη πρόταση της οποίας η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση

Πρόταση 2.2 (Ανισότητα Gronwall). Έστω $\varphi \in C^1(I)$ τέτοια ώστε

$$\varphi'(x) \leq a(x)\varphi(x) + b(x) \quad \forall x \in I,$$

όπου $a, b \in C(I)$ είναι μη αρνητικές. Τότε αν $x_0 \in I$, έχουμε

$$\varphi(x) \leq (\varphi(x_0) + B(x))e^{A(x)} \quad \forall x \in I \text{ με } x > x_0,$$

όπου $A(x) := \int_{x_0}^x a(s) ds$ και $B(x) := \int_{x_0}^x b(s) ds$.

Πόρισμα 2.3. Αν $b(x) = 0$ και $\varphi(x) \geq 0 = \varphi(x_0)$ για κάθε $x \in I$ με $x > x_0$, παίρνουμε ότι $\varphi(x) = 0$ για κάθε $x \in I$ με $x > x_0$.

2.2 ΑΚΡΙΒΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Η εξίσωση (1) γράφεται $f(x, y) - y' = 0$, από όπου φαίνεται ότι είναι ειδική περίπτωση της εξίσωσης

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0, \quad (2)$$

για $M(x, y) = f(x, y)$ και $N(x, y) = -1$.

Ορισμός 2.4. Έστω $R = [a, b] \times [c, d]$ και $M, N : R \rightarrow \mathbb{R}$. Λέμε ότι (2) είναι ακριβής, αν υπάρχει $F \in C^1(R)$ τέτοια ώστε $\partial F/\partial x = M$ και $\partial F/\partial y = N$.

Παράδειγμα 2.5. Οι εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών είναι ακριβείς. Η εξίσωση $2xy + y^2 + (x^2 + 2xy)y' = 0$ δεν είναι χωριζόμενων μεταβλητών αλλήλα είναι ακριβής με $F(x, y) = x^2y + xy^2$.

Από τον κανόνα της αλυσίδας φαίνεται αμέσως ότι αν η (2) είναι ακριβής, τότε μετασχηματίζεται στην αλγεβρική εξίσωση $F(x, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας τα Θεωρήματα των Schwarz και Fubini, προκύπτει το

Θεώρημα 2.6. Όταν $M, N \in C^1(R)$, τότε η εξίσωση (2) είναι ακριβής, αν και μόνο αν $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$.

Ορισμός 2.7. Μια συνάρτηση $v = v(x, y) \in C^1(R)$ λέγεται ολοκληρωτικός παράγοντας για την (2), όταν η εξίσωση

$$(vM)(x, y) + (vN)(x, y)y' = 0,$$

είναι ακριβής.

Από το Θεώρημα 2.6, προκύπτει ότι αν η (2) επιδέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα v , τότε πρέπει

$$v\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial v}{\partial x} - M\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Επομένως,

- (i) αν $p \in C(R)$, όπου $p(x, y) := \frac{1}{N}(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)$, εξαρτάται μόνο από το x , τότε η (2) επιδέχεται τον ολοκληρωτικό παράγοντα $v(x) = e^{P(x)}$, όπου $P \in C^1([a, b])$ είναι τ.ώ. $P' = p$.
- (ii) αν $q \in C(R)$, όπου $q(x, y) := \frac{1}{M}(\partial N/\partial x - \partial M/\partial y)$, εξαρτάται μόνο από το y , τότε η (2) επιδέχεται τον ολοκληρωτικό παράγοντα $v(y) = e^{Q(y)}$, όπου $Q \in C^1([c, d])$ είναι τ.ώ. $Q' = q$.

2.3 ΥΠΑΡΞΗ/ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ

Δοθέντος $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ και $a, b > 0$, ορίζουμε το παραλληλόγραμμο

$$R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b].$$

Έστω $f = f(x, y) \in C(R)$ και θέτουμε

$$M := \max_{(x,y) \in R} |f(x, y)|, \quad h := \min \{a, b/M\}, \quad I_h(x_0) := [x_0 - h, x_0 + h].$$

Θεώρημα 2.8 (Θεώρημα Peano - χωρίς απόδειξη). (i) για το π.α.τ. $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, υπάρχει λύση που ορίζεται στο διάστημα $I_h(x_0)$.

(ii) Το (i) ισχύει για $b = \infty$ (με $h = a$), υπό την προϋπόθεση ότι η f είναι φραγμένη στο $[x_0 - a, x_0 + a] \times \mathbb{R}$.

Με $\boxed{u_0(x) := y_0}$, θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων² $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ που ορίζεται αναδρομικά από τον τύπο

$$\boxed{u_n(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, u_{n-1}(t)) dt, \quad x \in I_h(x_0), \quad n \in \mathbb{N}.}$$

Παρατηρήσεις: (i) Η ακολουθία είναι καλώς ορισμένη διότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in I_h(x_0)$ έχουμε $(x, u_n(x)) \in R$. Πράγματι, έστω $x \in I_h(x_0)$. Τότε $|x - x_0| \leq h$, και³

$$|u_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt \right| \leq \int_{x \wedge x_0}^{x \vee x_0} |f(t, y_0)| dt \leq M|x - x_0| \leq Mh.$$

Αλλά $h \leq b/M$, επομένως $|u_1(x) - y_0| \leq b$, δηλαδή $u_1(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$. Ομοίως για $|u_2(x) - y_0|$, $|u_3(x) - y_0|$, κ.ο.κ. (επαγωγή).

(ii) Προφανώς $u_0 \in C(I_h(x_0))$. Έπειτα, $u_1 \in C(I_h(x_0))$, κ.ο.κ. (επαγωγή). Δηλαδή έχουμε $u_n \in C(I_h(x_0))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Είναι $u_n(x_0) = y_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα 2.9 (Θεώρημα Picard-Lindelöf). Αν επιπλέον η f είναι Lipschitz συνεχής ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, αν δηλαδή

$$\boxed{\exists L > 0 \text{ τ.ώ. } |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in R,} \quad (3)$$

τότε,

(i) η $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο διάστημα $I_h(x_0)$ σε μια μοναδική λύση του π.α.τ. $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

(ii) Το (i) ισχύει για $b = \infty$ (με $h = a$).

²γνωστή ως η ακολουθία διαδοχικών προσεγγίσεων του π.α.τ. $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$

³κάνουμε χρήση του συμβολισμού $x \wedge x_0 := \min\{x_0, x\}$ και $x \vee x_0 := \max\{x_0, x\}$

(iii) Αν για κάθε $a > 0$ έχουμε ότι η $f \in C(\mathbb{R}^2)$ είναι Lipschitz συνεχής ως προς τη δεύτερη μεταβλητή σε κάθε λωρίδα $[x_0 - a, x_0 + a] \times \mathbb{R}$ (με μια σταθερή Lipschitz $L = L(a)$ κάθε φορά), τότε η λύση ορίζεται στο $\mathbb{R}^2$.

Απόδειξη του (i). Αν υπάρχουν δυό λύσεις ψ_1, ψ_2 του π.α.τ. στο $I_h(x_0)$, ορίζουμε την $\psi : I_h(x_0) \rightarrow [0, \infty)$ με τύπο $\psi(x) = (\psi_1(x) - \psi_2(x))^2$. Τότε,

$$\begin{aligned} |\psi'(x)| &= 2|\psi_1(x) - \psi_2(x)||\psi_1'(x) - \psi_2'(x)| \\ &= 2|\psi_1(x) - \psi_2(x)||f(x, \psi_1(x)) - f(x, \psi_2(x))| \\ &\leq 2L\psi(x). \end{aligned}$$

Επομένως, $-2L\psi(x) \leq \psi'(x) \leq 2L\psi(x)$ για κάθε $x \in I_h(x_0)$. Με δυό επιχειρήματα (ένα με την αριστερή ανισότητα και $x < x_0$, και ένα με τη δεξιά ανισότητα για $x > x_0$) ανάλογα αυτού της απόδειξης της ανισότητας Gronwall, παίρνουμε ότι $\psi(x) = 0$ για κάθε $x \in I_h(x_0)$, δηλαδή $\psi_1(x) = \psi_2(x)$ για κάθε $x \in I_h(x_0)$.

Η απόδειξη της σύγκλισης βασίζεται στην ακόλουθη εκτίμηση

$$|u_n(x) - u_{n-1}(x)| \leq ML^{n-1}|x - x_0|^n/n! \quad \forall x \in I_h(x_0), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Για $n = 1$ έχουμε ήδη αποδείξει την (4) στην προηγούμενη παρατήρηση. Έστω ότι η εκτίμηση ισχύει για $n = N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, δηλαδή ότι

$$|u_N(x) - u_{N-1}(x)| \leq ML^{N-1}|x - x_0|^N/N! \quad \forall x \in I_h(x_0).$$

Τότε,

$$\begin{aligned} |u_{N+1}(x) - u_N(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, u_N(t)) - f(t, u_{N-1}(t)) dt \right| \\ &\leq \int_{x \wedge x_0}^{x \vee x_0} |f(t, u_N(t)) - f(t, u_{N-1}(t))| dt \\ &\leq L \int_{x \wedge x_0}^{x \vee x_0} |u_N(t) - u_{N-1}(t)| dt \\ &\leq M \frac{L^N}{N!} \int_{x \wedge x_0}^{x \vee x_0} |t - x_0|^N dt = M \frac{L^N}{(N+1)!} |x - x_0|^{N+1}. \end{aligned}$$

Από την (4) έχουμε ότι για την ακολουθία συναρτήσεων $\{v_n : I_h(x_0) \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ με τύπο $v_n(x) = u_n(x) - u_{n-1}(x)$, ισχύει

$$|v_n(x)| \leq ML^{n-1}h^n/n! \quad \forall x \in I_h(x_0), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Όμως η σειρά με γενικό όρο το δεξιό μέλος συγκλίνει. Πράγματι,

$$\sum_{n=1}^{\infty} M \frac{L^{n-1}}{n!} h^n = \frac{M}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Lh)^n}{n!} = \frac{M}{L} (e^{Lh} - 1).$$

Από το κριτήριο του Weierstraß παίρνουμε ότι η σειρά με μερικό άθροισμα $\sum_{k=1}^n v_k(x)$ συγκλίνει απολύτως και ομοιομόρφως σε μια συνάρτηση $\psi : I_h(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$. Όμως,

$$\sum_{k=1}^n v_k(x) = \sum_{k=1}^n (u_k(x) - u_{k-1}(x)) = u_n(x) - y_0.$$

Επομένως για την ακολουθία $\{u_n \in C(I_h(x_0))\}_{n \in \mathbb{N}}$ έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = y_0 + \psi(x) \quad \text{ομοιόμορφα στο } I_h(x_0).$$

Από γνωστό θεώρημα του Απ. Λογ. II (ποιό;), $y_0 + \psi \in C(I_h(x_0))$, άρα $\psi \in C(I_h(x_0))$. Επειδή η f είναι y -Lipschitz, έχουμε επίσης

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x, u_{n-1}(x)) = f(x, y_0 + \psi(x)) \quad \text{ομοιόμορφα στο } I_h(x_0).$$

Πράγματι, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I_h(x_0)} |f(x, u_{n-1}(x)) - f(x, y_0 + \psi(x))|$

$$\leq L \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I_h(x_0)} |u_{n-1}(x) - (y_0 + \psi(x))| = 0.$$

Από γνωστό θεώρημα του Απ. Λογ. II (ποιό;),

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t, u_{n-1}(t)) dt &= \int_{x_0}^x f(t, y_0 + \psi(t)) dt \quad \forall x \in I_h(x_0) \Rightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n(x) - y_0) &= \int_{x_0}^x f(t, y_0 + \psi(t)) dt \quad \forall x \in I_h(x_0) \Rightarrow \\ \psi(x) &= \int_{x_0}^x f(t, y_0 + \psi(t)) dt \quad \forall x \in I_h(x_0). \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση λέει ότι η ψ είναι παραγωγίσιμη στο $I_h(x_0)$ με

$$\psi'(x) = f(x, y_0 + \psi(x)) \quad \forall x \in I_h(x_0).$$

Με τη σειρά της, η σχέση αυτή μας λέει ότι η ψ' είναι συνεχής στο $I_h(x_0)$, και επίσης ότι η $y_0 + \psi$ είναι λύση του π.α.τ. $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. $\square$

Η επόμενη πρόταση μας δίνει έναν εύκολο τρόπο για να διαπιστώνουμε ότι μια συνάρτηση είναι y -Lipschitz.

Πρόταση 2.10. Αν η $\frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχει στο R , είναι συνεχής και υπάρχει $L > 0$ τ.ώ. $|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)| \leq L$ για κάθε $(x, y) \in R$, τότε ισχύει η (3).

Απόδειξη. Από το 2ο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, για κάθε $(x, y_1), (x, y_2) \in R$ έχουμε

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \int_{y_2}^{y_1} \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt \right| \leq \int_{y_1 \wedge y_2}^{y_1 \vee y_2} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) \right| dt \leq L|y_1 - y_2|.$$

$\square$

3 Εξισώσεις 2ης τάξης

3.1 ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ

Ορισμός 3.1. Δύο συναρτήσεις $\{\phi_1, \phi_2\}$ ορισμένες σε ένα διάστημα I λέγονται γραμμικά εξαρτημένες όταν υπάρχουν $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ με $|c_1| + |c_2| \neq 0$, τ.ώ. $c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) = 0$ για κάθε $x \in I$. Στην αντίθετη περίπτωση λέγονται γραμμικά ανεξάρτητες (γ.α.).

Άρα, $\{\phi_1, \phi_2\}$ είναι γ.α. όταν

$$c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) = 0 \quad \forall x \in I \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = 0.$$

Π.χ. $\{x, x^2\}$ στο $I = \mathbb{R}$, $\{e^{r_1x}, e^{r_2x}\}$ με $r_1 \neq r_2$ στο $\mathbb{R}$, $\{e^{rx}, xe^{rx}\}$ στο $\mathbb{R}$.

Αν πρόκειται για διαφορίσιμες συναρτήσεις, τότε

$$W[\phi_1, \phi_2](x_0) \neq 0 \quad \text{για κάποιο } x_0 \in I \quad \Rightarrow \quad \{\phi_1, \phi_2\} \text{ είναι γ.α. στο } I, \quad (5)$$

όπου για $x \in I$ έχουμε ορίσει

$$W[\phi_1, \phi_2](x) := \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{vmatrix} \quad (\text{ορίζουσα Wronski των } \{\phi_1, \phi_2\}).$$

3.2 Η ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ 2ΗΣ ΤΑΞΗΣ

Έστω I είναι ένα οποιοδήποτε διάστημα του $\mathbb{R}$ με μη κενό εσωτερικό και $a_1, a_2 \in BC(I)$ ⁴. Θεωρούμε τον τελεστή $\mathcal{L} : C^2(I) \rightarrow C(I)$ με τύπο

$$\mathcal{L}(y) := y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y.$$

Πρόταση 3.2. Αν ψ είναι λύση της $\mathcal{L}(y) = 0$ στο I και $x_0 \in I$, τότε

$$\|\psi(x_0)\|e^{-\kappa|x-x_0|} \leq \|\psi(x)\| \leq \|\psi(x_0)\|e^{\kappa|x-x_0|} \quad \forall x \in I,$$

όπου $\|\psi(x)\| := \sqrt{\psi^2(x) + (\psi'(x))^2}$ και $\kappa = \frac{1}{2} \sup_{x \in I} (|1 - a_2(x)| + 2|a_1(x)|)$.

Απόδειξη. Υπολογίζουμε (για ευκολία γράφουμε ψ αντί για $\psi(x)$)

$$\begin{aligned} |(\|\psi\|^2)'| &= |2\psi\psi' + 2\psi'\psi''| \\ &= |2\psi\psi' + 2\psi'(-a_1(x)\psi' - a_2(x)\psi)| \\ &\leq 2|1 - a_2(x)||\psi||\psi'| + 2|a_1(x)|(\psi')^2 \\ &\leq |1 - a_2(x)|(\psi^2 + (\psi')^2) + 2|a_1(x)|(\psi')^2 \\ &= |1 - a_2(x)|\psi^2 + (|1 - a_2(x)| + 2|a_1(x)|)(\psi')^2 \\ &\leq 2\kappa\|\psi\|^2. \end{aligned}$$

Άρα $-2\kappa\|\psi\|^2 \leq (\|\psi\|^2)' \leq 2\kappa\|\psi\|^2$ και με επιχειρήματα (δύο για $x < x_0$ και δύο για $x > x_0$) ανάλογα αυτού της απόδειξης της ανισότητας Gronwall έχουμε το ζητούμενο. $\square$

⁴συμβολίζουμε με $BC(I)$ το σύνολο των $C(I)$ συναρτήσεων που είναι επιπλέον φραγμένες

Πόρισμα 3.3. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ και $a_1, a_2, b \in C(I)$, το π.α.τ.

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y) = b(x), \\ y(x_0) = \alpha, y'(x_0) = \beta, \end{cases}$$

έχει το πολύ μια λύση.

Απόδειξη. Αν ψ_1, ψ_2 είναι δυό λύσεις του π.α.τ. στο I , τότε για την $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $\psi(x) = \psi_1(x) - \psi_2(x)$ έχουμε: $\mathcal{L}(\psi) = 0$ και $\|\psi(x_0)\| = 0$. Έστω $x \in I \setminus \{x_0\}$ και θεωρούμε ένα κλειστό διάστημα J που περιέχει τα x, x_0 . Τότε $a_1, a_2 \in BC(J)$ και από την παραπάνω πρόταση έχουμε αμέσως ότι $\|\psi(x)\| = 0$ για κάθε $x \in J$, δηλαδή $\psi_1(x) = \psi_2(x)$ για κάθε $x \in J$. $\square$

Θεώρημα 3.4. Το αντίστροφο της (5) ισχύει για τις λύσεις της $\mathcal{L}(y) = 0$, δηλαδή,

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\phi_1, \phi_2 \in C^2(I)\} \text{ γ.α. στο } I \\ \mathcal{L}(\phi_1) = \mathcal{L}(\phi_2) = 0 \text{ στο } I \end{array} \right\} \Rightarrow W[\phi_1, \phi_2](x) \neq 0 \quad \forall x \in I.$$

Απόδειξη. Έστω ότι $W[\phi_1, \phi_2](x_0) = 0$ για κάποιο $x_0 \in I$. Τότε το σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} c_1\phi_1(x_0) + c_2\phi_2(x_0) = 0 \\ c_1\phi_1'(x_0) + c_2\phi_2'(x_0) = 0 \end{array} \right\},$$

θα έχει λύση $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$. Θέτουμε $\psi(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$, $x \in I$, και έχουμε $\mathcal{L}(\psi) = 0$, ενώ $\psi(x_0) = \psi'(x_0) = 0$. Από το πόρισμα 3.3 με $b = \alpha = \beta = 0$, έχουμε ότι η ψ πρέπει να ταυτίζεται με τη μηδενική λύση, δηλαδή $c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) = 0$ για κάθε $x \in I$. Επειδή οι ϕ_1, ϕ_2 είναι γ.α. παίρνουμε $c_1 = c_2 = 0$. Αντιφαση! $\square$

Θεώρημα 3.5. Έστω $\{\phi_1, \phi_2\}$ είναι γ.α. λύσεις της $\mathcal{L}(y) = 0$ στο I . Τότε κάθε άθλιη λύση είναι ένας μοναδικός γραμμικός συνδυασμός αυτών.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{L}(\phi) = 0$ στο I και $x_0 \in I$. Θέτουμε $\alpha = \phi(x_0)$ και $\beta = \phi'(x_0)$. Από το Θεώρημα 3.4 έχουμε $W[\phi_1, \phi_2](x_0) \neq 0$, επομένως το σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} c_1\phi_1(x_0) + c_2\phi_2(x_0) = \alpha \\ c_1\phi_1'(x_0) + c_2\phi_2'(x_0) = \beta \end{array} \right\},$$

έχει μοναδική λύση (c_1, c_2) . Θεωρούμε την $\psi(x) := c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$, $x \in I$. Οι ϕ και ψ λύνουν το π.σ.τ.

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y) = 0, \\ y(x_0) = \alpha, y'(x_0) = \beta. \end{cases}$$

Από το Πόρισμα 3.3, για ένα τέτοιο π.α.τ. ξέρουμε ότι υπάρχει το πολύ μία λύση. Άρα $\phi = \psi$, δηλαδή $\phi(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$, $x \in I$. $\square$

Επειδή $\{\cos x, \sin x\}$ είναι γ.α. λύσεις της $y'' + y = 0$ στο $\mathbb{R}$ και e^{ix} είναι λύση της ίδιας εξίσωσης στο $\mathbb{R}$, έχουμε $e^{ix} = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για $x = 0$ παίρνουμε $c_1 = 1$, ενώ παραγωγίζοντας: $ie^{ix} = -\sin x + C_2 \cos x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για $x = 0$ παίρνουμε $c_2 = i$. Αποδείξαμε λοιπόν τον τύπο

Πόρισμα 3.6 (τύπος του Euler).

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Θεώρημα 3.7. Έστω $\{\phi_1, \phi_2\}$ είναι γ.α. λύσεις της $\mathcal{L}(y) = 0$ στο I , και $b \in C(I)$, $x_0 \in I$. Τότε κάθε λύση της $\mathcal{L}(y) = b(x)$ στο I γράφεται ως $c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + y_p$, όπου

$$y_p(x) = \int_{x_0}^x \frac{\phi_1(s)\phi_2(x) - \phi_1(x)\phi_2(s)}{W[\phi_1, \phi_2](s)} b(s) ds.$$

Αντιστρόφως, κάθε συνάρτηση της παραπάνω μορφής είναι λύση της $\mathcal{L}(y) = b(x)$ στο I .

Απόδειξη. Η συνάρτηση y_p λέγεται ειδική λύση της εξίσωσης $\mathcal{L}(y) = b(x)$ στο I . Προκύπτει ζητώντας η $y_p = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2$ με $u_1, u_2 \in C^2(I)$, να είναι λύση της $\mathcal{L}(y) = 0$ στο I , και παίρνοντας τις u_1, u_2 να ικανοποιούν την εξίσωση $u_1' \phi_1 + u_2' \phi_2 = 0$. Αυτό οδηγεί τις $\{u_1, u_2\}$ να είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} u_1' \phi_1 + u_2' \phi_2 = 0 \\ u_1' \phi_1' + u_2' \phi_2' = b(x). \end{cases}$$

Επειδή $W[\phi_1, \phi_2](x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$, το σύστημα έχει μοναδική λύση. $\square$

Πρόταση 3.8. Αν ϕ_1, ϕ_2 είναι λύσεις της $\mathcal{L}(y) = 0$ στο I και $x_0 \in I$, τότε

$$W[\phi_1, \phi_2](x) = e^{-A_1(x)} W[\phi_1, \phi_2](x_0) \quad \forall x \in I,$$

όπου $A_1(x) := \int_{x_0}^x a_1(s) ds$.

Απόδειξη. Υπολογίζουμε (για ευκολία γράφουμε W αντί για $W[\phi_1, \phi_2](x)$)

$$\begin{aligned} W' &= (\phi_1 \phi_2' - \phi_1' \phi_2)' \\ &= \phi_1' \phi_2' + \phi_1 \phi_2'' - \phi_1'' \phi_2 - \phi_1' \phi_2' \\ &= \phi_1(-a_1 \phi_2' - a_2 \phi_2) + (a_1 \phi_1' + a_2 \phi_1) \phi_2 \\ &= -a_1 \phi_1 \phi_2' + a_1 \phi_1' \phi_2 \\ &= -a_1 W. \end{aligned}$$

Άρα $W' = -a_1 W$, η οποία λύνεται κατά τα γνωστά (γραμμική 1ης τάξης). $\square$

3.3 Η ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ 2ΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Υποθέτουμε εδώ ότι

$$a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2.$$

Τότε $\mathcal{L}(e^{rx}) = p(r)e^{rx}$, όπου $p(r) := r^2 + a_1 r + a_2$. Το $p(r)$ λέγεται *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* (χ.π.) του $\mathcal{L}$. Προφανώς, $\mathcal{L}(e^{rx}) = 0$ αν και μόνο αν $p(r) = 0$. Θέτουμε

$$\Phi_1(x) := e^{r_1 x}, \quad \Phi_2(x) := e^{r_2 x} \text{ όταν οι ρίζες του χ.π. είναι } r_1 \neq r_2,$$

$$\text{ή } \Phi_1(x) := e^{r_1 x}, \quad \Phi_2(x) := x e^{r_1 x} \text{ όταν } r_1 = r_2.$$

Πρόταση 3.9. Σε κάθε περίπτωση, οι $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ είναι γ.α. λύσεις της $\mathcal{L}(y) = 0$ στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έυκολα βλέπουμε ότι όταν οι ρίζες του χ.π. είναι $r_1 \neq r_2$, τότε $W[\Phi_1, \Phi_2](x) = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)x} \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ενώ όταν οι ρίζες του χ.π. είναι $r_1 = r_2$, τότε $W[\Phi_1, \Phi_2](x) = e^{2r_1x} \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ο ισχυρισμός έπεται από την (5). $\square$

Πρόταση 3.10. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $x_0 \in I$, το π.α.τ.

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y) = 0, \\ y(x_0) = \alpha, y'(x_0) = \beta, \end{cases} \quad (6)$$

έχει μοναδική λύση, η οποία είναι της μορφής $c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x)$ για μονοσήμαντα ορισμένα $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Για τη μοναδικότητα: προκύπτει από το Πόρισμα 3.3 για $b = 0$. Για την ύπαρξη: υπάρχουν μοναδικά $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ τ.ώ. η $\phi(x) = c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x)$ να λύνει το π.α.τ. (6). Πράγματι, $\mathcal{L}(\phi) = 0$ και το σύστημα

$$\left. \begin{matrix} \phi(x_0) = \alpha \\ \phi'(x_0) = \beta \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} c_1\Phi_1(x_0) + c_2\Phi_2(x_0) = \alpha \\ c_1\Phi_1'(x_0) + c_2\Phi_2'(x_0) = \beta \end{matrix} \right\},$$

έχει μοναδική λύση, αν και μόνο αν $W[\Phi_1, \Phi_2](x_0) \neq 0$, το οποίο όπως είδαμε στην προηγούμενη απόδειξη είναι αληθές. $\square$

Με τις $\{\Phi_1, \Phi_2\}$, το Θεώρημα 3.5 γράφεται

Θεώρημα 3.11. Για κάθε $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, η $\phi(x) := c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x)$ είναι λύση της $\mathcal{L}(y) = 0$ στο $\mathbb{R}$. Αντιστρόφως, αν $\mathcal{L}(\phi) = 0$ στο $\mathbb{R}$, τότε υπάρχουν μοναδικοί $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $\phi(x) := c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πόρισμα 3.12. Το Θεώρημα 3.7 σε συνδυασμό με την Πρόταση 3.9 λένε ότι η λύση της $\mathcal{L}(y) = b(x)$ στο I γράφεται

$$c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} + \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{x_0}^x (e^{r_2(x-s)} - e^{r_1(x-s)})b(s) \, ds,$$

όταν έχουμε δύο ρίζες $r_1 \neq r_2$ του χ.π., και

$$c_1e^{r_1x} + c_2xe^{r_1x} + \int_{x_0}^x (x-s)e^{r_1(x-s)}b(s) \, ds,$$

όταν r_1 είναι διπλή ρίζα του χ.π..

3.4 Η ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ 2ΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Υποθέτουμε τώρα ότι τα a_1, a_2 είναι συνεχείς συναρτήσεις. Για να εξάγουμε ανάλογα συμπεράσματα με αυτά της προηγούμενης παραγράφου, χρειάζεται να αποδείξουμε την ύπαρξη λύσης στο π.α.τ. με την ομογενή εξίσωση. Χρειαζόμαστε δηλαδή το ανάλογο της πρότασης 3.10. Στην περίπτωση $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ κάναμε χρήση των λύσεων που προέκυψαν από το χ.π., που τώρα όμως δεν έχουμε στη διάθεσή μας.

Πρόταση 3.13. *Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $x_0 \in I$, το π.α.τ.*

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y) = 0, \\ y(x_0) = \alpha, \quad y'(x_0) = \beta, \end{cases} \quad (7)$$

έχει μοναδική λύση.

Απόδειξη. Θέτουμε $y_1 = y, y_2 = y'$ και η εξίσωση γράφεται ως σύστημα

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2(x) & -a_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

ενώ οι αρχικές συνθήκες είναι τώρα $y_1(x_0) = \alpha, y_2(x_0) = \beta$. Η ύπαρξης λύσης έρχεται τώρα από το θεώρημα ύπαρξης για συστήματα εξισώσεων πρώτης τάξης, το οποίο θα δούμε παρακάτω. $\square$

Θεώρημα 3.14. (i) *Υπάρχουν δύο γ.α. λύσεις $\{\phi_1, \phi_2\}$ της $\mathcal{L}(y) = 0$ στο I .*

(ii) *Κάθε άληθη λύση γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\{\phi_1, \phi_2\}$.*

Απόδειξη. (i) Έστω $x_0 \in I$. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει μια λύση ϕ_1 του π.α.τ.

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y) = 0, \\ y(x_0) = 1, \quad y'(x_0) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

και υπάρχει μια λύση ϕ_2 του π.α.τ.

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y) = 0, \\ y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 1, \end{cases} \quad (9)$$

Οι $\{\phi_1, \phi_2\}$ είναι γ.α.. Πράγματι, αν $c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) = 0$ για κάθε $x \in I$, τότε $c_1\phi_1'(x) + c_2\phi_2'(x) = 0$ για κάθε $x \in I$. Για $x = x_0$ οι ισότητες αυτές μας δίνουν $c_1 = 0$ και $c_2 = 0$ αντιστοίχως.

(ii) Έστω $\mathcal{L}(\phi) = 0$ στο I και $x_0 \in I$. Θέτουμε $\alpha = \phi(x_0)$ και $\beta = \phi'(x_0)$. Ορίζουμε την $\psi(x) = \alpha\phi_1(x) + \beta\phi_2(x)$, $x \in I$, όπου ϕ_1, ϕ_2 είναι οι λύσεις των (8), (9) αντιστοίχως. Τότε $\mathcal{L}(\psi) = 0 = \mathcal{L}(\phi)$ στο I , και $\psi(x_0) = \alpha = \phi(x_0)$, $\psi'(x_0) = \beta = \phi'(x_0)$. Από το Πόρισμα 3.3, $\phi = \psi$, δηλαδή $\phi(x) = \alpha\phi_1(x) + \beta\phi_2(x)$, $x \in I$. $\square$

Θεώρημα 3.15. Αν γνωρίζουμε μια λύση ϕ_1 της ομογενούς εξίσωσης και $\phi_1(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$, τότε μια δεύτερη λύση δίνεται από τον τύπο

$$\phi_2(x) = \phi_1(x) \int_{x_0}^x \phi_1^{-2}(s) e^{-A_1(s)} \, ds, \quad x \in I,$$

όπου $A_1(s) := \int_{x_0}^s a_1(t) \, dt$. Επιπλέον, οι $\{\phi_1, \phi_2\}$ είναι γ.α..

Απόδειξη. Καταλήγουμε στον παραπάνω τύπο αν αναζητήσουμε λύση της μορφής $\phi_2 = u\phi_1$ (άσκηση). Φυσικά για την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί να ελέγξουμε απευθείας τους ισχυρισμούς (άσκηση). $\square$