

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις - Χειμερινό 2025

Τέταρτο Σει Ασκήσεων

Άσκηση 1 [εξίσωση Clairaut]

Έστω $f \in C^1(I)$ και θεωρούμε την εξίσωση $y = xy' + f(y')$ (εξ. Clairaut-1734).

- (i) Δείξτε ότι η $\phi(x) = ax + f(a)$, $x \in I$, είναι λύση για οποιοδήποτε $a \in I$ (η λύση αυτή ονομάζεται *γενική* λύση της εξ. Clairaut).
- (ii) Έστω $\psi \in C^2(I)$ είναι τέτοια ώστε $f'(\psi') = -x$. Δείξτε ότι υπάρχει λύση της μορφής $\psi + c$, $c \in \mathbb{R}$ (η λύση αυτή ονομάζεται *ιδιάζουσα* λύση της εξ. Clairaut).
- (iii) Βρείτε τις ϕ και ψ των ερωτημάτων (i) και (ii) όταν $f(t) = -\ln t$, $t \in (0, \infty)$.

Άσκηση 2

Να λύσετε τις εξισώσεις Clairaut (βρείτε δηλ. γενική και ιδιάζουσα λύση)

- (i) $e^{y'} + xy' - y = 0$.
- (ii) $(y')^3 - xy' + y = 0$.

Άσκηση 3

Να λυθούν οι:

- (i) $4y'' - y = e^x$,
- (ii) $y'' + y = \tan x$ ($-\pi/2 < x < \pi/2$),
- (iii) $y'' - 4y' + 5y = 3e^{-x} + 2x^2$.

Άσκηση 4

- (i) Μια λύση της $x^2y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = 0$ είναι η $\phi_1(x) = x \cos x$. Βρείτε όλες τις λύσεις στο $(0, \infty)$.
- (ii) Μια λύση της $4x^2y'' - 8xy' + 9y = 0$ είναι η $\phi_1(x) = x^{3/2}$. Βρείτε όλες τις λύσεις στο $(0, \infty)$.
- (iii) Μια λύση της $x^2y'' - 2y = 0$ στο $(0, \infty)$ είναι η $\phi_1(x) = x^2$. Βρείτε όλες τις λύσεις της $x^2y'' - 2y = 2x - 1$ στο $(0, \infty)$.
- (iv) Μια λύση της $x^2y'' - xy' + y = 0$ στο $(0, \infty)$ είναι η $\phi_1(x) = x$. Βρείτε τη λύση ψ της $x^2y'' - xy' + y = x^2$ στο $(0, \infty)$ που ικανοποιεί τις $\psi(1) = \psi'(1) = 1$.

Άσκηση 5

Έστω ϕ_1, ϕ_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$$

όπου $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η $W[\phi_1, \phi_2]$ είναι σταθερή αν και μόνο αν $a_1 = 0$.

Άσκηση 6

(i) Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $\phi_1(x) = x^2$ και $\phi_2(x) = x|x|$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες στο $\mathbb{R}$.

(ii) Υπολογίστε τη $W[\phi_1, \phi_2](x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 7

Να λυθούν οι:

(i) $xy'' - 2y' = x^3,$

(ii) $y'' + e^x y' = e^x,$

(iii) $y^2 y'' = y',$

(iv) $y'' = yy',$

(v) $2y^2 y'' = -1 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$