

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις - Χειμερινό 2025

Τρίτο Σετ Ασκήσεων

Άσκηση 1 (ανισότητα Gronwall για την εξίσωση Bernoulli)

Έστω $\varphi \in C^1(I)$ τέτοια ώστε

$$\varphi'(x) \leq a(x)\varphi(x) + b(x)\varphi^\gamma(x) \quad \forall x \in I,$$

όπου είτε $\gamma < 1$ και $a, b \in C(I)$ είναι μη αρνητικές, ή $\gamma > 1$ και $a, b \in C(I)$ είναι μη θετικές. Τότε αν $x_0 \in I$, έχουμε

$$\frac{1}{1-\gamma}(\varphi(x))^{1-\gamma} \leq \left(\frac{1}{1-\gamma}(\varphi(x_0))^{1-\gamma} + B(x) \right) e^{(1-\gamma)A(x)} \quad \forall x \in I \text{ με } x > x_0,$$

όπου $A(x) := \int_{x_0}^x a(s) \, ds$ και $B(x) := \int_{x_0}^x b(s) \, ds$.

Υπόδειξη: Μετατρέψτε την ανισότητα σε γραμμική, όπως στην εξίσωση Bernoulli. Έπειτα χρησιμοποιήστε την αν. Gronwall.

Άσκηση 2

Αποδείξτε τη μοναδικότητα στο θεώρημα Picard-Lindelöf χρησιμοποιώντας τη $\varphi(x) = |\psi_1(x) - \psi_2(x)|$ (αντί της $\varphi(x) = (\psi_1(x) - \psi_2(x))^2$).

Άσκηση 3 (συνθήκη Osgood)

Έστω $f = f(x, y) \in C(R)$ και $g \in C([0, \infty))$ με $g(t) > 0 = g(0)$ για κάθε $t > 0$, τέτοιες ώστε

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq g(|y_1 - y_2|) \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in R.$$

Αν υπάρχει $\ell > 0$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^\ell \frac{1}{g(t)} \, dt = \infty,$$

αποδείξτε ότι υπάρχει το πολύ μια λύση για το π.α.τ. $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη φ της Άσκησης 2.

Άσκηση 4

Εξετάστε αν οι παρακάτω εξισώσεις έχουν λύση (μοναδική) σε κάποια περιοχή της αρχικής συνθήκης που τα συνοδεύει:

(i) $y' = \sin(xy), \quad y(0) = 1,$

(ii) $y' = (x + y)x^2y^2, \quad y(0) = 1,$

(iii) $y' = e^x + \frac{x}{y}, \quad y(0) = 1.$

Άσκηση 5

Εξετάστε, για τις διάφορες τιμές των x_0, y_0 , αν το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών έχει μοναδική λύση σε κάποια περιοχή της αρχικής συνθήκης:

$$(x^2 - 2x)y' = 2(x - 1)y, \quad y(x_0) = y_0.$$