

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις - Χειμερινό 2025

Πρώτο Σετ Ασκήσεων

Άσκηση 1

Βρείτε όλες τις λύσεις των παρακάτω εξισώσεων:

$$(i) \quad y' = e^{3x} + \sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(ii) \quad y' = e^{3x} \sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(iii) \quad y' = \frac{1}{2+x}, \quad x \in (-2, \infty),$$

$$(iii) \quad y' = \ln(2+x), \quad x \in (-2, \infty).$$

Άσκηση 2

Θεωρήστε την εξίσωση $y'' = 3x + 1$ στο $[0, 1]$.

(i) Να βρείτε όλες τις λύσεις της.

(ii) Να βρείτε τη λύση που ικανοποιεί τις $\phi(0) = 1$ και $\phi'(0) = 2$.

(iii) Να βρείτε τη λύση που ικανοποιεί τις $\phi(0) = 0$ και $\phi(1) = 3$.

Άσκηση 3

Επαληθεύστε ότι οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι λύσεις των σ.δ.ε. που τις συνοδεύουν:

$$(i) \quad \psi(x) = e^{-\sin x}, \quad y' + (\cos x)y = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(ii) \quad \phi(x) = \sin x - 1, \quad y' + (\cos x)y = \sin x \cos x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(iii) \quad \omega(x) = \sin x - 1 + e^{-\sin x}, \quad y' + (\cos x)y = \sin x \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 4

Θεωρήστε την σ.δ.ε. $y' + 5y = 2$ στο $\mathbb{R}$.

(i) Δείξτε ότι κάθε συνάρτηση της μορφής $\phi(x) = \frac{2}{5} + ce^{-5x}$ με $c \in \mathbb{R}$, είναι λύση.

(ii) Βρείτε τη λύση της παραπάνω μορφής για την οποία $\phi(1) = 2$.

(iii) Βρείτε τη λύση της παραπάνω μορφής για την οποία $\phi(1) = 3\phi(0)$.

Άσκηση 5

Θεωρήστε την σ.δ.ε. $x^2 y' + 2xy = 1$ στο $(0, \infty)$.

(i) Δείξτε ότι κάθε λύση της συγκλίνει στο 0 καθώς το x τείνει στο ∞ .

(ii) Βρείτε την λύση ϕ που ικανοποιεί την $\phi(2) = 2\phi(1)$.

Άσκηση 6

Θεωρήστε την σ.δ.ε. $y' + (\cos x)y = e^{-\sin x}$ στο $\mathbb{R}$.

(i) Βρείτε την λύση ϕ που ικανοποιεί την $\phi(\pi) = \pi$.

(ii) Δείξτε ότι κάθε λύση της ϕ έχει την ιδιότητα $\phi(\pi k) - \phi(0) = \pi k$, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 7

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

(i) $y' - y \tan x = 4$,

(ii) $y' = \frac{1}{x}(1 + y^2)$,

(iii) $y' = \frac{(2x-1)y}{x}$,

(iv) $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = 4x^3$,

(v) $y' + (1 + x^2)^{-1}y = e^{-\arctan x}$,

(vi) $y' = 2(x - y)^{-1} - 3$,

(vii) $y'\sqrt{xy} = x + 4$,

(ix) $y' + 2 \sin(2x)y = 2 \sin(2x)$.

Άσκηση 8

Να βρείτε μη-τετριμμένες λύσεις στις παρακάτω εξισώσεις Bernoulli:

(i) $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

(ii) $y' + y^2 = \frac{y}{x}$.

(iii) $xy' + y = x^2y^2$

(iv) $2xy' - (x + 1)y + 6y^3 = 0$.

Άσκηση 9

Να βρείτε λύσεις για τις παρακάτω εξισώσεις Riccati, αφού τις μετατρέψετε σε Bernoulli με χρήση της δωθείσας λύσης y_1 (για κατάλληλες τιμές των παραμέτρων α, β):

(i) $y' = (x + y)^2 - 2$, $y_1(x) = \alpha - x$.

(ii) $y' + 2y^2 = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$, $y_1(x) = \alpha x^\beta$.

(iii) $y' + e^{-x}y^2 - y - e^x = 0$, $y_1(x) = \alpha e^{\beta x}$.

(iv) $-y' + y^2 = \frac{2}{x^2}$, $y_1(x) = ?$.

Άσκηση 10

Δείξτε ότι η αλλαγή μεταβλητών $z = \frac{e^x}{y}$ μετατρέπει την εξίσωση

$$y' = -e^x + y + e^{-x}y^2,$$

στην εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών $z' = z^2 - 1$, την οποία και να λύσετε.

Άσκηση 11

Δείξτε ότι η αλλαγή μεταβλητών $y = xu$ μετατρέπει την εξισώσεις που δίνονται σε εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών, τις οποίες και να λύσετε:

(i) $(x - y)y' = x + y,$

(ii) $(xy + x^2)y' = y^2,$

(iii) $x^2y' = x^2 + xy + y^2,$

(iv) $xy' = y + e^{-2y/x}.$