

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

16/06/25 - Εξεταζόμενο μάθημα (εμβόλιμα): “Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις” (ΜΥ 33)

ΘΕΜΑ 1 [I/IO]

Θέτοντας $u = x - y$ και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών, βρείτε λύση για την εξίσωση: $y' = 2(x - y)^{-1} - 3$.

Λύση: Μια λύση $y = y(x)$ θα πρέπει να ικανοποιεί την $y(x) \neq x$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της. Θέτοντας τώρα $u = x - y$ η εξ. γράφεται

$$\begin{aligned} 1 - u' &= 2/u - 3 \Rightarrow u' = \frac{4u - 2}{u} \Rightarrow \frac{uu'}{2u - 1} = 2 \Rightarrow \int \frac{uu'}{2u - 1} dx = \int 2 dx \\ \Rightarrow \int \frac{u}{2u - 1} du &= 2x + c \Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{2u - 1 + 1}{2u - 1} du = 2x + c \\ \Rightarrow \int \left(1 + \frac{1}{2u - 1}\right) du &= 4x + 2c \Rightarrow u + \ln |2u - 1| = 4x + 2c. \end{aligned}$$

Επομένως η u ορίζεται πεπλεγμένα από την εξίσωση $2u - 1 = \pm e^{2c} e^{4x-u}$, δηλαδή η λύση ορίζεται πεπλεγμένα από τις εξισώσεις $2x - 2y - 1 = Ce^{3x+y}$ και $y \neq x$. ■

ΘΕΜΑ 2 [I/IO]

Να λύσετε τη γραμμική εξίσωση: $y' + (1 + x^2)^{-1}y = e^{-\arctan x}$.

Λύση: Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι $e^{\int (1+x^2)^{-1} dx} = e^{\arctan x}$, και πολλαπλασιάζοντας την εξ. με αυτόν, παίρνουμε $(ye^{\arctan x})' = 1 \Rightarrow ye^{\arctan x} = x + c \Rightarrow y = (x + c)e^{-\arctan x}$. ■

ΘΕΜΑ 3 [I/IO]

Να βρείτε λύση για την εξίσωση τύπου Bernoulli: $xy' - 2y + x^3y^2 = 0$.

Λύση: Θέτοντας $y = z^{-1}$, η εξ. γράφεται $xz' + 2z = x^3$. Πολλαπλασιάζοντας με x παίρνουμε $(x^2z)' = x^4 \Rightarrow x^2z = x^5/5 + c \Rightarrow z = x^3/5 + c/x^2$, επομένως $y = (x^3/5 + c/x^2)^{-1}$, $x \neq 0$. ■

ΘΕΜΑ 4 [2/IO]

(i) Να βρείτε λύση για την εξίσωση τύπου Riccati: $2y' = y^2 - x^2 - 2$.

(ii) Υπολογίστε τους 2 πρώτους όρους της προσεγγιστικής ακολουθίας του Picard για το πρόβλημα αρχικών τιμών: $2y' = y^2 - x^2 - 2$, $y(0) = 0$.

Λύση: (i) Προφανής λύση $y_1 = -x$. Θέτοντας $u = y - y_1 = y + x$, η εξ. γράφεται $u' + xu = u^2/2$ που είναι τύπου Bernoulli. Θέτοντας $u = z^{-1}$, η εξ. γράφεται $z' - xz = -\frac{1}{2}$. Πολλαπλασιάζοντας με $e^{-x^2/2}$ παίρνουμε $(e^{-x^2/2}z)' = -e^{-x^2/2}/2 \Rightarrow e^{-x^2/2}z = c - \frac{1}{2} \int e^{-x^2/2} dx$. Επομένως, $u = 2e^{-x^2/2}(c - \int e^{-x^2/2} dx)^{-1} \Rightarrow y = 2e^{-x^2/2}(c - \int e^{-x^2/2} dx)^{-1} - x$.

(ii) Είναι $y_n(x) = 0 + \int_0^x f(t, y_{n-1}(t)) dt$, $n \in \mathbb{N}$, $y_0(x) = 0$. Άρα,

- $y_1(x) = 0 + \int_0^x (-t^2/2 - 1) dx = -x^3/6 - x$, και

- $y_2(x) = 0 + \int_0^x ((-t^3/6 - t)^2/2 - t^2/2 - 1) dx = \dots$ ■

ΘΕΜΑ 5 [I/IO]

Σε μια περιοχή της αρχικής συνθήκης που τα συνοδεύει, εξετάστε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών ως προς την ύπαρξη-μοναδικότητα λύσεων.

$$(i) \quad y' = \frac{\cos y}{1-x^2}, x \in [0, 1), \text{ και } y(0) = 4,$$

$$(ii) \quad y' = y^{1/3}, x \in [0, \infty), \text{ και } y(0) = 0.$$

Λύση:

(i) Έστω $a \in [0, 1]$, $b > 0$ και θέτουμε $f(x, y) := \cos y / (1 - x^2)$ στο $R_{a,b} := [-a, a] \times [4 - b, 4 + b]$. Η f είναι προφανώς συνεχής και $|\partial f / \partial y| \leq 1 / (1 - a^2)$, επομένως είναι y -Lipschitz στο $R_{a,b}$. Επομένως υπάρχει $a' \in (0, a]$ τ.ώ. το π.α.τ. να έχει μοναδική λύση στο $[-a', a']$ (αρα και στο $[0, a']$).

(ii) Οι $y(x) = 0$ και $y(x) = (2x/3)^{3/2}$, είναι λύσεις στο $[0, \infty)$. ■

ΘΕΜΑ 6 [I/IO]

Να βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης: $y'' - 2y' + y = x^2$.

Λύση: Η δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς είναι οι $\phi_1 = e^x$ και $\phi_2 = xe^x$. Κατα τα γνωστά, για να βρούμε μια ειδική λύση της μορφής $y_p = u_1\phi_1 + u_2\phi_2$, λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} \phi_1 u_1' + \phi_2 u_2' = 0 \\ \phi_1' u_1 + \phi_2' u_2 = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1' + x u_2' = 0 \\ u_1' + (1+x) u_2' = x^2 e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1' = -x^3 e^{-x} \\ u_2' = x^2 e^{-x}. \end{cases}$$

Βρίσκουμε $y_p = x^2 + 4x + 6$, άρα $y = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + y_p = \dots$ ■

ΘΕΜΑ 7 [I/IO]

Να βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης: $xy'' - y' + (1-x)y = 4x^2e^x$, $x > 0$.

Λύση: Μια λύση της ομογενούς είναι οι $\phi_1 = e^x$. Κατα τα γνωστά, εφόσον $\phi_1(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I = (0, \infty)$, η δεύτερη λύση της ομογενούς δίνεται από τον τύπο

$$\phi_2(x) = \phi_1(x) \int_{x_0}^x \frac{1}{\phi_1^2(s)} e^{-\int_{x_0}^s a_1(t) dt} ds, \quad x_0 \in I,$$

όπου a_1 είναι ο συντελεστής του y' , της ομογενούς εξίσωσης όταν αυτή έρθει στη μορφή $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$. Επομένως, $a_1 = -1/x$ και παίρνοντας $x_0 = 1$, έχουμε

$$\phi_2(x) = e^x \int_1^x e^{-2s} e^{\ln s} ds = e^x \int_1^x s e^{-2s} ds = -\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) e^{-x} = -(1+2x)e^{-x}/4.$$

Άρα παίρνουμε για $\phi_2(x) = -(1+2x)e^{-x}$. Κατά τα γνωστά, για να βρούμε μια ειδική λύση της μορφής $y_p = u_1\phi_1 + u_2\phi_2$, λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} \phi_1 u_1' + \phi_2 u_2' = 0 \\ \phi_1' u_1 + \phi_2' u_2 = 4x^2 e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x u_1' - (1+2x)e^{-x} u_2' = 0 \\ e^x u_1' + (2x-1)e^{-x} u_2' = 4x^2 e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1' = x + 2x^2 \\ u_2' = x e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = x^2/2 + 2x^3/3 \\ u_2 = (x-1/2)e^{2x}/2. \end{cases}$$

Βρίσκουμε $y_p = (1/4 + 2x^3/3 - x^2/2)e^x$. Άρα $y = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + y_p = \dots$ ■

ΘΕΜΑ 8 [I/IO]

Να βρείτε μη γραμμική λύση για την εξίσωση $y'' = 2\sqrt{1 - (y')^2}$.

Λύση: Θέτουμε $u = y'$ και η εξ. γράφεται

$$u' = 2\sqrt{1 - u^2} \xrightarrow{\text{αν } |u| < 1} \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}} = 2 \Rightarrow \int \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}} dx = \int 2 dx \\ \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du = 2x + c_1.$$

Για να υπολογίσω το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους, θέτω $u = \sin w$, $|w| < \pi/2$, και παίρνουμε

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du = \int \frac{\cos w}{|\cos w|} dw = \int 1 dw = w = \arcsin u.$$

Επομένως,

$$\arcsin u = 2x + c_1 \Rightarrow u = \sin(2x + c_1) \Rightarrow y' = \sin(2x + c_1) \Rightarrow y = c_2 - \frac{\cos(2x + c_1)}{2}.$$

■

ΘΕΜΑ 9 [I/IO]

Να βρείτε μη σταθερή λύση για την εξίσωση $y'' = (1 + y)y'$.

Λύση: Αναζητούμε ϕ τ.ώ. $y' = \phi(y)$. Αν υπήρχε τέτοια ϕ , τότε για μια λύση y της εξ., θα είχαμε

$$(1 + y)y' = y'' = \phi'(y)y' \xrightarrow{y' \neq 0} \phi'(y) = 1 + y \Rightarrow \phi(y) = c_1 + y + y^2/2.$$

Επομένως η y θα είναι λύση της $y' = \phi(y) = c_1 + y + y^2/2$, η οποία λύνεται με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών ως εξής

$$\frac{y'}{(y + 1)^2 + 2c_1 - 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \int \frac{y'}{(y + 1)^2 + 2c_1 - 1} dx = \int \frac{1}{2} dx \\ \Rightarrow \int \frac{1}{(y + 1)^2 + 2c_1 - 1} d(y + 1) = \frac{x}{2} + c_2.$$

Για να συνεχίσουμε τον υπολογισμό, διακρίνουμε περιπτώσεις για το $c := 2c_1 - 1$:

$$(i) \text{ αν } c > 0, \text{ τότε } \frac{1}{\sqrt{c}} \arctan \left(\frac{y+1}{\sqrt{c}} \right) = x/2 + c_2 \Rightarrow y = -1 + \sqrt{c} \tan \left(\sqrt{c}(x/2 + c_2) \right),$$

$$(ii) \text{ αν } c = 0, \text{ τότε } -(y + 1)^{-1} = x/2 + c_2 \Rightarrow y = -1 - \frac{1}{x/2 + c_2},$$

$$(iii) \text{ αν } c < 0, \text{ τότε } \frac{1}{2\sqrt{-c}} \ln \left| \frac{y - \sqrt{-c}}{y + \sqrt{-c}} \right| = x/2 + c_2 \Rightarrow \frac{y - \sqrt{-c}}{y + \sqrt{-c}} = Ce^{x\sqrt{-c}}, \text{ όπου } K = \pm e^{2c_2\sqrt{-c}}.$$

$$\text{Επομένως, } y = -\sqrt{-c} + \frac{2\sqrt{-c}}{1 - Ke^{x\sqrt{-c}}}$$

(Ζητείται μια οποιαδήποτε μη σταθερή λύση, άρα δε χρειάζεται η παραπάνω ανάλυση σε περιπτώσεις. Αρκεί μια περίπτωση.)

■

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ