

Κεφάλαιο 2

Τα βασικά θεωρήματα

2.1 Η άλλη αντίληψη

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

για f γενικής μορφής και εξετάζουμε αν υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση $y(t)$, που να ικανοποιεί την εξίσωση και την αρχική συνθήκη. Στο κεφάλαιο 1 θεωρήσαμε ειδικές μορφές της (2.1) όπου η $y(t)$ είναι δυνατόν να δοθεί σε κλειστή μορφή από κάποιο τύπο.

Ξεκινάμε εξετάζοντας τη χρησιμότητα κλειστής μορφής, δεδομένου ότι η δυνατότητα εν γένει να βρεθεί είναι πολύ περιορισμένη. Πράγματι, ο Liouville έδειξε ότι αν η f δεν είναι ειδικής μορφής, τότε η λύση δεν είναι δυνατόν να δοθεί από κάποιο τύπο. Για τη χρησιμότητα τώρα του τύπου, θεωρήστε το παράδειγμα της αλγεβρικής εξίσωσης

$$x^3 - 3x = 2a, \quad (2.2)$$

η λύση της οποίας δίνεται από τον τύπο του Cardano

$$x = \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{a^2 - 1}}. \quad (2.3)$$

Έστω τώρα ότι ενδιαφερόμαστε για $a = 0.01$. Τότε ο τύπος (2.3) είναι σχετικά άχρηστος, με την έννοια ότι δεν προσφέρει πολλά στο γυμνό οφθαλμό. Αντίθετα η προσεγγιστική αντιμετώπιση της (2.2) είναι πολύ πιο κατατοπιστική. Αγνοώντας την ποσότητα x^3 (διότι αναμένεται η λύση να είναι μικρή), απ' ευθείας έχουμε $x = -\frac{2a}{3}$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αυτή είναι μία πολύ καλή προσέγγιση για a μικρό, κάτι που δεν είναι καθόλου προφανές από τον τύπο (2.3).

Θα δείξουμε ότι η (2.1) έχει λύση $y(t)$, μοναδική, η οποία ορίζεται σε κάποιο διάστημα $I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $\delta > 0$, που εξαρτάται από την f και από την αρχική

τιμή, δηλαδή θα δείξουμε ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.) (2.1) ορίζει μονοσήμαντα συνάρτηση $y(t)$, διαφορίσιμη στο I , που ικανοποιεί την εξίσωση και την αρχική συνθήκη.

Η μέθοδος εύρεσης της λύσης είναι κατασκευαστική, η λεγόμενη **μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων**. Η λύση θα οριστεί σαν όριο γνωστών συναρτήσεων.

Για παράδειγμα η ακολουθία

$$y_0(t) = 0, \quad y_n(t) = \frac{\sin t}{1^2} + \frac{\sin 2t}{2^2} + \cdots + \frac{\sin nt}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

συγκλίνει ομοιόμορφα, καθώς $n \rightarrow +\infty$ και έτσι μπορούμε να ορίσουμε την

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(t).$$

Οι $y_n(t)$ είναι οι διαδοχικές προσεγγίσεις. Η απόδειξη της σύγκλισης κάνει χρήση του τεχνάσματος της τηλεσκοπικής σειράς: γράφουμε την y_n στη μορφή

$$y_n(t) = y_0(t) + [y_1(t) - y_0(t)] + [y_2(t) - y_1(t)] + \cdots + [y_n(t) - y_{n-1}(t)].$$

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k(t) - y_{k-1}(t)| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sin kt}{k^2} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

Επειδή απόλυτη σύγκλιση συνεπάγεται σύγκλιση, συμπεραίνουμε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} [y_k(t) - y_{k-1}(t)]$$

συγκλίνει ομοιόμορφα και συνεπώς η $y(t)$ ορίζεται και είναι συνεχής. Σημειώνουμε ότι δεν υπάρχει κλειστή μορφή της $y(t)$.

2.2 Μέθοδοι Picard και Euler

Υπάρχουν δύο τρόποι αντιμετώπισης του Π.Α.Τ.(2.1). Πρώτα η **μέθοδος Picard** που μετατρέπει το πρόβλημα σε ισοδύναμη ολοκληρωτική εξίσωση, την οποία στη συνέχεια επιλύει. Αντίθετα η **μέθοδος Euler** δουλεύει απευθείας με τη διαφορική εξίσωση.

Ξεκινάμε με τη μέθοδο Picard. Υποθέτουμε κατ' αρχήν ότι οι $f(t, y)$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και ότι η $y(t)$ είναι λύση του προβλήματος (2.1) σε διάστημα $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $\delta > 0$. Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της (2.1) έχουμε

$$\int_{t_0}^t \frac{dy}{ds} ds = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \Leftrightarrow y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds,$$

συνεπώς η $y(t)$ ικανοποιεί την **ολοκληρωτική εξίσωση**

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, \quad (2.4)$$

την οποία υιοθετούμε σαν το κεντρικό πρόβλημα προς επίλυση. Ο λόγος είναι ότι αντίστροφα, αν η $y(t)$ επιλύει την (2.4) τότε επιλύει και το Π.Α.Τ. (2.1). Πράγματι, έστω $y(t)$ συνεχής συνάρτηση, λύση της (2.4). Πρώτα επαληθεύουμε την αρχική συνθήκη. Από την (2.4) θέτοντας $t = t_0$ προκύπτει ότι $y(t_0) = y_0$. Α posteriori (εκ των υστέρων), η $y(t)$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση, διότι το δεξιό μέλος της (2.4) είναι διαφορίσιμο (χρήση της συνέχειας της $y(t)$, της συνέχειας της $f(s, y(s))$ και του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού). Παραγωγίζοντας λοιπόν την (2.4) παίρνουμε $\frac{dy}{dt} = f(t, y(t))$, συνεπώς ικανοποιείται και η αρχική εξίσωση.

2.2.1 Προσεγγίσεις Picard

Η μέθοδος Picard είναι κατασκευαστική και δίνει διαδοχικά βελτιωμένες προσεγγίσεις της λύσης με ταχεία σύγκλιση, και λόγω αυτού έχει μεγάλη πρακτική αξία. Η ακολουθία προσεγγίσεων ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

$$\begin{aligned} y_0(t) &= y_0, \\ y_1(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_0(s)) ds, \\ &\vdots \\ y_n(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $y_n(t_0) = y_0$ για $n = 0, 1, 2, \dots$, δηλαδή όλες οι $y_n(t)$ ικανοποιούν την αρχική συνθήκη. Στο παρόν κεφάλαιο θα δείξουμε ότι κάτω από γενικές προϋποθέσεις η ακολουθία $\{y_n(t)\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα, $y(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(t)$, και ότι η $y(t)$ ικανοποιεί την (2.4).

Παράδειγμα 2.1 Να υπολογισθεί η ακολουθία Picard για το Π.Α.Τ.

$$y' = y, \quad y(0) = 1,$$

και να εξεταστεί η σύγκλιση της ακολουθίας στη λύση $y(t) = e^t$.

Λύση: Η ισοδύναμη ολοκληρωτική εξίσωση είναι

$$y(t) = 1 + \int_0^t y(s) ds,$$

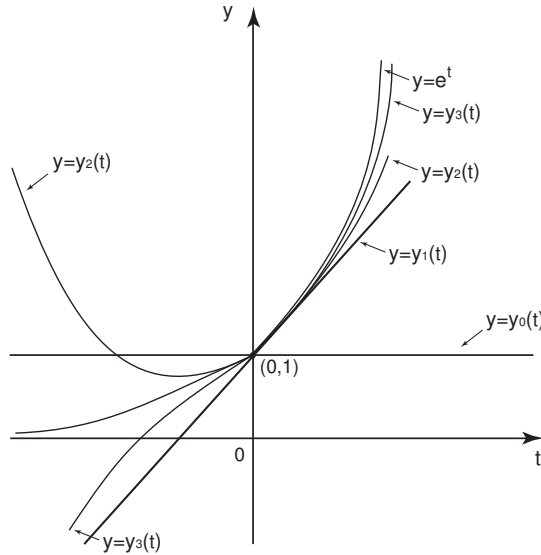
και οι διαδοχικές προσεγγίσεις είναι

$$\begin{aligned} y_0(t) &= 1, \\ y_1(t) &= 1 + \int_0^t y_0(s) ds = 1 + \int_0^t 1 ds = 1 + t, \\ y_2(t) &= 1 + \int_0^t y_1(s) ds = 1 + \int_0^t (1 + s) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2!}, \\ &\vdots \\ y_n(t) &= 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Αναγνωρίζουμε ότι η $y_n(t)$ αντιστοιχεί με μερικό άθροισμα Taylor της εκθετικής συνάρτησης

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}.$$

Η σύγκλιση της σειράς ισχύει για $t \in \mathbb{R}$, και είναι ομοιόμορφη για t σε κάθε διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ (βλ. Σχήμα 2.1).



Σχήμα 2.1: Οι πρώτες τέσσερις προσεγγίσεις.

Παράδειγμα 2.2 Να υπολογισθούν οι τρεις πρώτες προσεγγίσεις του Π.Α.Τ.

$$y' = 1 + y^3, \quad y(1) = 1.$$

Λύση: Η ολοκληρωτική εξίσωση είναι

$$y(t) = 1 + \int_1^t [1 + y^3(s)] ds,$$

και οι τρεις πρώτες διαδοχικές προσεγγίσεις δίνονται από την ακολουθία

$$y_0(t) = 1,$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 1 + \int_1^t [1 + y_0^3(s)] ds = 1 + \int_1^t (1 + 1) ds \\ &= 1 + 2(t - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_2(t) &= 1 + \int_1^t [1 + y_1^3(s)] ds = \\
 &= 1 + \int_1^t [1 + (1 + 2(s-1))^3] ds = \\
 &= 1 + 2(t-1) + 3(t-1)^2 + 4(t-1)^3 + 2(t-1)^4.
 \end{aligned}$$

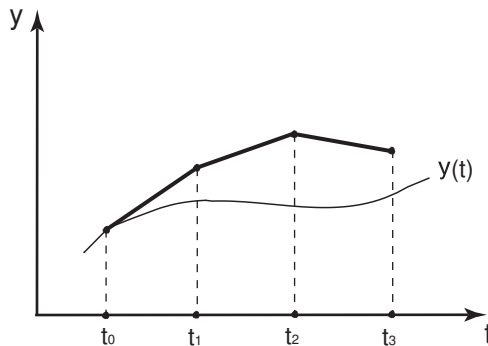
2.2.2 Προσεγγίσεις Euler

Δίνουμε τώρα μια πολύ σύντομη ιδέα της προσεγγιστικής μεθόδου Euler δεδομένου ότι δεν θα παίξει σημαντικό ρόλο σε όσα ακολουθούν.

Όπως αναφέραμε η μέθοδος Euler χειρίζεται απευθείας τη διαφορική εξίσωση. Από την (2.1) έχουμε $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$, δηλαδή παίρνουμε πληροφορία για την κλίση της λύσης στο t_0 . Η ιδέα λοιπόν είναι να προσεγγίσουμε τη λύση για μικρό διάστημα $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t$ με το ευθύγραμμο τμήμα $y_1(t) = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0)$. Στο σημείο $t_1 := t_0 + \Delta t$ υπολογίζουμε από την εξίσωση (2.1) την κλίση $f(t_1, y_1)$ όπου $y_1 := y_1(t_1)$, και συνεχίζουμε με το ευθύγραμμο τμήμα $y_2(t) = y_1 + f(t_1, y_1)(t - t_1)$, και ούτω καθεξής. Το σχήμα έχει ως εξής:

$$y_k(t) = y_{k-1} + f(t_{k-1}, y_{k-1})(t - t_{k-1}), \quad \text{για } t_{k-1} \leq t \leq t_k,$$

όπου $t_k = t_{k-1} + \Delta t$ και $y_k = y_k(t_k)$ για $k = 1, 2, \dots, n$. Το αποτέλεσμα είναι η κατασκευή μιας τεθλασμένης όπως στο Σχήμα 2.2, η οποία προσεγγίζει τη λύση του (2.1), την οποία συμβολίζουμε με $y(t; t_0, y_0)$.



Σχήμα 2.2: Η τεθλασμένη είναι η αριθμητική προσέγγιση της λύσης $y(t)$. Οι κλίσεις των ευθύγραμμων τμημάτων είναι αντίστοιχα $f(t_0, y_0)$, $f(t_1, y_1)$, $f(t_2, y_2)$ και $f(t_3, y_3)$.

Παρατήρηση 2.1 Το πρώτο ευθύγραμμο τμήμα είναι εφαπτόμενο στο γράφημα της $y(t; t_0, y_0)$. Το δεύτερο όμως δεν είναι εν γένει, διότι το σημείο (t_1, y_1) βρίσκεται εκτός γραφήματος. Εντούτοις η τεθλασμένη συμβαίνει να δίνει μία προσέγγιση στο

γράφημα της λύσης, και οι τιμές $y_1, y_2, \dots, y_n$ προσεγγίζουν τις τιμές της λύσης για $t = t_1, t_2, \dots, t_n$. Οι προσεγγίσεις βελτιώνονται καθώς το $\Delta t \rightarrow 0$.

Επιλέγουμε $t > t_0$ και $\Delta t = \frac{t - t_0}{n}$, και θεωρούμε τη διαμέριση του $[t_0, t]$ σε n τμήματα

$$t_1 = t_0 + \Delta t, \quad t_2 = t_0 + 2\Delta t, \quad \dots, \quad t_n = t_0 + n\Delta t,$$

οπότε παίρνουμε την ακολουθία των προσεγγίσεων

$$y_k = y_{k-1} + f(t_{k-1}, y_{k-1})\Delta t,$$

για $k = 1, 2, \dots, n$.

Για παράδειγμα αν η μέθοδος εφαρμοσθεί στο πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = ay, \quad y(0) = y_0,$$

τότε έχουμε

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + a\Delta t y_0 = (1 + a\Delta t)y_0 \\ y_2 &= (1 + a\Delta t)y_1 = (1 + a\Delta t)^2 y_0 \\ &\vdots \\ y_n &= (1 + a\Delta t)^n y_0 = \left(1 + \frac{at}{n}\right)^n y_0 \quad \left(\Delta t = \frac{t}{n}\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

που οδηγεί στον εναλλακτικό ορισμό της εκθετικής

$$e^{at} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{at}{n}\right)^n.$$

Παράδειγμα 2.3 Θεωρούμε το Π.Α.Τ.

$$y' = 3 + t - y, \quad y(0) = 1.$$

- (α) Να βρεθούν προσεγγίσεις των τιμών της λύσης για $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ με $\Delta t = 0.1$. Κρατήστε 4 δεκαδικά ψηφία.
- (β) Να επαναληφθεί το (α) με $\Delta t = 0.05$.
- (γ) Να βρεθεί η λύση σε κλειστή μορφή και να υπολογιστεί για $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$.

Λύση: (α) Έχουμε

$$y_{k+1} = y_k + (\Delta t)f_k,$$

όπου $f_k = f(t_k, y_k)$ με $t_k = t_{k-1} + \Delta t$ και $f(t, y) = 3 + t - y$ για $t_0 = 0$ και $y_0 = 1$. Επομένως παίρνουμε τις προσεγγίσεις

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + (\Delta t)f_0 = 1 + 0.1[3 + 0 - 1] = 1.2, \\ y_2 &= y_1 + (\Delta t)f_1 = 1.2 + 0.1[3 + 0.1 - 1.2] = 1.39, \\ y_3 &= y_2 + (\Delta t)f_2 = 1.39 + 0.1[3 + 0.2 - 1.39] = 1.571, \\ y_4 &= y_3 + (\Delta t)f_3 = 1.571 + 0.1[3 + 0.3 - 1.571] = 1.7439. \end{aligned}$$

(β) Σε αυτή την περίπτωση

$$\begin{aligned}y_1 &= y_0 + (\Delta t)f_0 = 1 + 0.05[3 + 0 - 1] = 1.1, \\y_2 &= y_1 + (\Delta t)f_1 = 1.1 + 0.05[3 + 0.05 - 1.1] = 1.1975, \\y_3 &= y_2 + (\Delta t)f_2 = 1.1975 + 0.05[3 + 0.1 - 1.1975] = 1.2926, \\y_4 &= y_3 + (\Delta t)f_3 = 1.2926 + 0.05[3 + 0.15 - 1.2926] = 1.3854, \\y_5 &= y_4 + (\Delta t)f_4 = 1.3854 + 0.05[3 + 0.2 - 1.3854] = 1.4761, \\y_6 &= y_5 + (\Delta t)f_5 = 1.4761 + 0.05[3 + 0.25 - 1.4761] = 1.5647, \\y_7 &= y_6 + (\Delta t)f_6 = 1.5647 + 0.05[3 + 0.3 - 1.5647] = 1.6514, \\y_8 &= y_7 + (\Delta t)f_7 = 1.6514 + 0.05[3 + 0.35 - 1.6514] = 1.7363.\end{aligned}$$

(γ) Η εξίσωση είναι γραμμική πρώτης τάξης. Εύκολα βρίσκουμε τη λύση

$$y(t) = 2 - e^{-t} + t,$$

επομένως κρατώντας τέσσερα δεκαδικά ψηφία έχουμε

$$\begin{aligned}y(0.1) &= 2 - e^{-0.1} + 0.1 = 1.1951, \\y(0.2) &= 2 - e^{-0.2} + 0.2 = 1.3812, \\y(0.3) &= 2 - e^{-0.3} + 0.3 = 1.5591, \\y(0.4) &= 2 - e^{-0.4} + 0.4 = 1.7296.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι τιμές του ερωτήματος (β) που αντιστοιχούν στο μικρότερο βήμα (μισό απ' αυτό του ερωτήματος (α)) δίνουν καλύτερες προσεγγίσεις. Σημειώνουμε ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει πάντα, δηλαδή η προσέγγιση δεν βελτιώνεται αναγκαστικά αν μικραίνει το βήμα και το μόνο που μπορεί να αποδειχθεί είναι ότι οι προσεγγίσεις τελικά τείνουν στη λύση καθώς το βήμα τείνει στο μηδέν.

Η μέθοδος Euler προγραμματίζεται στον υπολογιστή πάρα πολύ εύκολα, ως εξής:

Βήμα 1. **Ορισμός** $f(t, y)$.

Βήμα 2. **Είσοδος** αρχικών τιμών t_0, y_0 .

Βήμα 3. **Είσοδος** βήματος Δt και αριθμού βημάτων n .

Βήμα 4. **Έξοδος** t_0, y_0 .

Βήμα 5. Για j από 1 μέχρι n να εκτελεστεί το Βήμα 6.

Βήμα 6.

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t, y) \\y &= y + \Delta t * k_1 \\t &= t + \Delta t\end{aligned}$$

Βήμα 7. **Έξοδος** t και y .

Βήμα 8. **Τέλος**.

2.2.3 Σύγκλιση προσεγγίσεων Picard - Θεώρημα τοπικής ύπαρξης Picard-Lindelöf

Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 1.1, οι λύσεις (μη γραμμικών) εξισώσεων εν γένει δεν υπάρχουν για όλα τα t (ανεξάρτητα από το αν η $f(t, y)$ ορίζεται ή όχι για όλα τα t, y), διότι εκρήγνυνται σε πεπερασμένο χρόνο. Δηλαδή η **ολική ύπαρξη** δεν είναι κάτι που μπορούμε να αναμένουμε ότι ισχύει γενικά. **Τοπική ύπαρξη** γύρω από το $t = t_0$ είναι ό,τι περισσότερο μπορούμε να ελπίζουμε. Συνεπώς δεν πρέπει να περιμένουμε ότι οι προσεγγίσεις Picard για το (2.1) είναι δυνατό να συγχλίνουν για όλα τα t .

Θεώρημα 2.1 (Picard-Lindelöf) Έστω $f(t, y), \frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ συνεχείς συναρτήσεις στο ορθογώνιο

$$S = \{ (t, y) \mid t_0 \leq t \leq t_0 + a, \quad |y - y_0| \leq b \}.$$

Έστω ακόμη $M = \max_S |f(t, y)|$, $\alpha = \min \left(a, \frac{b}{M} \right)$. Τότε το Π.Α.Τ. (2.1) έχει μοναδική λύση στο $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Σημείωση 2.1 Είναι σαφές ότι έχουμε ένα αντίστοιχο θεώρημα αν το S αντικατασταθεί με το $t_0 - a \leq t \leq t_0$, $|y - y_0| \leq b$. Επίσης είναι σαφές απ' αυτά τα «πλευρικά» θεωρήματα ότι αν το S αντικατασταθεί από το $|t - t_0| \leq a$, $|y - y_0| \leq b$ τότε το (2.1) έχει μοναδική λύση στο $|t - t_0| \leq a$.

Απόδειξη: 1. Ξεκινάμε δείχνοντας ότι όλες οι προσεγγίσεις Picard, $\{y_n(t)\}$, για $n = 0, 1, 2, \dots$, με $y_0(t) \equiv y_0$ και

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds,$$

ικανοποιούν την εκτίμηση

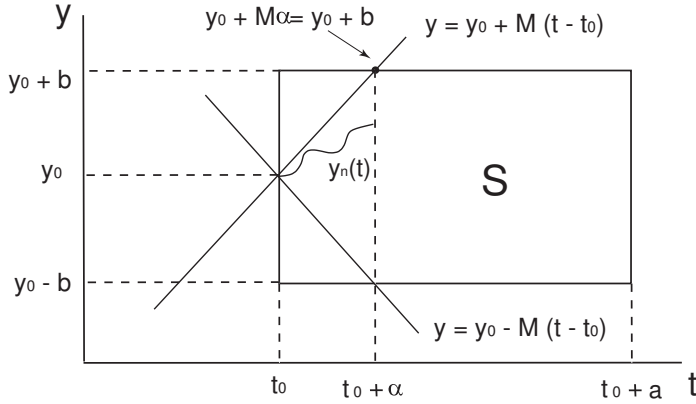
$$|y_n(t) - y_0| \leq M|t - t_0|, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha, \quad (2.5)$$

για $n = 0, 1, \dots$. Η γεωμετρική ερμηνεία της εκτίμησης δίνεται στο Σχήμα 2.3: όλες οι προσεγγίσεις βρίσκονται μέσα στον κώνο και ειδικά μέσα στο S .

Για την απόδειξη της (2.5) το επιχείρημα είναι επαγωγικό. Για $n = 0$ προφανώς η (2.5) ισχύει. Έστω τώρα ότι ισχύει για $n = j$. Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = j + 1$.

$$\begin{aligned} |y_{j+1}(t) - y_0| &\stackrel{(2.4)}{=} \left| \int_{t_0}^t f(s, y_j(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_j(s))| ds \\ &\leq M|t - t_0|. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Έπεται ότι $|y_n(t) - y_0| \leq b$ για $|t - t_0| \leq \alpha$ και συνεπώς οι $y_0(t), y_1(t), \dots$ ορίζονται και είναι συνεχείς στο $[t_0, t_0 + \alpha]$, και $(t, y_n(t)) \in S$ για όλα τα $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$.



Σχήμα 2.3: Η απόδειξη του Θεωρήματος των Picard-Lindelöf.

2. Στη συνέχεια δείχνουμε την εκτίμηση

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq \frac{ML^{n-1}(t - t_0)^n}{n!}, \quad (2.7)$$

για $n = 1, 2, \dots$, $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$, όπου $L := \max_S \left| \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right|$.

Για την απόδειξη της (2.7) το επιχείρημα είναι και πάλι επαγωγικό. Για $n = 1$ η (2.7) δίνει

$$|y_1(t) - y_0(t)| \leq \frac{ML^{1-1}(t - t_0)^1}{1!} = M(t - t_0)$$

που ισχύει από την (2.6) για $j = 0$. Έστω ότι η (2.7) ισχύει για $n = j$, δηλαδή

$$|y_j(t) - y_{j-1}(t)| \leq \frac{ML^{j-1}(t - t_0)^j}{j!}. \quad (2.8)$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n = j + 1$.

$$\begin{aligned} |y_{j+1}(t) - y_j(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(s, y_j(s)) - f(s, y_{j-1}(s))] ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_j(s)) - f(s, y_{j-1}(s))| ds \\ &= \int_{t_0}^t \left| \int_{y_{j-1}(s)}^{y_j(s)} \frac{\partial f(s, y)}{\partial y} dy \right| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t \left(\int_{y_{j-1}(s)}^{y_j(s)} \left| \frac{\partial f(s, y)}{\partial y} \right| dy \right) ds \\ &\leq \int_{t_0}^t \left(\int_{y_{j-1}(s)}^{y_j(s)} L dy \right) ds, \end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση του βήματος 1 και του ορισμού του L . Συνεχίζοντας την εκτίμηση

$$\begin{aligned}
 |y_{j+1}(t) - y_j(t)| &\leq L \int_{t_0}^t |y_j(s) - y_{j-1}(s)| ds \\
 &\stackrel{(2.8)}{\leq} L \int_{t_0}^t \frac{ML^{j-1}(s-t_0)^j}{j!} ds \\
 &= \frac{ML^j}{j!} \int_{t_0}^t (s-t_0)^j ds \\
 &= \frac{ML^j(t-t_0)^{j+1}}{(j+1)!},
 \end{aligned}$$

δηλαδή ισχύει η (2.7) για $n = j+1$ άρα και για κάθε $n = 1, 2, \dots$

3. Για τη σύγκλιση της $\{y_n(t)\}$ χρησιμοποιούμε το τέχνασμα της τηλεσκοπικής σειράς (βλ. ενότητα 2.1): γράφουμε

$$y_n(t) = y_0(t) + [y_1(t) - y_0(t)] + [y_2(t) - y_1(t)] + \dots + [y_n(t) - y_{n-1}(t)],$$

απ' όπου η σύγκλιση της ακολουθίας ανάγεται στη σύγκλιση της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} [y_n(t) - y_{n-1}(t)].$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| &\stackrel{(2.7)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ML^{n-1}(t-t_0)^n}{n!} \\
 &\leq \frac{M}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^n \alpha^n}{n!} = \frac{M}{L} (e^{\alpha L} - 1),
 \end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση του αναπτύγματος της εκθετικής συνάρτησης (βλ. ενότητα 2.2). Απόλυτη σύγκλιση συνεπάγεται σύγκλιση. Επίσης κάνοντας χρήση του κριτηρίου του Weierstrass για ομοιόμορφη σύγκλιση συμπεραίνουμε ότι η σειρά συγχλίνει ομοιόμορφα και συνεπώς η $\{y_n(t)\}$ συγχλίνει ομοιόμορφα στο $[t_0, t_0 + \alpha]$. Έπεται ότι

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(t),$$

όπου $y(t)$ συνεχής συνάρτηση, εφ' όσον είναι ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων.

4. Θα δείξουμε ότι η $y(t)$ ικανοποιεί την (2.4). Πράγματι

$$f(t, y_n(t)) \longrightarrow f(t, y(t)),$$

για $n \rightarrow +\infty$ ομοιόμορφα στο $[t_0, t_0 + \alpha]$, λόγω συνέχειας της $f(t, y)$. Η άσκηση 2.4 δείχνει ότι αν $\{\phi_n(t)\}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο $[a, b]$ και $\phi_n \rightarrow \phi$ ομοιόμορφα καθώς $n \rightarrow +\infty$, τότε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \phi_n(t) dt = \int_a^b \phi(t) dt.$$

Εφαρμόζουμε αυτή την αρχή. Από τον ορισμό των προσεγγίσεων Picard έχουμε

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds.$$

Παίρνοντας το όριο και των δύο μελών βλέπουμε ότι η $y(t)$ ικανοποιεί την (2.4).

5. Τέλος δείχνουμε το μονοσήμαντο της λύσης. Έστω $z(t)$ λύση του (2.1). Τότε έχουμε

$$z(t) \stackrel{(2.4)}{=} y_0 + \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds.$$

Θα δείξουμε επαγωγικά την εκτίμηση

$$|y_n(t) - z(t)| \leq \frac{ML^n(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (2.9)$$

για $n = 0, 1, 2, \dots$ και $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Για $n = 0$ έχουμε

$$|y_0 - z(t)| = \left| \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds \right| \leq M \int_{t_0}^t ds = M(t - t_0)$$

Έστω ότι η εκτίμηση ισχύει για $n = j$. Τότε (πρβλ. απόδειξη της (2.7))

$$\begin{aligned} |y_{j+1}(t) - z(t)| &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, y_j(s)) - f(s, z(s))) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t L |y_j(s) - z(s)| ds \\ &\leq L \frac{ML^j}{(j+1)!} \int_{t_0}^t (s - t_0)^{j+1} ds \\ &= \frac{ML^{j+1}}{(j+2)!} (t - t_0)^{j+2}, \end{aligned}$$

που αποδεικνύει την (2.9). Παίρνοντας στην (2.9) το όριο καθώς $n \rightarrow +\infty$ έχουμε

$$|y(t) - z(t)| \leq 0$$

απ' όπου προκύπτει ότι $y(t) \equiv z(t)$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1 είναι πλήρης.

Σημείωση 2.2 Η ακολουθία $\left\{ \frac{k^n}{n!} \right\}$, $k > 0$ συγκλίνει στο 0 καθώς $n \rightarrow +\infty$.

Πράγματι, δοθέντος $a < 1$ επιλέγουμε N τέτοιο ώστε $\frac{k}{n} < a$ για $n > N$. Για αυθαίρετο $j > N$ έχουμε την εκτίμηση

$$\frac{k^j}{j!} = \frac{k}{1} \frac{k}{2} \cdots \frac{k}{N-1} \frac{k}{N} \cdots \frac{k}{j} < \frac{k}{1} \cdots \frac{k}{N} a^{j-N} \rightarrow 0$$

καθώς $j \rightarrow +\infty$.

Παράδειγμα 2.4 Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y' = -e^{y+t+1}, \quad y(0) = -1.$$

Θα δώσουμε τη λύση με δύο τρόπους.

Λύση: α' τρόπος : η εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών

$$\frac{dy}{dt} = -e^y e^{t+1} \Rightarrow \frac{dy}{e^y} = -e^{t+1} dt \Rightarrow -e^{-y} = -e^{t+1} + c$$

και κάνοντας χρήση της αρχικής συνθήκης προκύπτει ότι $c = 0$, οπότε καταλήγουμε στη λύση $y = -(t+1)$.

β' τρόπος : θέτουμε $z = y + t + 1$. Προκύπτει

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial t} = 1 \cdot (-e^{y+t+1}) + 1 = -e^z + 1$$

και $z(0) = y(0) + 0 + 1 = -1 + 1 = 0$, οπότε η $z = z(t)$ ικανοποιεί το Π.Α.Τ.

$$z' = -e^z + 1, \quad z(0) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι η $z(t) \equiv 0$ είναι λύση και συνεπώς λόγω του μονοσήμαντου έπεται ότι $y + t + 1 \equiv 0$, άρα $y = -(t+1)$.

Ορισμός 2.1 Η συνάρτηση f ικανοποιεί **συνθήκη Lipschitz** στο S αν υπάρχει $L > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $(t, y_1), (t, y_2) \in S$ έχουμε την ανισότητα

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (2.10)$$

Η (2.10) προκύπτει από την εκτίμηση $L := \max_S \left| \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right|$. Πράγματι

$$\begin{aligned} |f(t, y_1) - f(t, y_2)| &= \left| \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} dy \right| \leq \left| \int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right| dy \right| \\ &\leq L|y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

Απλή ανάγνωση της απόδειξης του Θεωρήματος 2.1 δείχνει ότι η υπόθεση για την παράγωγο $\frac{\partial f(t, y)}{\partial y}$ είναι δυνατόν να αντικατασταθεί με τη λιγότερο περιοριστική (2.10), χωρίς καμία αλλαγή στο συμπέρασμα.

Παράδειγμα 2.5 Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(t, y) = y \cos t$$

που ορίζεται στο $\mathbb{R}^2$. Για κάθε $(t, y_1), (t, y_2) \in \mathbb{R}^2$ έχουμε

$$f(t, y_1) - f(t, y_2) = y_1 \cos t - y_2 \cos t = (y_1 - y_2) \cos t$$

και συνεπώς

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |y_1 - y_2| |\cos t| \leq |y_1 - y_2|,$$

δηλαδή η $f(t, y)$ είναι Lipschitz με σταθερά Lipschitz $L = 1$.

Παράδειγμα 2.6 Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(t, y) = y^{2/3},$$

και S οποιοδήποτε ορθογώνιο που περιέχει στο εσωτερικό του σημείο της μορφής $(t_0, 0)$. Παρατηρούμε ότι

$$|f(t, 0) - f(t, y)| = |0 - y^{2/3}|.$$

Επειδή

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{|y|^{2/3}}{|y|} = +\infty,$$

η ανισότητα

$$|y|^{2/3} \leq L|y|$$

δεν είναι δυνατή για οποιαδήποτε σταθερά L και επομένως η $f(t, y)$ δεν είναι Lipschitz.

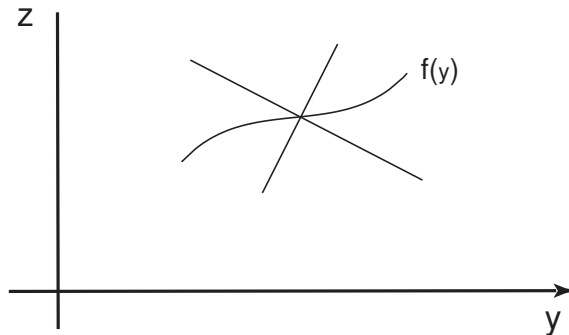
Παράδειγμα 2.7 (Γεωμετρική ερμηνεία της συνθήκης Lipschitz) Θεωρούμε τη συνάρτηση $z = f(y)$ και έστω ότι η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz,

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

για $y \in [a, b]$. Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε σημείο $(y_0, f(y_0))$ επί του γραφήματος της f , τότε το γράφημα περιέχεται μεταξύ των ευθειών

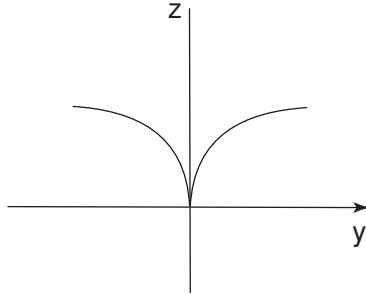
$$z - f(y_0) = L(y - y_0) \quad , \quad z - f(y_0) = -L(y - y_0),$$

δηλαδή μέσα σε ένα διπλό κώνο όπως στο Σχήμα 2.4.



Σχήμα 2.4: Γεωμετρία της συνθήκης Lipschitz.

Παρατηρούμε για παράδειγμα ότι δεν είναι δυνατή η κατασκευή διπλού κώνου για το γράφημα $z = |y|^{1/2}$ με κορυφή στην αρχή των αξόνων (βλ. Σχήμα 2.5).



Σχήμα 2.5: Το γράφημα της $z = |y|^{1/2}$.

Παράδειγμα 2.8 Το απλό παράδειγμα $y' = |y|^{1/2}$ δείχνει πως η μοναδικότητα είναι δυνατό να χαθεί αν η f δεν ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz. Παρατηρούμε ότι για την αρχική συνθήκη $y(0) = 0$ έχουμε από τη μια μεριά την ταυτοτικά μηδενική λύση, $y_1(t) \equiv 0$, αλλά επίσης και την

$$y_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 & , \quad t \geq 0 \\ 0 & , \quad t \leq 0. \end{cases}$$

Γεωμετρικά βλέπουμε ότι η $y_1(t)$ και η $y_2(t)$ είναι C^1 -συναρτήσεις και έχουν την ίδια εφαπτομένη στο $(0,0)$. Αυτό δεν θα ήταν δυνατό αν η f ικανοποιούσε συνθήκη του Lipschitz. Το Θεώρημα 2.1 και γενικότερα το μονοσήμαντο ισχύει κάτω από την ασθενέστερη απαίτηση ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz.

Ορισμός 2.2 Το πεδίο ορισμού της λύσης του Π.Α.Τ. (2.1) ορίζεται σαν το μέγιστο ανοικτό διάστημα $I = (a,b)$ του t εντός του οποίου ορίζεται η λύση και που περιέχει το t_0 .

Σημείωση 2.3 Σε πιο προχωρημένα βιβλία αποδεικνύεται ότι αν το άκρο b (αντ. a) του διαστήματος είναι πεπερασμένο, τότε αναγκαστικά η λύση του προβλήματος (2.1) καθώς το $t \rightarrow b^-$ (αντ. $t \rightarrow a^+$), είτε βγαίνει εκτός του πεδίου ορισμού της, είτε εκρήγνυται, δηλαδή $\lim_{t \rightarrow b^-} |y(t)| = +\infty$ (αντ. $\lim_{t \rightarrow a^+} |y(t)| = +\infty$).

Παράδειγμα 2.9 Να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού της λύσης του Π.Α.Τ.

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 1.$$

Λύση: Κάνουμε χωρισμό μεταβλητών,

$$\frac{dy}{1+y^2} = dt \Rightarrow \arctan y = t + c \Rightarrow y(t) = \tan(t + c)$$

και με χρήση της αρχικής συνθήκης $y(0) = 1$ παίρνουμε ότι $\tan c = 1$ άρα $c = \frac{\pi}{4}$.
Επομένως

$$y(t) = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Για να ορίζεται η λύση πρέπει $\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$ και συνεπώς

$$-\frac{3\pi}{4} + n\pi < t < \frac{\pi}{4} + n\pi \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Το πεδίο ορισμού είναι το $\left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ διότι είναι το μόνο διάστημα που περιέχει το $t = 0$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η $y(t)$ σαν συνάρτηση επεκτείνεται π -περιοδικά στο $\mathbb{R}$, όχι όμως και σαν λύση.

Παράδειγμα 2.10 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της λύσης του Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y' = 3t^2 y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Λύση: Η εξίσωση γράφεται $y^{-2} dy = 3t^2 dt$, απ' όπου με ολοκλήρωση προκύπτει

$$-\frac{1}{y} = t^3 + c,$$

άρα

$$y(t) = -\frac{1}{t^3 + c} \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$$

Επειδή $y(0) = 1$ θα έχουμε

$$1 = -\frac{1}{c} \quad \Rightarrow \quad c = -1 \quad ,$$

και η λύση θα είναι

$$y(t) = -\frac{1}{t^3 - 1}.$$

Πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το

$$I = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) = I_1 \cup I_2.$$

Πεδίο ορισμού της λύσης είναι το $I_1 = (-\infty, 1)$ διότι περιέχει το 0. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad \lim_{t \rightarrow 1^-} y(t) = +\infty \quad .$$

Προφανώς η λύση εκρήγνυται στο $t = 1$.

Παράδειγμα 2.11 Το Π.Α.Τ.

$$y' = -t\sqrt{1-y^2}, \quad y(0) = 1,$$

έχει δύο λύσεις για $t \geq 0$: $y_1(t) = 1$ και $y_2(t) = \cos \frac{t^2}{2}$. Η $y_2(t)$ κατασκευάζεται εύκολα με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Παρατηρούμε ότι η έλλειψη αυτή του μονοσήμαντου δεν παραβαίνει το Θεώρημα 2.1 διότι η $\frac{\partial f(t, y)}{\partial y}$ δεν ορίζεται στο σημείο $(0, 1)$.

Αντίθετα, το Π.Α.Τ.

$$y' = t\sqrt{1-y^2}, \quad y(0) = 1$$

έχει μοναδική λύση για $t \geq 0$, την $y(t) \equiv 1$, παρόλο που η f δεν είναι Lipschitz. Η συνθήκη λοιπόν δεν είναι αναγκαία για το μονοσήμαντο, το οποίο αποδεικνύεται ως εξής: πρώτον αν $y(t)$ είναι λύση τότε αναγκαστικά $y'(t) \geq 0$ για $t \geq 0$, και συνεπώς $y(t) \geq 1$ για $t \geq 0$. Ταυτόχρονα αναγκαστικά $1-y^2(t) \geq 0$, απ' όπου λόγω θετικότητας, $y(t) \leq 1$ για $t \geq 0$. Έπεται λοιπόν ότι $y(t) \equiv 1$ για $t \geq 0$.

Σε όσα ακολουθούν αναφερόμαστε σε μία συνάρτηση f χωρίς να δίνουμε τον τύπο της. Υποθέτουμε ότι ικανοποιεί τις απαιτήσεις ύπαρξης και μονοσήμαντου του Θεωρήματος 2.1. Επίσης καθορίζουμε και μία αρχική συνθήκη. Χρησιμοποιώντας ειδικά το μονοσήμαντο εξάγουμε κάποια συμπεράσματα για την λύση του κάθε Π.Α.Τ.

Παράδειγμα 2.12 Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),$$

με f όπως στο Θ2.1, της οποίας μία λύση είναι η $y_1(t) = 3$ για $t \in \mathbb{R}$. Τι συμπέρασμα προκύπτει για τη λύση $y(t)$ που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = 1$;

Λύση: Η $y_1(t) = 3$ είναι λύση με $y_1(0) = 3$. Έστω $y(t)$ η λύση του Π.Α.Τ. με $y(0) = 1$. Επειδή $y(0) < y_1(0)$ και λόγω του μονοσήμαντου θα έχουμε $y(t) < y_1(t) = 3$ για όλα τα t στο κοινό πεδίο ορισμού των λύσεων, δηλαδή $y(t) < 3$ για $t \in \mathbb{R}$. Επίσης παρατηρούμε ότι η ύπαρξη της σταθερής λύσης $y_1(t) \equiv 3$ σημαίνει αναγκαστικά ότι

$$0 = \frac{dy_1}{dt} = f(t, y_1) = f(t, 3)$$

για όλα τα t , δηλαδή $f(t, 3) \equiv 0$.

Παράδειγμα 2.13 Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),$$

με f όπως στο Θ2.1, της οποίας δύο λύσεις είναι η $y_1(t) = t + 2$, $t \in \mathbb{R}$ και η $y_2(t) = -t^2$, $t \in \mathbb{R}$. Τι συμπέρασμα προκύπτει για τη λύση $y(t)$ που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = 1$;

Λύση: Οι $y_1(t), y_2(t)$ είναι λύσεις του Π.Α.Τ. με $y_1(0) = 2$ και $y_2(0) = 0$ αντίστοιχα. Έστω $y(t)$ η λύση με $y(0) = 1$, τότε έχουμε $y_2(0) < y(0) < y_1(0)$, και λόγω του μονοσήμεντου θα ισχύει ότι $y_2(t) < y(t) < y_1(t)$, δηλαδή $-t^2 < y(t) < t + 2$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2.14 Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dt} = (y - 2)(y - 3)y =: f(t, y).$$

Τι συμπέρασμα προκύπτει από το θεώρημα ύπαρξης-μοναδικότητας για τις λύσεις που ικανοποιούν τις παρακάτω αρχικές συνθήκες;

$$(\alpha) \ y(0) = 4, \ (\beta) \ y(0) = 3, \ (\gamma) \ y(0) = 1, \ (\delta) \ y(0) = -1.$$

Λύση: Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι οι σταθερές συναρτήσεις

$$y_1(t) \equiv 0, \ y_2(t) \equiv 2, \ y_3(t) \equiv 3,$$

είναι λύσεις της αρχικής εξίσωσης διότι μηδενίζουν και τις δύο πλευρές της. Εάν θεωρήσουμε το Π.Α.Τ. $y' = f(y)$ με $y_3(0) = 3 < 4 = y(0)$, έπεται λόγω του μονοσήμεντου ότι $3 < y(t)$. Παρόμοια η λύση με την αρχική συνθήκη $y(0) = 1$ ικανοποιεί την $0 < y(t) < 2$, και τέλος η λύση με τη συνθήκη $y(0) = -1$ ικανοποιεί την $y(t) < 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2.15 (α) Δείξτε ότι οι $y_1(t) = \frac{1}{t-1}$ και $y_2(t) = \frac{1}{t-2}$ είναι λύσεις της $\frac{dy}{dt} = -y^2$.

(β) Τι συμπέρασμα προκύπτει για τις λύσεις της $\frac{dy}{dt} = -y^2$ για τις οποίες η αρχική συνθήκη $y(0)$ ικανοποιεί την ανισότητα $-1 < y(0) < -\frac{1}{2}$;

Λύση:

(α) Με αντικατάσταση επιβεβαιώνεται ότι οι $y_1(t) = \frac{1}{t-1}$ και $y_2(t) = \frac{1}{t-2}$ είναι λύσεις της $\frac{dy}{dt} = -y^2$ με αρχικές συνθήκες $y_1(0) = -1$ και $y_2(0) = -\frac{1}{2}$ αντίστοιχα.

(β) Από την $y_1(0) < y(0) < y_2(0)$ και το μονοσήμεντο των λύσεων έπεται ότι $y_1(t) < y(t) < y_2(t)$ για t στο κοινό πεδίο ορισμού των $y_1(t)$ και $y_2(t)$, δηλαδή

$$\frac{1}{t-1} < y(t) < \frac{1}{t-2}, \text{ για } t \in [0, 1).$$

2.3 Ανισότητα του Gronwall

Στη συνέχεια αναφέρουμε μία σημαντική εφαρμογή του τύπου μεταβολής των παραμέτρων. Έχουμε πρώτα το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 2.1 (Λήμμα Σύγκρισης) Έστω $u(t), v(t)$ λύσεις αντίστοιχα των

$$(\alpha) \quad \frac{du}{dt} + p(t)u \leq g(t) \quad , \quad u(0) = c,$$

$$(\beta) \quad \frac{dv}{dt} + p(t)v = g(t) \quad , \quad v(0) = c,$$

όπου $t \in [0, a]$, $a \in \mathbb{R}$ και $p(t), g(t)$ συνεχείς στο $[0, a]$.

Τότε

$$u(t) \leq v(t) \quad , \quad \text{στο } [0, a].$$

Απόδειξη: Από την (α) πολλαπλασιάζοντας με $e^{\int_0^t p(s)ds}$ έχουμε

$$e^{\int_0^t p(s)ds} \left[\frac{du}{dt} + p(t)u \right] \leq e^{\int_0^t p(s)ds} g(t).$$

Αντικαθιστώντας το $g(t)$ από την (β) η ανισότητα γράφεται

$$e^{\int_0^t p(s)ds} \left[\frac{du}{dt} + p(t)u \right] \leq e^{\int_0^t p(s)ds} \left[\frac{dv}{dt} + p(t)v \right],$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{d}{dt} \left[e^{\int_0^t p(s)ds} u(t) \right] \leq \frac{d}{dt} \left[e^{\int_0^t p(s)ds} v(t) \right].$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας από 0 έως t , προκύπτει

$$\int_0^t \frac{d}{dt} \left[e^{\int_0^t p(s)ds} u(t) \right] \leq \int_0^t \frac{d}{dt} \left[e^{\int_0^t p(s)ds} v(t) \right], \quad t \in [0, a],$$

δηλαδή

$$e^{\int_0^t p(s)ds} u(t) - u(0) \leq e^{\int_0^t p(s)ds} v(t) - v(0), \quad t \in [0, a],$$

απ' όπου λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες έχουμε τελικά

$$u(t) \leq v(t), \quad \forall t \in [0, a].$$

Θεώρημα 2.2 (Ανισότητα του Gronwall) Έστω $y(t), z(t)$ πραγματικές συναρτήσεις, ορισμένες και συνεχείς στο $[0, T]$. Υποθέτουμε ότι $z(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [0, T]$ και ότι ισχύει

$$y(t) \leq c + \int_0^t y(s)z(s) ds$$

για κάθε $t \in [0, T]$, όπου c σταθερά.

Τότε

$$y(t) \leq ce^{\int_0^t z(s)ds}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.11)$$

Απόδειξη: Έστω $R(t) = c + \int_0^t y(s)z(s) ds$. Τότε

$$\frac{dR(t)}{dt} = y(t)z(t) \leq z(t)R(t), \quad R(0) = c.$$

Έστω

$$\frac{dv(t)}{dt} = z(t)v(t), \quad v(0) = c.$$

Από το Λήμμα 2.1 προκύπτει

$$R(t) \leq v(t) = ce^{\int_0^t z(s) ds},$$

που σε συνδυασμό με την

$$y(t) \leq c + \int_0^t y(s)z(s) ds = R(t)$$

μας οδηγεί στο συμπέρασμα.

Δίνουμε τώρα μία αντιπροσωπευτική εφαρμογή της ανισότητας του Gronwall.

Πόρισμα 2.1 Έστω το Π.Α.Τ.

$$y' = f(t, y) \quad , \quad y(0) = y_0 \quad (2.12)$$

και ακόμη έστω ότι η $f(t, y)$ ικανοποιεί την εκτίμηση (συνθήκη γραμμικής ανάπτυξης)

$$|f(t, y)| \leq k_1 + k_2|y| \quad , \quad \forall t \geq 0 \quad (2.13)$$

όπου $k_1, k_2 > 0$ σταθερές. Τότε η λύση του Π.Α.Τ. δεν εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο.

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι αν η λύση υπάρχει στο $[0, T)$, τότε για αυτά τα t ισχύει η ομοιόμορφη εκτίμηση

$$|y(t)| \leq c \quad , \quad \forall t \in [0, T)$$

όπου c σταθερά ανεξάρτητη του t . Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης (2.12) έχουμε

$$\int_0^t y' ds = \int_0^t f(s, y(s)) ds,$$

δηλαδή

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s)) ds.$$

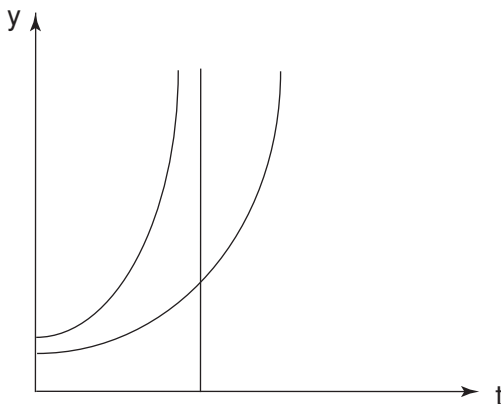
Παίρνοντας απόλυτες τιμές έχουμε

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq |y_0| + \left| \int_0^t f(s, y(s)) ds \right| \leq |y_0| + \int_0^t |f(s, y(s))| ds \\ &\stackrel{(2.13)}{\leq} |y_0| + \int_0^t (k_1 + k_2|y(s)|) ds \leq |y_0| + k_1 T + \int_0^t k_2 |y(s)| ds \\ &= c_1 + \int_0^t k_2 |y(s)| ds, \end{aligned}$$

για $t < T$. Κάνοντας χρήση της ανισότητας Gronwall προκύπτει ότι

$$|y(t)| \leq c_1 e^{k_2 t} \leq c_1 e^{k_2 T} =: c$$

και η επαλήθευση της εκτίμησης είναι πλήρης.



Σχήμα 2.6: Το φαινόμενο της έκρηξης.

Σημείωση 2.4 «Ολική Ύπαρξη» Παρατηρούμε ότι η συνθήκη (2.13) είναι περιορισμός της συμπεριφοράς της $f(t, y)$ για $|y| \rightarrow \infty$. Από τη διαφορική εξίσωση

$$y' = y^{1+a}, \quad a > 0,$$

(βλ. Παράδειγμα 1.1) της οποίας οι λύσεις

$$y(t) = \left(\frac{1}{\frac{1}{y^a(0)} - at} \right)^{\frac{1}{a}}$$

εκρήγνυνται σε πεπερασμένο χρόνο, προκύπτει ότι η συνθήκη (2.13) είναι ουσιώδης (βλ. Σχήμα 2.6).

Αποδεικνύεται σε πιο προχωρημένα βιβλία ότι η λύση του Θεωρήματος 2.1 μπορεί να συνεχιστεί σε ένα μέγιστο διάστημα $[t_0, t_0 + a^*]$ που χαρακτηρίζεται από το ότι το $(t, y(t))$ τείνει στο σύνορο S καθώς το $t \rightarrow t_0 + a^*$. Ειδικά στην περίπτωση που η f ορίζεται για όλα τα t και y , τότε το μέγιστο διάστημα είναι πεπερασμένο μόνο αν η λύση $y(t)$ εκρήγνυται καθώς το $t \rightarrow t_0 + a^*$. Ένας τρόπος λοιπόν για να αποδειχθεί η ολική ύπαρξη για $t \geq t_0$ είναι ένα a priori φράγμα στη λύση που να αποκλείει την έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο.

Παράδειγμα 2.16 Δείξτε ότι για κάθε $y_0 \in \mathbb{R}$ η λύση του Π.Α.Τ.

$$\frac{dy}{dt} = (\sin y)y + 1, \quad y(0) = y_0,$$

δεν εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο.

Λύση: Έχουμε την εκτίμηση

$$|(\sin y)y + 1| \leq |y| + 1$$

και συνεπώς το Πόρισμα 2.1 εφαρμόζεται.

Παράδειγμα 2.17 Έστω $u(t)$ και $v(t)$ λύσεις αντίστοιχα των

$$\frac{du}{dt} \leq f(t, u(t)),$$

$$\frac{dv}{dt} = f(t, v(t)),$$

στο $[a, b]$, με $u(a) = v(a)$, όπου $f(t, y)$ συνάρτηση Lipschitz όπως στην (2.10). Τότε

$$u(t) \leq v(t) \text{ στο } [a, b].$$

Απόδειξη: Με εις άτοπον απαγωγή. Έστω ότι υπάρχει $t_1 \in (a, b]$ τέτοιο ώστε $u(t_1) > v(t_1)$. Θεωρούμε το μέγιστο $t_0 \in [a, b]$ για το οποίο ισχύει ότι $u(t_0) \leq v(t_0)$. Εφ' όσον οι συναρτήσεις είναι συνεχείς και το σύνολο $[a, b]$ κλειστό και φραγμένο, το t_0 είναι καλώς ορισμένο και επίσης $u(t_0) = v(t_0)$.

Ορίζουμε $\sigma(t) := u(t) - v(t)$. Στο $[t_0, t_1]$ ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\sigma(t) \geq 0,$$

και

$$\begin{aligned} \sigma'(t) = u'(t) - v'(t) &\leq f(t, u(t)) - f(t, v(t)) \\ &\leq L|u(t) - v(t)| = L(u(t) - v(t)). \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[t_0, t]$ έχουμε

$$\sigma(t) \leq L \int_{t_0}^t \sigma(s) ds.$$

Από την ανισότητα του Gronwall, Θεώρημα 2.2, προκύπτει ότι $\sigma(t) \equiv 0$ στο $[t_0, t_1]$, που είναι άτοπο.

Άμεση σχεδόν συνέπεια του προηγούμενου αποτελέσματος είναι το ακόλουθο χρήσιμο θεώρημα.

Θεώρημα 2.3 (Σύγκρισης) Έστω $y(t)$ και $z(t)$ λύσεις των

$$y' = f(t, y), \quad z' = g(t, z),$$

όπου $f(t, y) \leq g(t, y)$ για $a \leq t \leq b$, και οι f και g ικανοποιούν συνθήκες Lipschitz. Αν $y(a) = z(a)$ τότε $y(t) \leq z(t)$ στο $[a, b]$.

Απόδειξη: Κατ' αρχήν έχουμε

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) \leq g(t, y(t)),$$

απ' όπου μέσω του Παραδείγματος 2.17 συμπεραίνουμε ότι $y(t) \leq z(t)$.

2.4 Συνεχής εξάρτηση

Το θεώρημα της συνεχούς εξάρτησης ως προς την αρχική συνθήκη y_0 λέει ότι αν $y(t, y_0)$ είναι η λύση του Π.Α.Τ. (2.1) και αν $[t_0, t_0 + T]$ είναι ένα υποδιάστημα του πεδίου ορισμού της με $T < +\infty$, τότε αν επιλέξουμε αρχική συνθήκη $\overline{y_0}$ αρκετά κοντά στο y_0 , η αντίστοιχη λύση, που συμβολίζεται με $y(t, \overline{y_0})$, θα παραμένει κοντά στην $y(t, y_0)$ για $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Θεώρημα 2.4 (Συνεχής εξάρτηση ως προς τις αρχικές συνθήκες) Έ-

στω f και $\frac{\partial f}{\partial y}$ συναρτήσεις συνεχείς στο $S = (t_0, t_1) \times [A, B]$, όπου τα A και B είναι πεπερασμένα. Υποθέτουμε ότι η λύση $y(t, y_0)$ του Π.Α.Τ. (2.1) με $y(t_0) = y_0$ υπάρχει για όλα τα t με $t_0 \leq t \leq t_0 + T < t_1$ και ότι το γράφημά της περιέχεται στο εσωτερικό του S , $(t_0, t_1) \times (A, B)$. Το συμπέρασμα είναι ότι δοθέντος $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\overline{y_0}$ με $|y_0 - \overline{y_0}| < \delta$, η αντίστοιχη λύση $y(t, \overline{y_0})$ έχει πεδίο ορισμού που περιλαμβάνει το $[t_0, t_0 + T]$ και επίσης ισχύει η εκτίμηση

$$|y(t, y_0) - y(t, \overline{y_0})| < \varepsilon, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T].$$

Σχόλια: Σημειώνουμε ότι η επιλογή του δ στο θεώρημα εξαρτάται και από το ε αλλά και από το T , και ότι εν γένει η αντίστοιχη πρόταση για $T = +\infty$ δεν είναι αληθής. Για παράδειγμα θεωρήστε την εξίσωση $\frac{dy}{dt} = y^2$ στο $S = (0, +\infty) \times [-1, 1]$. Για $y_0 = 0$ η αντίστοιχη λύση είναι $y(t, 0) \equiv 0$. Δοθέντων $T > 0$ και $\varepsilon > 0$, και για το

$$\delta = \min \left\{ \frac{1}{T}, \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + T} \right\},$$

τότε αν $|\overline{y_0} - y_0| = |\overline{y_0}| < \delta$, το πεδίο ορισμού της $y(t, \overline{y_0})$ περιλαμβάνει το $[0, T]$ και επίσης $|y(t, \overline{y_0}) - 0| < \varepsilon$ για $t \in [0, T]$.

Πράγματι με τη μέθοδο χωριζόμενων μεταβλητών παίρνουμε

$$y(t, \overline{y_0}) = \frac{1}{\frac{1}{\overline{y_0}} - t}.$$

Κατ' αρχήν, αν $\overline{y_0} < \delta \leq \frac{1}{T}$ τότε $\frac{1}{\overline{y_0}} > T$ και συνεπώς η λύση υπάρχει στο διάστημα $[0, T]$. Επίσης

$$0 < y(t, \overline{y_0}) < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{\overline{y_0}} - t} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\overline{y_0}} - t > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \overline{y_0} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + t},$$

που ικανοποιείται αν

$$|\overline{y_0}| < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + T}.$$

Τέλος αν $T = +\infty$ τότε δεν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε να κατοχυρώνει ότι η $y(t, \overline{y_0})$ υπάρχει στο διάστημα $(0, +\infty)$ και είναι μικρή, διότι όσο μικρή και αν είναι η

αρχική τιμή, η λύση εκρήγνυται για $t^* = \frac{1}{y_0}$, και συνεπώς το πεδίο ορισμού είναι πάντα πεπερασμένο.

Απόδειξη: Θα δώσουμε την απόδειξη κάτω από την επιπλέον υπόθεση ότι η λύση $y(t, \bar{y}_0)$ υπάρχει στο διάστημα $(t_0, t_0 + T)$ με γράφημα που περιέχεται στο σύνολο $\tilde{S} := [t_0, t_0 + T] \times [A, B]$ και θα αρκεστούμε απλώς στην απόδειξη της εκτίμησης. Συμβολίζουμε τις $y(t, y_0), y(t, \bar{y}_0)$ με $y_1(t)$ και $y_2(t)$ αντίστοιχα. Από την (2.4) έχουμε

$$y_1(t) = y_1(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y_1(s)) ds,$$

και

$$y_2(t) = y_2(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y_2(s)) ds.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη και παίρνοντας απόλυτες τιμές

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_2(t)| &\leq |y_1(t_0) - y_2(t_0)| + \left| \int_{t_0}^t [f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))] ds \right| \\ &\leq |y_1(t_0) - y_2(t_0)| + \int_{t_0}^t |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds \\ &\leq |y_1(t_0) - y_2(t_0)| + L \int_{t_0}^t |y_1(s) - y_2(s)| ds \\ &\leq \delta + L \int_{t_0}^t |y_1(s) - y_2(s)| ds, \end{aligned}$$

όπου στην τρίτη ανισότητα κάναμε χρήση του ότι τα γραφήματα των λύσεων περιέχονται στο συμπαγές σύνολο $\tilde{S}$, με

$$L = \max_{\tilde{S}} \left| \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right|$$

(βλ. Ορισμό 2.1 και εξήγηση που ακολουθεί). Εφαρμόζοντας την ανισότητα Gronwall (Θεώρημα 2.2) παίρνουμε

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq \delta e^{\int_{t_0}^t L ds} = \delta e^{L(t-t_0)}.$$

Από αυτήν την εκτίμηση προκύπτει ότι για να έχουμε

$$|y_1(t) - y_2(t)| < \varepsilon \quad \text{για } t \in [t_0, t_0 + T],$$

αρκεί $\delta e^{LT} < \varepsilon$, ή ισοδύναμα $\delta < \varepsilon e^{-LT}$. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

Κλείνουμε την ενότητα με ένα παράδειγμα συνεχούς εξάρτησης ως προς την f .

Παράδειγμα 2.18 (Συνεχής εξάρτηση ως προς το διανυσματικό πεδίο)
Θεωρούμε τις διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

και

$$\frac{dz^\varepsilon}{dt} = f(t, z^\varepsilon) + g_\varepsilon(t, z^\varepsilon),$$

όπου $|g_\varepsilon(t, y)| < \varepsilon$, με $y(t_0) = z^\varepsilon(t_0)$. Εάν τα $(t, y(t)), (t, z^\varepsilon(t))$, για $t \in [t_0, T]$ όπου $t_0 + T < t_1$, περιέχονται στο $S = (t_0, t_1) \times [A, B]$, όπου οι $f, g_\varepsilon, \frac{\partial f}{\partial y}$ και $\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial y}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, δείξτε ότι

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} z^\varepsilon(t) = y(t),$$

ομοιόμορφα στο $[t_0, t_0 + T]$.

Λύση: Έχουμε

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

και

$$z^\varepsilon(t) = z^\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^t [f(s, z^\varepsilon(s)) + g_\varepsilon(s, z^\varepsilon(s))] ds.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη με παρόμοιο τρόπο όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.3 έχουμε

$$|z^\varepsilon(t) - y(t)| \leq L \int_{t_0}^t |z^\varepsilon(s) - y(s)| ds + \varepsilon T,$$

απ' όπου η εκτίμηση Gronwall δίνει

$$|z^\varepsilon(t) - y(t)| \leq \varepsilon T e^{LT}$$

και το συμπέρασμα προκύπτει.

2.5 Το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης

Η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \tag{2.14}$$

συσχετίζει τις ανεξάρτητες μεταβλητές x και y και ορίζει τη μία σαν συνάρτηση της άλλης. Συγκεκριμένα ορίζει τις συναρτήσεις

$$y = f_+(x) = \sqrt{1 - x^2}, \text{ για } y > 0$$

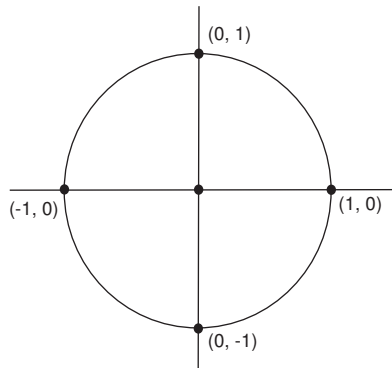
και

$$y = f_-(x) = -\sqrt{1 - x^2}, \text{ για } y < 0,$$

που αντιστοιχούν με το πάνω και κάτω ήμισυ της μοναδιαίας περιφέρειας (βλ. Σχήμα 2.7).

Με ανάλογο τρόπο η (2.14) ορίζει τις συναρτήσεις του y :

$$x = g_+(y) = \sqrt{1 - y^2}, \text{ για } x > 0,$$

Σχήμα 2.7: $\{ (x, y) : x^2 + y^2 - 1 = 0 \}$.

και

$$x = g_-(y) = -\sqrt{1 - y^2}, \text{ για } x < 0,$$

που αντιστοιχούν με το δεξιό και αριστερό ήμισυ της μοναδιαίας περιφέρειας.

Όταν δοθεί μία εξίσωση της μορφής

$$F(x, y) = 0, \quad (2.15)$$

είναι εν γένει σπάνιο το να μπορούμε να εκφράσουμε σε κλειστή μορφή τη μία μεταβλητή σαν συνάρτηση της άλλης. Το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης όμως εγγυάται, κάτω από κατάλληλες συνθήκες, ότι η σχέση (2.15) ορίζει τη μία μεταβλητή σαν συνάρτηση της άλλης, τοπικά, και γύρω από σημείο (x_0, y_0) , για το οποίο ισχύει ότι $F(x_0, y_0) = 0$. Το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης είναι το κατ' εξοχήν εργαλείο της τοπικής ανάλυσης.

Θεώρημα 2.5 Έστω $F(x, y)$ ορισμένη σε ένα ανοιχτό σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^2$ που περιέχει το σημείο (x_0, y_0) και έστω F συνεχής με συνεχείς πρώτες παραγώγους στο S . Υποθέτουμε επίσης ότι

$$(I) \quad F(x_0, y_0) = 0 \text{ και}$$

$$(II) \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Τότε υπάρχουν $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$ τέτοια ώστε να ισχύουν τα εξής:

$$(a) \quad \text{το ορθογώνιο } R = \{ (x, y) \mid |x - x_0| \leq \delta_1, |y - y_0| \leq \delta_2 \} \text{ περιέχεται στο } S,$$

$$(b) \quad \text{για κάθε } x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \text{ υπάρχει ακριβώς ένα } y \in (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2) \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$F(x, y) = 0, \quad (2.16)$$

(γ) Έστω $y = f(x)$ η μοναδική συνάρτηση που ορίζεται στο (β) , τότε η συνάρτηση $f : (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \rightarrow (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ είναι συνεχής με συνεχή παράγωγο, και ικανοποιεί τη σχέση

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}. \quad (2.17)$$

Σχόλια πριν την απόδειξη: 1. Η σχέση (2.17) προκύπτει ως εξής: έστω $y = f(x)$ η συνάρτηση που ορίζεται από την (2.16), τότε

$$F(x, f(x)) = 0, \quad x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$$

και διαφορίζοντας παίρνουμε

$$0 = \frac{d}{dx} [F(x, f(x))] = F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x),$$

απ' όπου οδηγούμαστε στην (2.17).

2. Σημειώνουμε ότι από τα (α) και (β) συνεπάγεται ότι όλες οι λύσεις της $F(x, y) = 0$ με $|x - x_0| \leq \delta_1$ και $|y - y_0| \leq \delta_2$ είναι της μορφής $y = f(x)$, όπου f η μοναδική συνάρτηση που ορίζεται από το (β).

3. Θεωρούμε την εξίσωση

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Έχουμε $F_y(x, y) = 2y$, άρα για κάθε σημείο $(x_0, y_0) \neq (\pm 1, 0)$ με $F(x_0, y_0) = 0$, ισχύει η υπόθεση (II), $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Επομένως το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης εφαρμόζεται και δίνει τοπικά, γύρω από το (x_0, y_0) , την y συναρτήσει της x . Ανάλογα έχουμε $F_x(x, y) = 2x$, και για $(x_0, y_0) \neq (0, \pm 1)$ ισχύει η $F_x(x_0, y_0) \neq 0$, συνεπώς το θεώρημα δίνει την x σαν συνάρτηση της y τοπικά γύρω από το (x_0, y_0) . Βέβαια για την συγκεκριμένη F έχουμε τύπους για τις συναρτήσεις. Αντίθετα, από το Σχήμα 2.7 παρατηρούμε ότι οι λύσεις της $F(x, y) = 0$ τοπικά γύρω από τα σημεία $(\pm 1, 0)$ δεν είναι της μορφής $y = h(x)$. Αυτό δεν αντιβαίνει στο θεώρημα διότι στα σημεία $(\pm 1, 0)$ η υπόθεση (II) παύει να ισχύει.

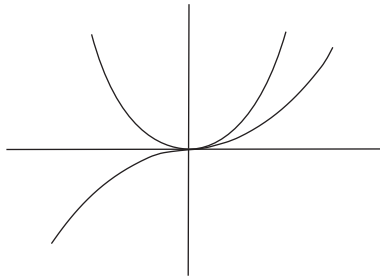
4. Έστω

$$F(x, y) = (y - x^2)(y - x^3).$$

Θεωρούμε την εξίσωση $F(x, y) = 0$ σε περιοχή του $(0, 0)$. Προφανώς οι λύσεις δίνονται από τις $y = f_1(x) = x^2$ και $y = f_2(x) = x^3$ (βλ. Σχήμα 2.8), κάτι που φαινομενικά αντίκειται στη μοναδικότητα της f όπως διατυπώνεται στο Θεώρημα 2.5(γ). Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση η υπόθεση (II) δεν επαληθεύεται:

$$F_y(x, y) = (y - x^3) + (y - x^2), \quad F_y(0, 0) = 0,$$

κατά συνέπεια δεν υπάρχει αντίφαση.



Σχήμα 2.8: Η $F(x, y) = 0$, όπου $F(x, y) = (y - x^2)(y - x^3)$, έχει σαν λύσεις τις $f_1(x) = x^2$ και $f_2(x) = x^3$.

5. Θα δώσουμε δύο αποδείξεις του θεωρήματος. Η πρώτη κάνει χρήση του Θεωρήματος 2.1 περί ύπαρξης και μονοσήμαντου, αλλά χρειάζεται μία επιπλέον υπόθεση. Η δεύτερη απόδειξη είναι πιο γενική.

1η Απόδειξη: Έστω ότι η F ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.1 και επιπροσθέτως έστω ότι έχει συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης, δηλαδή $F \in C^2$. Θεωρούμε το Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Θα δείξουμε ότι η λύση του (2.18) προσφέρει τη ζητούμενη συνάρτηση $f(x)$. Πρώτα επιλέγουμε $a > 0$ και $b > 0$ τέτοια ώστε το ορθογώνιο

$$R = \{ (x, y) \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b \}$$

να περιέχεται στο S , το οποίο είναι βέβαια εφικτό διότι το S είναι ανοικτό σύνολο. Στη συνέχεια περιορίζουμε αν χρειαστεί τα a και b περισσότερο έτσι ώστε να κατοχυρώσουμε ότι

$$F_y(x, y) \neq 0 \text{ στο } R, \quad (2.19)$$

κάτι που το επιτρέπει η υπόθεση (II) και η συνέχεια της F_y . Η υπόθεση ότι η F είναι C^2 μάς δίνει τη δυνατότητα να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.1. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση $y = f(x)$ για $|x - x_0| \leq \delta_1 \leq a$ που ικανοποιεί το (2.18). Το κλειστό διάστημα $|x - x_0| \leq \delta_1$ προκύπτει αν επιλέξουμε το δ_1 να είναι μικρότερο από το a του Θεωρήματος 2.1. Η εξίσωση του προβλήματος (2.18) γράφεται

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0,$$

ισοδύναμα

$$\frac{d}{dx} [F(x, f(x))] = 0,$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι

$$F(x, f(x)) = \text{σταθερά},$$

και κάνοντας χρήση της αρχικής συνθήκης του προβλήματος (2.18) και της υπόθεσης (I) τελικά παίρνουμε

$$F(x, f(x)) = F(x_0, f(x_0)) = 0.$$

Ορίζουμε

$$\delta_2 := \max_{|x-x_0| \leq \delta_1} |f(x) - y_0|.$$

Κάνοντας χρήση της συνέχειας της f και στην ανάγκη επιλέγοντας το δ_1 μικρότερο, μπορούμε να κατοχυρώσουμε ότι

$$\{ (x, y) \mid |x - x_0| \leq \delta_1, |y - y_0| \leq \delta_2 \} \subset R.$$

Για x σταθεροποιημένο, με $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, θεωρούμε την

$$F(x, y) = 0$$

σαν εξίσωση ως προς y . Έστω τώρα ότι υπάρχουν δύο λύσεις y_1 και y_2 , δηλαδή

$$F(x, y_1) = F(x, y_2) = 0,$$

τέτοιες ώστε

$$y_0 - \delta_2 < y_1 < y_2 < y_0 + \delta_2.$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής προκύπτει ότι

$$0 = F(x, y_2) - F(x, y_1) = F_y(x, y^*)$$

για κάποιο $y^* \in (y_1, y_2)$, που αντιφάσκει με την (2.19). Άρα η $y = f(x)$ είναι η μοναδική λύση της $F(x, y) = 0$ με $y(x_0) = y_0$, για $(x, y) \in R$ (βλ. Σχήμα 2.9).

2η Απόδειξη: 1. Έστω $F_y(x_0, y_0) > 0$ (η περίπτωση $F_y(x_0, y_0) < 0$ είναι εντελώς ανάλογη και παραλείπεται). Επιλέγουμε πρώτα $\delta_2 > 0$ έτσι ώστε

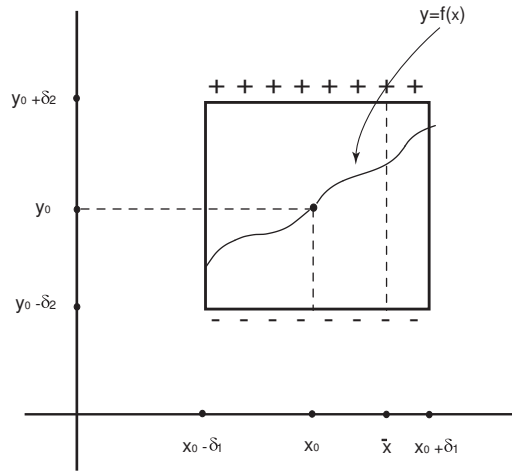
$$F_y(x, y) > 0, \quad |x - x_0| \leq \delta_1, \quad |y - y_0| \leq \delta_2,$$

το οποίο είναι δυνατό λόγω της συνέχειας της F_y . Έπεται ότι η $y \rightarrow F(x_0, y)$ είναι αυστηρά αύξουσα και δεδομένου ότι $F(x_0, y_0) = 0$, ισχύουν οι ανισότητες

$$F(x_0, y_0 - \delta_2) < 0, \quad F(x_0, y_0 + \delta_2) > 0. \quad (2.20)$$

Κάνοντας χρήση τώρα της συνέχειας των $x \rightarrow F(x, y_0 \pm \delta_2)$ και επιλέγοντας δ_1 αρκετά μικρό παίρνουμε, μέσω της (2.20) ότι

$$F(x, y_0 - \delta_2) < 0, \quad F(x, y_0 + \delta_2) > 0, \quad |x - x_0| \leq \delta_1. \quad (2.21)$$



Σχήμα 2.9: Το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης.

Έχουμε λοιπόν κατασκευάσει ένα ορθογώνιο

$$[x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1] \times [y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2]$$

στην πάνω πλευρά του οποίου η F είναι θετική, στην κάτω πλευρά η F είναι αρνητική, ενώ εντός του ορθογωνίου ισχύει η $F_y > 0$ (βλ. Σχήμα 2.9).

2. Αν τώρα δοθεί $\bar{x} \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$ θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση

$$y \rightarrow F(\bar{x}, y), \quad y \in [y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2],$$

η οποία αλλάζει πρόσημο ακριβώς μία φορά. Πράγματι, από την (2.21), για $x = \bar{x}$ συμπεραίνουμε, λόγω συνέχειας, ότι υπάρχει $\bar{y} \in (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ τέτοιο ώστε

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = 0. \quad (2.22)$$

Επίσης το $\bar{y}$ είναι μοναδικό διότι η $y \rightarrow F(\bar{x}, y)$ είναι αυστηρά αύξουσα, όπως προκύπτει από την $F_y > 0$. Ορίζουμε λοιπόν την f ως εξής:

$$f(\bar{x}) := \bar{y}, \quad \text{για } \bar{x} \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1].$$

3. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x = x_0$. Δοθέντος $\varepsilon > 0$ ισχύει ότι $F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0$, $F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0$. Από την συνέχεια της F προκύπτει ότι για κατάλληλο $\delta > 0$ έχουμε

$$F(x, y_0 + \varepsilon) > 0, \quad F(x, y_0 - \varepsilon) < 0, \quad |x - x_0| < \delta.$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής συνάγουμε την ύπαρξη συνάρτησης $y^* = y^*(x)$ με $y^* \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, τέτοιας ώστε $F(x, y^*(x)) = 0$. Από την (2.22) και λόγω της μοναδικότητας της f συμπεραίνουμε ότι $y^*(x) = f(x)$. Συνεπώς

$$|f(x) - f(x_0)| = |y^*(x) - y_0| < \varepsilon \quad \text{για } |x - x_0| < \delta,$$

που αποδεικνύει τη συνέχεια.

Για $x^* \neq x_0$ με $x^* \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, θεωρούμε το σημείο $(x^*, f(x^*)) \in R$. Οι υποθέσεις του θεωρήματος ισχύουν για το (x^*, y^*) στην θέση του (x_0, y_0) . Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω κατασκευή οδηγούμαστε σε μία f^* που συμπίπτει αναγκαστικά με την f λόγω του ορισμού της τελευταίας ως μοναδικής λύσης της εξίσωσης (ως προς y) $F(x, y) = 0$. Συνεπώς η f είναι συνεχής στο x^* , άρα και για κάθε $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$.

4. Τέλος θα δείξουμε ότι η $f(x)$ είναι διαφορίσιμη και ότι ικανοποιεί τη σχέση

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))},$$

απ' όπου και προκύπτει ότι η f είναι C^1 .

Έστω λοιπόν x σταθεροποιημένο σημείο και $y = f(x)$. Για Δx τέτοιο ώστε το σημείο $x + \Delta x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, ορίζουμε

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(x + \Delta x) - y.$$

Από τον ορισμό της f έχουμε

$$F(x, y) = 0 = F(x + \Delta x, f(x + \Delta x)) = F(x + \Delta x, y + \Delta y).$$

Άρα

$$0 = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = F_x(\bar{x}, \bar{y})\Delta x + F_y(\bar{x}, \bar{y})\Delta y,$$

από το θεώρημα μέσης τιμής, όπου $\bar{x} \in (x, x + \Delta x)$, $\bar{y} \in (y, y + \Delta y)$. Έπεται ότι

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(\bar{x}, \bar{y})}{F_y(\bar{x}, \bar{y})},$$

όπου κάναμε χρήση της $F_y > 0$ στο ορθογώνιο. Παίρνοντας τώρα το όριο καθώς το $\Delta x \rightarrow 0$, κάνοντας χρήση της συνέχειας έχουμε $\Delta y \rightarrow 0$ και συνεπώς $(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow (x, y)$ και

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$$

ή ισοδύναμα

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}.$$

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

Επώδός

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε τα θεμελιώδη θεωρήματα της γενικής θεωρίας των διαφορικών εξισώσεων, δηλαδή ένα σώμα αποτελεσμάτων ανεξάρτητων της μορφής της εξίσωσης. Στην καρδιά του κεφαλαίου βρίσκεται η μέθοδος Picard. Αναπτύχθηκε στις αρχές του εικοστού αιώνα και αντιπροσωπεύει ένα άλλο στάδιο εξέλιξης που πάει

πέρα από τον Απειροστικό Λογισμό. Οι ρίζες της μεθόδου μπορούν να αναζητηθούν στα μαθηματικά της εποχής του Νεύτωνα και του Cauchy, ενώ η πρόσφατη αφηρημένη μορφή της είναι η μέθοδος συστολής του Banach. Η μέθοδος Picard προσφέρει μόνο τοπική ύπαρξη. Το εργαλείο για την ολική ύπαρξη, όποτε αυτή είναι δυνατή, είναι η ανισότητα του Gronwall. Κλείσαμε το κεφάλαιο με τη συνεχή εξάρτηση της λύσης από τις αρχικές συνθήκες και το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης, το κατ' εξοχήν εργαλείο της τοπικής ανάλυσης.

2.6 Ασκήσεις

2.1 Να μελετηθεί η επιλυσιμότητα του Π.Α.Τ.

$$x' = f(x) \quad , \quad x(0) = 0,$$

στην κλάση των κατά τμήματα C^1 συναρτήσεων, όπου

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$(g) \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 2, & x < 0 \end{cases}$$

2.2 Να μετατραπούν τα ακόλουθα Π.Α.Τ. σε ολοκληρωτικές εξισώσεις και να προσδιοριστούν οι πρώτες τέσσερις προσεγγίσεις Picard:

$$(\alpha) \quad \frac{dy}{dt} = t^2 + y^2 \quad , \quad y(1) = 2,$$

$$(\beta) \quad \frac{dy}{dt} = 1 - y^3 \quad , \quad y(-1) = 3.$$

2.3 (α) Κάνοντας χρήση της μεθόδου Euler να βρεθούν προσεγγίσεις της λύσης στους χρόνους $t = 0.1$, $t = 0.2$, $t = 0.3$ και $t = 0.4$, με βήμα $h = 0.1$ για τα ακόλουθα Π.Α.Τ.:

$$(\alpha) \quad y' = 2y - 1 \quad , \quad y(0) = 1,$$

$$(\beta) \quad y' = 0.5 - t + 2y \quad , \quad y(0) = 1,$$

$$(\gamma) \quad y' = 3 \cos t - 2y \quad , \quad y(0) = 0.$$

(β) Να επαναληφθεί το (α) για $h = 0.05$.

2.4 Δείξτε ότι αν $\{\varphi_n(t)\}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο $[a, b]$ και $\varphi_n \rightarrow \varphi$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$ τότε ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n(t) dt = \int_a^b \varphi(t) dt.$$

- 2.5** Με χρήση της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων ναδειχθεί η ύπαρξη μίας συνάρτησης $x(t)$ τέτοιας ώστε

$$x(t) = \begin{cases} e^t, & -1 \leq t \leq 0, \\ 1 + \int_0^t g(s)[x(s-1) + x(s)] ds, & 0 < t \leq 2, \end{cases}$$

όπου g συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $[0, 2]$.

- 2.6** Θεωρούμε την εξίσωση $F(x, \lambda) = 0$ για (x, λ) κοντά στο $(0, 0)$, όπου

$$F(x, \lambda) = \lambda + (1 + \lambda)x + x^2.$$

Να προσδιοριστεί η συνάρτηση $x = \psi(\lambda)$, $F(\psi(\lambda), \lambda) = 0$, της οποίας την ύπαρξη εγγυάται το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης.

- 2.7** Να εφαρμοστεί το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης προκειμένου ναδειχθεί ότι υπάρχει μοναδική λύση της εξίσωσης

$$\lambda + (1 - \lambda)x + x^3 = 0,$$

για (λ, x) κοντά στο $(1, -1)$.

- 2.8** Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$y' = f(t, y),$$

όπου $f(t+1, y) = f(t, y)$ και f όπως στο Θεώρημα 2.1. Έστω $y(t, t_0, y_0)$ η λύση που αντιστοιχεί στην αρχική τιμή y_0 για $t = t_0$. Ναδειχθεί ότι:

$$(\alpha) \quad y(t+1, t_0+1, y_0) = y(t, t_0, y_0),$$

$$(\beta) \quad y(t+1, t_0, y_0) = y\left(t, t_0, y(t_0+1, t_0, y_0)\right).$$

- 2.9** Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$y' = -y + c(t), \quad c(t+1) = c(t),$$

όπου $c(t)$ συνεχής συνάρτηση. Στο παράδειγμα 1.14 δείξαμε ότι υπάρχει μοναδική 1-περιοδική λύση που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $y(0) = y_0^*$, όπου

$$y_0^* = \frac{c_0}{1 - e^{-1}}.$$

Ναδειχθεί ότι η 1-περιοδική λύση είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής, δηλαδή

$$\left| y(t, 0, y_0) - y(t, 0, y_0^*) \right| \rightarrow 0,$$

καθώς το $t \rightarrow +\infty$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε τις συναρτήσεις $\phi_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ που ορίζονται από τις

$$\phi_0(t) = y(t, 0, y_0), \quad \phi_1(t) = y(t + 1, 0, y_0), \quad \dots, \quad \phi_k(t) = y(t + k, 0, y_0),$$

για $t \in [0, 1]$ και χρησιμοποιήστε τη σχέση (β) της άσκησης 2.8.

2.10 Έστω $f(t, x)$ συνεχής συνάρτηση στο $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ και μη φθίνουσα ως προς x για σταθεροποιημένο t . Έστω ακόμη g και h συνεχείς διαφορίσιμες συναρτήσεις στο $[0, +\infty)$ που ικανοποιούν τις

$$h'(t) \leq f(t, h(t)) \quad , \quad t \geq 0,$$

$$g'(t) = f(t, g(t)) \quad , \quad t \geq 0.$$

(α) Εάν $h(0) < g(0)$ τότε $h(t) < g(t)$ για $t \geq 0$.

(β) Ναδειχθεί ότι το συμπέρασμα του (α) δεν είναι κατ' ανάγκη σωστό αν $h(0) \leq g(0)$.

2.11 Θεωρώντας το Π.Α.Τ.

$$x' = 1 + x^{\frac{2}{3}}, \quad x(0) = 0,$$

ναδειχθεί ότι η συνθήκη Lipschitz δεν είναι αναγκαία για το μονοσήμαντο των λύσεων.

2.12 Δίνεται το Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} x' = x^2 + \frac{7}{8}e^{t^4} \\ x(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(α) Να εξεταστεί ως προς την ύπαρξη τοπικής λύσης.

(β) Να εξεταστεί ως προς την ύπαρξη ολικής λύσης.

2.13 Έστω $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz και $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Ναδειχθεί ότι το Π.Α.Τ. για το σύστημα

$$\begin{cases} x' = g(x) \\ y' = f(x)y \end{cases}$$

έχει το πολύ μία λύση στο διάστημα $[a, b]$.

Υπόδειξη: Κάνοντας χρήση της ιδιότητας Lipschitz ναδειχθεί ότι $x_1(t) \equiv x_2(t)$. Εφαρμόστε Gronwall για να δείξετε ότι $y_1(t) \equiv y_2(t)$.

2.14 Έστω το Π.Α.Τ.

$$y' = \frac{(y^2 - 4)(\sin^2 y^3 + \cos y - 2)}{2}, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

Αν $y = \varphi(t)$ είναι η λύση του Π.Α.Τ., εξηγήστε (χωρίς να λυθεί η εξίσωση) γιατί ισχύει ότι $\varphi(t) < 2$, για κάθε t .

2.15 Έστω η διαφορική εξίσωση

$$y' = \frac{(1+t)^2}{(1+y)^2}.$$

Αν $y = \varphi(t)$ είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\varphi(0) = -0.2$, δείξτε (χωρίς να λυθεί η εξίσωση) ότι $\varphi(t) < t$, για κάθε t .

2.16 Έστω u συνεχής μη αρνητική συνάρτηση στο $[a, +\infty)$ που ικανοποιεί την ανισότητα

$$u(t) \leq c + \int_a^t b(s) [u(s)]^a ds,$$

για $t \geq a$, όπου $c \geq 0$, $0 < a < 1$ και b συνεχής μη αρνητική συνάρτηση στο $[a, +\infty)$. Ναδειχθεί ότι

$$u(t) \leq \left[c^{1-a} + (1-a) \int_a^t b(s) ds \right]^{\frac{1}{1-a}},$$

για $t \geq a$.

2.17 Έστω $C > 0$ σταθερά, F συνεχής μη αρνητική συνάρτηση στο $[1, +\infty)$, τέτοια ώστε

$$tF(t) \leq C + \int_1^t F(s) ds,$$

για $t \geq 1$. Ναδειχθεί ότι

$$F(t) \leq C, \quad \text{για } t \geq 1.$$

2.18 Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$x' = h_1(t)g_1(x) + h_2(t)g_2(x), \quad t \geq 0, \quad x(0) = \xi > 0.$$

Υποθέτουμε ότι οι g_1, g_2, h_1, h_2 είναι θετικές συνεχείς συναρτήσεις στο $[0, +\infty)$ και

$$\int_{\xi}^{+\infty} \frac{dx}{g_1(x) + g_2(x)} = +\infty.$$

Ναδειχθεί ότι η $x(t)$ υπάρχει στο $[0, +\infty)$, δηλαδή δεν εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο.