

Παν. Δυτ. Μακεδονίας - Τμ. Μαθηματικών
Επαναληπτική Εξέταση Σεπτεμβρίου: Απειροστικός Λογισμός Ι (ΜΥ 11)
Εξεταστής: Γ. Ψαραδάκης

02/09/2025

ΘΕΜΑ 1

(1,5/10)

(A) Δείξτε ότι $\lim n^{1/n} \rightarrow 1$.

(B) Δείξτε ότι μια ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν είναι Cauchy.

ΘΕΜΑ 2

(1,5/10)

Συγκλίνουν οι σειρές (i) $\sum \frac{\sqrt{n}}{n+e}$, (ii) $\sum \frac{1}{n^{1+1/n}}$, (iii) $\sum \sqrt{n^2+1} - n$;

ΘΕΜΑ 3

(2/10)

(i) Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\lim a_n = 0$. Ισχύει το αντίστροφο;

(ii) Δείξτε ότι αν $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim a_n = 0$, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{a_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ της $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ να συγκλίνει.

ΘΕΜΑ 4

(0,5+0,5)

(i) Υπάρχει το όριο της $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, καθώς $x \rightarrow \infty$;

(ii) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε $|f(x)| = 1$ για κάθε x . Δείξτε ότι η f είναι είτε η σταθερή συνάρτηση 1 είτε η σταθερή συνάρτηση -1 .

ΘΕΜΑ 5

(3×0,5)

Έστω $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ ένα διάστημα και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) Πότε η f λέγεται ομοιόμορφα συνεχής στο I ;

(ii) Έστω ότι $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ για κάθε $x, y \in I$. Είναι η f ομοιόμορφα συνεχής στο I ;

(iii) Αν η f παραγωγίσιμη με φραγμένη παράγωγο στο I , να δείξετε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

ΘΕΜΑ 6

(0,5+1+1)

(A) Έστω $p > 1$. Να μελετήσετε και στη συνέχεια να χαράξετε την $f(x) = (1 - \ln x)^p$, $x \in (0, e)$.

(B) Έστω $\varepsilon \in (0, 1]$. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^{1+\varepsilon} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη αλλά η f' δεν είναι συνεχής.

(C) Έστω $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ ένα διάστημα και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\theta > 0$ έχουμε $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^{1+\theta}$ για κάθε $x, y \in I$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή στο I .

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ