Κεφάλαιο 1

Χώροι Hilbert

Στο Κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε σε διανυσματικούς χώρους με εσωτερικό γινόμενο και σε χώρους Hilbert, που είναι ορισμένοι πάνω στο σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.

1.1 Διανυσματικοί Χώροι με Εσωτερικό Γινόμενο

Ορισμός 1.1.1. *Έστω V ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος.* **Εσωτερικό γινόμενο** *στον V είναι μια απεικόνιση*

$$\langle \, , \, \rangle : \; V \times V \to \mathbb{C}$$

τέτοια, ώστε για κάθε $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in V$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ να ισχύουν:
(i) $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y} \, , \, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x} \, , \, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y} \, , \, \mathbf{z} \rangle$.
(ii) $\langle \lambda \mathbf{x} \, , \, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x} \, , \, \mathbf{y} \rangle$.
(iii) $\langle \mathbf{x} \, , \, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y} \, , \, \mathbf{x} \rangle}$.
(iv) $\langle \mathbf{x} \, , \, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ *και αν* $\langle \mathbf{x} \, , \, \mathbf{x} \rangle = 0$ *τότε* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Ένας διανυσματικός χώρος V μαζί με ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \, , \, \rangle$ λέγεται **διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο**.

Συνέπειες: Για κάθε $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in V$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ εύκολα μπορούν να αποδειχθούν οι ιδιότητες:

(v) $\langle \mathbf{x} , \mathbf{y}+\mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{x} ,\, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{x} ,\, \mathbf{z}\rangle$.
(vi) $\langle \mathbf{x} ,\, \lambda\mathbf{y}\rangle = \overline{\lambda}\langle \mathbf{x} ,\, \mathbf{y}\rangle$.
(vii) $\langle \mathbf{x} ,\, \mathbf{x}\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
(viii) $\langle \mathbf{x} ,\, \mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{y} ,\, \mathbf{z}\rangle$ για κάθε $\mathbf{z} \in V \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Οι αποδείξεις αφήνονται ως ασκήσεις.

Πρόταση 1.1.2. (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)
Σ' ένα διανυσματικό χώρο V με εσωτερικό γινόμενο για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ισχύει:

$$|\langle \mathbf{x} , \mathbf{y}\rangle|^2 \leq \langle \mathbf{x} , \mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y} , \mathbf{y}\rangle.$$

Η ισότητα ισχύει, αν και μόνο αν τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Απόδειξη. Αν $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ τότε ισχύει ως ισότητα, αφού και τα δύο μέλη είναι ίσα με μηδέν. Έστω $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Για $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι:

$$0 \leq \langle \mathbf{x}-\lambda\mathbf{y} , \mathbf{x}-\lambda\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x} , \mathbf{x}\rangle - \lambda\langle \mathbf{y} , \mathbf{x}\rangle - \overline{\lambda}\langle \mathbf{x} , \mathbf{y}\rangle + |\lambda|^2\langle \mathbf{y} , \mathbf{y}\rangle. \tag{1.1}$$

Αν πάρουμε ως $\lambda = \dfrac{\langle \mathbf{x} , \mathbf{y}\rangle}{\langle \mathbf{y} , \mathbf{y}\rangle}$ τότε, από τη σχέση (1.1), προκύπτει:

$$0 \leq \langle \mathbf{x} , \mathbf{x}\rangle - \frac{|\langle \mathbf{x} , \mathbf{y}\rangle|^2}{\langle \mathbf{y} , \mathbf{y}\rangle} \Rightarrow |\langle \mathbf{x} , \mathbf{y}\rangle|^2 \leq \langle \mathbf{x} , \mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y} , \mathbf{y}\rangle.$$

Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ γραμμικώς εξαρτημένα. Τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$: $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$, οπότε

$$|\langle \mathbf{x} , \mathbf{y}\rangle|^2 = |\langle \lambda\mathbf{y} , \mathbf{y}\rangle|^2 = |\lambda|^2\langle \mathbf{y} , \mathbf{y}\rangle^2 = \langle \lambda\mathbf{y} , \lambda\mathbf{y}\rangle\langle \mathbf{y} , \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x} , \mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y} , \mathbf{y}\rangle.$$

Αντιστρόφως, έστω $\mathbf{y}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ και $|\langle \mathbf{x} , \mathbf{y}\rangle|^2 = \langle \mathbf{x} , \mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y} , \mathbf{y}\rangle$. Τότε είναι:

$$\langle \mathbf{x} , \mathbf{x}\rangle - \frac{|\langle \mathbf{x} , \mathbf{y}\rangle|^2}{\langle \mathbf{y} , \mathbf{y}\rangle} = 0 \xRightarrow{\lambda = \frac{\langle \mathbf{x} , \mathbf{y}\rangle}{\langle \mathbf{y} , \mathbf{y}\rangle}} \langle \mathbf{x}-\lambda\mathbf{y} , \mathbf{x}-\lambda\mathbf{y}\rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}.$$

□

Παραδείγματα: 1. Ο χώρος $\mathbb{C}^n$ με εσωτερικό γινόμενο $\langle \mathbf{x} , \mathbf{y}\rangle = x_1\overline{y_1}+x_2\overline{y_2}+\cdots+x_n\overline{y_n} = \sum_{k=1}^{n} x_k\overline{y_k}$. (Παρατηρείστε ότι στον $\mathbb{C}^n$ ως εσωτερικό γινόμενο πήραμε το $\sum_{k=1}^{n} x_k\overline{y_k}$ και όχι το $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$, όπως στον $\mathbb{R}^n$, διότι στον $\mathbb{C}^n$ ο

$\langle \mathbf{x}\,,\mathbf{x}\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ δεν είναι υποχρεωτικά θετικός αριθμός. Θεωρείστε π.χ. $x_k = i$ για κάθε $k = 1, 2, .., n$). Το γινόμενο αυτό του $\mathbb{C}^n$ λέγεται **κανονικό**.

2. Ο χώρος c_{oo} όλων των πεπερασμένων μιγαδικών ακολουθιών (ή όπως αλλιώς λέγεται, των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα), δηλαδή ο χώρος
$c_{oo} = \{\mathbf{a} = (a_n)_n :\ a_n \in \mathbb{C}$ και υπάρχει $n_\alpha \in \mathbb{N} : a_n = 0$ για κάθε $n \geq n_\alpha\}$,
με εσωτερικό γινόμενο το $\langle \mathbf{a}\,,\mathbf{b}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\overline{b_n}$, $\mathbf{a} = (a_n)_n$, $\mathbf{b} = (b_n)_n$. (Θέμα σύγκλισης δεν υπάρχει εδώ, αφού το $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\overline{b_n}$ είναι άθροισμα. Υπάρχει μόνο πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών όρων).

3. Ο μιγαδικός διανυσματικός χώρος $\ell_2(\mathbb{N})$, τον οποίο θα συμβολίζουμε, χάριν απλότητας, ως ℓ_2, όλων των τετραγωνικώς αθροίσιμων μιγαδικών ακολουθιών, δηλαδή ο

$$\ell_2 = \{\mathbf{x} = (x_n)_n :\ x_n \in \mathbb{C} \text{ και } \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\},$$

με εσωτερικό γινόμενο το $\langle \mathbf{x}\,,\mathbf{y}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n}$. Το εσωτερικό γινόμενο είναι καλά ορισμένο, αφού η σειρά συγκλίνει απολύτως:

$$|x_n\overline{y_n}| \leq |x_n|^2 + |y_n|^2 \Rightarrow \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n\overline{y_n}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2$$

ή διαφορετικά

$$\left(\sum_{n=1}^{k} |x_n\overline{y_n}|\right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{k} |x_n|^2\right)\left(\sum_{n=1}^{k} |y_n|^2\right) \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2\right),$$

για κάθε $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n\overline{y_n}| < \infty$.
Είναι εύκολο να δούμε ότι ο ℓ_2 είναι διανυσματικός χώρος, αφού για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell_2$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι:
$|x_n + \lambda y_n|^2 \leq 2|x_n|^2 + 2|\lambda|^2|y_n|^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + \lambda y_n|^2 \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 + 2|\lambda|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty \Rightarrow \mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \in \ell_2$.

4. Ο μιγαδικός χώρος $C[a, b]$ όλων των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, με εσωτερικό γινόμενο $\langle f\,,\, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$. (Υπενθυμίζουμε ότι εξ ορισμού είναι $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Re}f(x)\mathrm{d}x + i\int_a^b \mathrm{Im}f(x)\mathrm{d}x$). Το ότι η συνάρτηση $\langle f\,,\, g\rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο προκύπτει από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος. Ειδικότερα αν $\langle f\,,\, f\rangle = 0$ τότε $\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x = 0$, οπότε, επειδή $|f|^2 \geq 0$ και $|f|$ συνεχής, είναι $|f(x)|^2 = 0$ και άρα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Πρόταση 1.1.3. *Ένα εσωτερικό γινόμενο σ' ένα διανυσματικό χώρο V ορίζει μια νόρμα στον V. Συγκεκριμένα η συνάρτηση:*

$$\|\ \cdot\ \|:\ V \to \mathbb{R}_+,\ \|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}\,, \mathbf{x}\rangle^{\frac{1}{2}}$$

είναι μια νόρμα στον V, ισοδύναμα για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ ισχύει:

(i) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.
(ii) $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$.
(iii) $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Απόδειξη. Οι ιδιότητες (ii), (iii) είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού του εσωτερικού γινομένου. Η ιδιότητα (i) προκύπτει εύκολα χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz. (Παρατηρείστε ότι η ανισότητα Cauchy-Schwarz με τη βοήθεια της νόρμας γράφεται $|\langle \mathbf{x}\,, \mathbf{y}\rangle| \leq \|\mathbf{x}\|\ \|\mathbf{y}\|$). Είναι:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 \ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle \mathbf{x}\,, \mathbf{y}\rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2|\langle \mathbf{x}\,, \mathbf{y}\rangle| + \|\mathbf{y}\|^2\\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\ \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.\end{aligned}$$

□

Συνέπεια: Κάθε διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο γίνεται χώρος με νόρμα. Επιπλέον το εσωτερικό γινόμενο είναι μια συνεχής συνάρτηση. Συγκεκριμένα έχουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.1.4. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\ ,\ \rangle$ και $\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}\,, \mathbf{x}\rangle^{\frac{1}{2}}$, $\mathbf{x} \in V$ η νόρμα, που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο. Τότε η απεικόνιση*

$$\langle\ ,\ \rangle:\ (V, \|\ \cdot\ \|) \times (V, \|\ \cdot\ \|) \to (\mathbb{C},\ |\ \cdot\ |)$$

είναι συνεχής.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ και $(\mathbf{x}_n)_n, (\mathbf{y}_n)_n$ ακολουθίες του V με $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}$, δηλαδή $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \to 0$, $\|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}\| \to 0$. Θα δείξουμε ότι $\langle \mathbf{x}_n,\ \mathbf{y}_n\rangle \to$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Είναι:

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| &= |\langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_n \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_n \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \\ &\leq |\langle \mathbf{x}_n - \mathbf{x}, \mathbf{y}_n \rangle| + |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_n - \mathbf{y} \rangle| \\ &\leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}_n\| + \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}\| \to 0, \end{aligned}$$

αφού $\|\mathbf{y}_n\| \to \|\mathbf{y}\|$ και άρα η $(\|\mathbf{y}_n\|)$ είναι φραγμένη. □

Υπενθυμίζουμε ότι σ' ένα διανυσματικό χώρο με νόρμα, οι αλγεβρικές πράξεις, πρόσθεση και βαθμωτός πολλαπλασιασμός, είναι επίσης συνεχείς συναρτήσεις.

Πρόταση 1.1.5. (Κανόνας Παραλληλογράμμου) *Σ' ένα διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο ισχύει:*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2. \tag{1.2}$$

Απόδειξη. Απλή εφαρμογή του ορισμού της νόρμας $\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{\frac{1}{2}}$ και των ιδιοτήτων του εσωτερικού γινομένου. □

Παρατήρηση 1.1.1. Ο κανόνας του παραλληλογράμμου χαρακτηρίζει τους χώρους με εσωτερικό γινόμενο ανάμεσα στους χώρους με νόρμα. Αν $(V, \| \cdot \|)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα, η οποία ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου, τότε ορίζεται ένα εσωτερικό γινόμενο στον V, ώστε $\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{\frac{1}{2}}$. Επομένως κάθε χώρος με νόρμα **δεν** είναι απαραίτητα και χώρος με εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή η νόρμα του δεν προέρχεται πάντα από εσωτερικό γινόμενο. Για παράδειγμα ο χώρος $(C[0,1], \| \|_\infty)$ δεν είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Δεν υπάρχει εσωτερικό γινόμενο στον $(C[0,1], \| \|_\infty)$ που να ορίζει τη νόρμα $\| \|_\infty$. Πράγματι, θεωρείστε τις συναρτήσεις $f(t) = 1$, $g(t) = t$, $t \in [0,1]$. Τότε είναι: $\|f\|_\infty = 1 = \|g\|_\infty$, $\|f+g\|_\infty = 2$, $\|f-g\|_\infty = 1$ και $\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 = 5 \neq 4 = 2\|f\|_\infty^2 + 2\|g\|_\infty^2$.

Η επόμενη πρόταση, γνωστή ως **ταυτότητα πολικότητας (polarization identity)**, δείχνει πως μπορούμε να πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο αν γνωρίζουμε τη νόρμα που αυτό ορίζει.

Πρόταση 1.1.6. (Ταυτότητα πολικότητας: Polarization identity) *Σ' ένα διανυσματικό χώρο V με εσωτερικό γινόμενο, για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ισχύει:*

$$4\langle \mathbf{x},\, \mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 + i\|\mathbf{x}+i\mathbf{y}\|^2 - i\|\mathbf{x}-i\mathbf{y}\|^2,$$

ισοδύναμα: $\langle \mathbf{x},\, \mathbf{y}\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|\mathbf{x}+i^k\mathbf{y}\|^2$.

Πρόταση 1.1.7. (Πυθαγόρειο θεώρημα) *Για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ με $\langle \mathbf{x},\, \mathbf{y}\rangle = 0$ ισχύει:* $\quad \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$.

1.2 Ο Χώρος Hilbert

Ορισμός 1.2.1. *Ένας διανυσματικός χώρος $(V,\ \langle\ ,\ \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο λέγεται* **χώρος Hilbert** *αν είναι πλήρης ως προς τη νόρμα (μετρική) που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.*

Παραδείγματα: 1. Ο χώρος $\mathbb{C}^n$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο είναι χώρος Hilbert. Η αντίστοιχη Ευκλείδεια νόρμα είναι $\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$. Ο $\mathbb{C}^n$ με την maximum νόρμα $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}\{|x_i|\}$ είναι πλήρης (ως χώρος πεπερασμένης διάστασης), δεν είναι όμως χώρος Hilbert, διότι η $\|\ \|_\infty$ δεν ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου, παρ' ότι οι νόρμες $\|\ \|_2$, $\|\ \|_\infty$ είναι ισοδύναμες.

Γενικά, κάθε πεπερασμένης διάστασης γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο είναι χώρος Hilbert.

2. Ο χώρος ℓ_2 με το γνωστό εσωτερικό γινόμενο είναι χώρος Hilbert. Θα δείξουμε πρώτα ότι είναι πλήρης.

Έστω $(\mathbf{x}_n)_n$: $\mathbf{x}_n = (\xi_i^n)_i$ μια βασική ακολουθία στον ℓ_2. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$: $|\,\|\mathbf{x}_n\|_2 - \|\mathbf{x}_m\|_2\,| \le \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\|_2 < \varepsilon$ για κάθε $n, m > n_0$. Άρα η $(\|\mathbf{x}_n\|_2)_n$ είναι βασική στο $\mathbb{R}$, επομένως συγκλίνει και άρα είναι φραγμένη. Επομένως υπάρχει $M > 0$: $\|\mathbf{x}_n\|_2 < M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Είναι:

$$|\xi_i^n - \xi_i^m|^2 \le \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^n - \xi_i^m|^2 = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\|_2^2 < \varepsilon^2 \quad \text{για κάθε} \quad n, m > n_0.$$

Άρα η ακολουθία $(\xi_i^n)_n$ (για κάθε i σταθερό) είναι βασική στον $\mathbb{C}$ και επομένως συγκλίνει, έστω στο ξ_i. Έστω $\mathbf{x} = (\xi_i)_i$. Τότε $\mathbf{x} \in \ell_2$ και $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$. Πράγματι, για τυχόν $k \in \mathbb{N}$, είναι:

$$\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^n|^2 \leq \|\mathbf{x}_n\|_2^2 \leq M^2 \Rightarrow \lim_n \sum_{i=1}^{k} |\xi_i^n|^2 \leq M^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} |\xi_i|^2 \leq M^2$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 \leq M^2 \Rightarrow \mathbf{x} \in \ell_2.$$

Επίσης

$$\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^n - \xi_i^m|^2 \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\|_2^2 < \varepsilon^2 \qquad \text{για κάθε} \quad n, m > n_0,$$

οπότε, αν $m \to \infty$, για κάθε $n > n_0$ συνεπάγεται:

$$\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^n - \xi_i|^2 < \varepsilon^2 \quad \overset{k\to\infty}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^n - \xi_i|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \|\mathbf{x_n} - \mathbf{x}\|_2 < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_2 \to 0.$$

Παρατήρηση 1.2.1. **α.** Ο χώρος c_{oo} δεν είναι χώρος Hilbert διότι δεν είναι πλήρης. Είναι όμως πυκνός στον ℓ_2.
Πράγματι, έστω $\mathbf{x} = (x_i)_i \in \ell_2$. Τότε $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$, οπότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$: $\sum_{i>n_0} |x_i|^2 < \varepsilon$. Έστω $\mathbf{x}_{n_0} = (x_1, x_2, ..., x_{n_0}, 0, 0, ...)$. Τότε $\mathbf{x}_{n_0} \in c_{oo}$ και $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{n_0}\|_2^2 = \sum_{i>n_0} |x_i|^2 < \varepsilon$. Άρα $\overline{c_{oo}} = \ell_2$.
β. Ο χώρος $C[0,1]$ με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g}(t)\mathrm{d}t$$

δεν είναι χώρος Hilbert, διότι δεν είναι πλήρης. (Για παράδειγμα η ακολουθία $(f_n)_n$:

$$f_n = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 1/2 \\ n(t - \frac{1}{2}) & 1/2 < t < 1/2 + 1/n \\ 1 & 1/2 + 1/n \leq t \leq 1 \end{cases}$$

συγκλίνει στη συναρτηση $f = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 1/2 \\ 1 & 1/2 < t \leq 1 \end{cases}$, η οποία δεν ανήκει στον $C[0,1]$).

γ. Ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, που δεν είναι χώρος Hilbert (δηλαδή πλήρης), είναι δυνατόν να εμφυτευθεί γραμμικά και ισομετρικά ως ένας πυκνός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert.

Έστω $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, μη πλήρης. Τότε ο (X, d), όπου $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}\,,\, \mathbf{x}\rangle}$ και $\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$, είναι μη πλήρης μετρικός χώρος. Είναι γνωστό ότι κάθε μετρικός χώρος «ταυτίζεται» ισομετρικά με έναν πυκνό υπόχωρο ενός πλήρους μετρικού χώρου (Y, d_1). Ο χώρος (Y, d_1) είναι «μοναδικός», εκτός από ισομετρίες (με την έννοια ότι αν (Y', d_1') είναι ένας άλλος πλήρης μετρικός χώρος, που έχει έναν πυκνό υπόχωρο, που είναι ισομετρικός με τον X, τότε οι Y, Y' είναι ισομετρικοί). Ο χώρος (Y, d_1) λέγεται η **πλήρωση** του χώρου (X, d).

Έστω (H, d) η πλήρωση του $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ με μετρική αυτή που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο. Επειδή οι πράξεις και το εσωτερικό γινόμενο (όπως και η νόρμα) είναι συνεχείς συναρτήσεις, επεκτείνονται από τον πυκνό «υπόχωρο» X του H στον H. Αν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$ τότε υπάρχουν $(\mathbf{x}_n), (\mathbf{y}_n)$ ακολουθίες του X, τέτοιες ώστε: $d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) \to 0$, $d(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}) \to 0$. Ορίζουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}+\mathbf{y} &= \lim(\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) \\ \lambda\mathbf{x} &= \lim(\lambda\mathbf{x}_n) \\ \langle \mathbf{x}\,,\, \mathbf{y}\rangle &= \lim\langle \mathbf{x}_n\,,\, \mathbf{y}_n\rangle, \end{aligned}$$

όπου, από τον τρόπο κατασκευής της πλήρωσης (H, d) του $(X, \langle\ ,\ \rangle)$, τα όρια είναι ανεξάρτητα από την επιλογή των ακολουθιών $(\mathbf{x}_n), (\mathbf{y}_n)$.

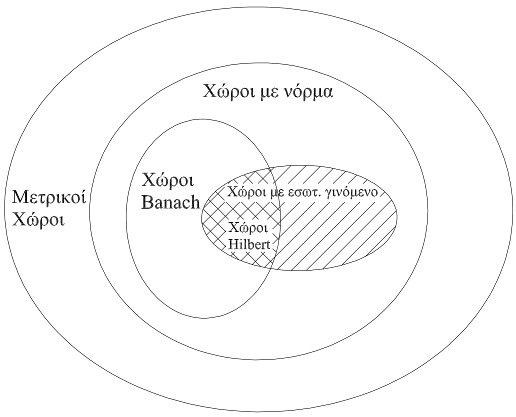
Έτσι ο H είναι ένας πλήρης διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, όπου η μετρική d_1, που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο, ταυτίζεται με την αρχική d. Είναι $d_1^2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle = d^2(\mathbf{x},\mathbf{y})$ για κάθε $\mathbf{x},\mathbf{y} \in H$. Άρα ο H είναι ένας χώρος Hilbert.

Όλα τα προηγούμενα συνοψίζονται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.2.2. *Αν $(X, \langle\, ,\, \rangle)$ είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο τότε υπάρχει χώρος Hilbert $(H, \langle\, ,\, \rangle)$ στον οποίο ο X εμφυτεύεται γραμμικά και ισομετρικά ως πυκνός υπόχωρος. Ο H θεωρείται μοναδικός με την έννοια ότι αν $(H', \langle\, ,\, \rangle)$ είναι χώρος Hilbert και $U : X \to H'$ μια γραμμική ισομετρία με πυκνή εικόνα ($\overline{U(X)} = H'$), τότε η U επεκτείνεται σε μια γραμμική ισομετρία $\widetilde{U}$ από τον H επί του H'. Ο $(H, \langle\, ,\, \rangle)$ λέγεται η* **πλήρωση** *του $(X, \langle\, ,\, \rangle)$.*

Παρατήρηση 1.2.2. Από την παρατήρηση 1.2.1(α), προκύπτει ότι η πλήρωση του χώρου c_{oo} είναι ο χώρος Hilbert ℓ_2.

Έστω ο γνωστός, από τη Θεωρία Μέτρου, χώρος Hilbert $L^2(a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Ο $L^2(a, b)$ είναι ο χώρος των Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων $f : (a, b) \to \mathbb{C}$, οι οποίες είναι τετραγωνικώς ολοκληρώσιμες, δηλαδή το ολοκλήρωμα $\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t$ είναι πεπερασμένο. Ταυτίζοντας τις συναρτήσεις που είναι σχεδόν παντού ίσες, το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται από τη σχέση $\langle f\, ,\, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$. Στην περίπτωση που τα a, b είναι πεπερασμένα ο χώρος $L^2(a, b)$ είναι η πλήρωση του χώρου $C[a, b]$.



Σχήμα 1.1: Μετρικοί Χώροι - Χώροι Hilbert

Στο σχήμα 1.1 απεικονίζονται οι σχέσεις μεταξύ διαφόρων κατηγοριών μετρικών χώρων και ειδικότερα η σχέση τους με τους χώρους Hilbert.

1.3 Βέλτιστη Προσέγγιση-Ορθή Προβολή

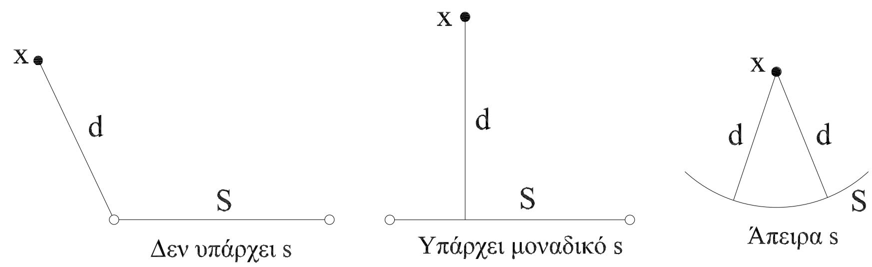
Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο $(X, \langle\, ,\, \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο και έστω $M \subseteq X$ ένας υπόχωρος του X. Θα εξετάσουμε το πρόβλημα της προσέγγισης ενός στοιχείου $\mathbf{x} \in X$ από ένα στοιχείο $\mathbf{m} \in M$, με τον βέλτιστο δυνατό τρόπο. Θα εξετάσουμε επίσης τη σχέση που υπάρχει με την «καθετότητα» και κατ' επέκταση με την «ορθή προβολή» του X επί του M.

Ορισμός 1.3.1. **(i)** *Τα διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ λέγονται* **κάθετα** *ή* **ορθογώνια** *αν $\langle \mathbf{x}\, ,\, \mathbf{y} \rangle = 0$ και συμβολίζουμε με $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.*
(ii) *μια οικογένεια $\{\mathbf{e}_i,\ i \in I\}$ στοιχείων του X λέγεται* **ορθοκανονική** *αν $\langle \mathbf{e}_i\, ,\, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ για κάθε $i, j \in I$, όπου $\delta_{ij} = 0$ αν $i \neq j$ και $\delta_{ij} = 1$ αν $i = j$.*
(iii) *Δύο υποσύνολα $S_1, S_2 \subseteq X$ του X, λέγονται* **κάθετα** *ή* **ορθογώνια** *αν $\langle \mathbf{x}\, ,\, \mathbf{y} \rangle = 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in S_1$ και για κάθε $\mathbf{y} \in S_2$. Συμβολίζουμε $S_1 \perp S_2$.*

Υπενθυμίζουμε ότι ως **απόσταση** του στοιχείου $\mathbf{x} \in X$ από το υποσύνολο $S \subseteq X$ ορίζεται να είναι ο αριθμός $d = d(\mathbf{x}, S) = \inf_{\mathbf{s} \in S} \|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|$, ισοδύναμα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $s_n \in S :\ |\, d - \|\mathbf{x} - \mathbf{s}_n\|\, | < 1/n$, δηλαδή $\lim_n \|\mathbf{x} - \mathbf{s}_n\| = d$. Παρατηρούμε ότι αν η ακολουθία (s_n) ή μια υπακολουθία της (s_{k_n}), συγκλίνει σ' ένα σημείο $s \in S$, τότε $d(\mathbf{x}, S) = \|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η απόσταση **επιτυγχάνεται** (attained). Στο σχήμα 1.2 δίνονται παραδείγματα συνόλων, υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$, όπου η απόσταση στο πρώτο δεν επιτυγχάνεται, στο δεύτερο επιτυγχάνεται με ακριβώς ένα σημείο και στο τρίτο με άπειρο πλήθος σημείων.

Θα δούμε ότι για ένα χώρο Hilbert H και ένα S, κλειστό και κυρτό υποσύνολό του, η απόσταση πάντα επιτυγχάνεται και μάλιστα με μοναδικό τρόπο, δηλαδή το πρόβλημα της βέλτιστης προσέγγισης έχει πάντα λύση και μάλιστα μοναδική.

Πρόταση 1.3.2. *Έστω $(X, \langle\, ,\, \rangle)$ ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $M \subset X$ ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρός του. Για κάθε $\mathbf{x} \in X$ υπάρχει μοναδικό $\mathbf{m} \in M$ τέτοιο ώστε: $d(\mathbf{x}, M) = \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|$.*



Σχήμα 1.2

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι υπάρχει μοναδικό $\mathbf{m} \in M$ τέτοιο ώστε $(\mathbf{x}-\mathbf{m})\perp M$ και κατόπιν ότι αυτό το $\mathbf{m}$ είναι το ζητούμενο.

Προσδιορισμός του $\mathbf{m}$: Έστω $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του M. Τότε $\mathbf{m} = \sum_{i=1}^n m_i\mathbf{e}_i$, οπότε αν $(\mathbf{x}-\mathbf{m})\perp M$, τότε $(\mathbf{x}-\mathbf{m})\perp \mathbf{e}_j$ για κάθε $j = 1, 2, ..., n$. Άρα

$$0 = \langle \mathbf{x}-\mathbf{m}, \mathbf{e}_j\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_j\rangle - \langle \sum_{i=1}^n m_i\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_j\rangle - m_j \Rightarrow m_j = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_j\rangle,$$

οπότε $\mathbf{m} = \displaystyle\sum_{j=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_j\rangle \mathbf{e}_j$. Επομένως είναι $m_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i\rangle$, $i = 1, 2, ..., n$.

Αντιστρόφως, αν $\mathbf{m} \in M$, $\mathbf{m} = \displaystyle\sum_{j=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_j\rangle \mathbf{e}_j$, τότε για κάθε $\mathbf{z} \in M$, $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^n z_i\mathbf{e}_i$, έχουμε:

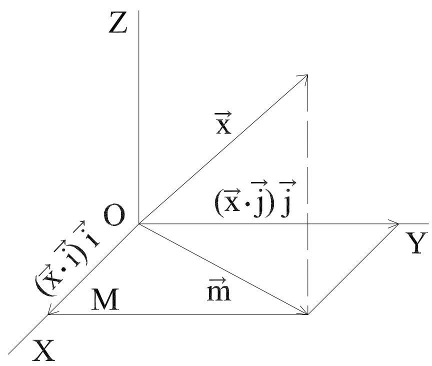
$$\langle \mathbf{x}-\mathbf{m}, \mathbf{z}\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{z}_i \langle \mathbf{x}-\mathbf{m}, \mathbf{e}_i\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{z}_i \left(\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i\rangle - \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_j\rangle \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i\rangle \right) = 0$$

και άρα $(\mathbf{x}-\mathbf{m})\perp M$.

Έστω τώρα $\mathbf{m} \in M$, $(\mathbf{x}-\mathbf{m})\perp M$. Τότε, για κάθε $\mathbf{y} \in M$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{m}$, το $(\mathbf{y}-\mathbf{m}) \in M$, οπότε $(\mathbf{x}-\mathbf{m})\perp(\mathbf{y}-\mathbf{m})$. Από Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{m}+\mathbf{m}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{m}\|^2 + \|\mathbf{m}-\mathbf{y}\|^2 > \|\mathbf{x}-\mathbf{m}\|^2$$
$$\Rightarrow \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}-\mathbf{m}\|, \text{ για κάθε } \mathbf{y} \in M \Rightarrow d(\mathbf{x}, M) = \|\mathbf{x}-\mathbf{m}\|.$$

□



Σχήμα 1.3: $d(\mathbf{x}, M) = \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|$.

Μια γεωμετρική αναπαράσταση της παραπάνω πρότασης στον χώρο $X = \mathbb{R}^3$, με $M = (xOy) \cong \mathbb{R}^2$, φαίνεται στο Σχήμα 1.3. Το $\overrightarrow{m}$ είναι η ορθή προβολή του $\overrightarrow{x}$ στον M και δίνεται από τη σχέση $\overrightarrow{m} = (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{i})\overrightarrow{i} + (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{j})\overrightarrow{j}$.

Παράδειγμα 1.3.1. Έστω ο χώρος $X = L^2(0,1)$ και τα στοιχεία $e_0(t) = 1$, $e_1(t) = \sqrt{3}(2t-1)$ και $x(t) = t^2$, $t \in (0,1)$. Το σύνολο $\{e_0, e_1\}$ είναι ορθοκανονικό. Πράγματι, είναι:

$$\langle e_0, e_1 \rangle = \int_0^1 1 \cdot \sqrt{3}(2t-1)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^1 u\mathrm{d}u = 0 \quad \text{και}$$

$$\|e_0\|^2 = \int_0^1 \mathrm{d}t = 1, \quad \|e_1\|^2 = \int_0^1 3(2t-1)^2\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int_{-1}^1 u^2\mathrm{d}u = 1.$$

Έστω $M = [e_0, e_1]$ ο υπόχωρος του X που παράγεται από το $\{e_0, e_1\}$. Ζητάμε να βρούμε την απόσταση του $x(t)$ από τον M. Από την απόδειξη της πρότασης 1.3.2 ξέρουμε ότι $d(x(t), M) = \|x(t) - m(t)\|$, όπου

$$m(t) = \langle x(t), e_0 \rangle e_0 + \langle x(t), e_1 \rangle e_1. \tag{1.3}$$

Είναι: $\langle x(t), e_0 \rangle = \int_0^1 t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3}$ και $\langle x(t), e_1 \rangle = \sqrt{3}\int_0^1 t^2(2t-1)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{6}$, οπότε, από τη σχέση (1.3), παίρνουμε $m(t) = t - \frac{1}{6}$. Επομένως

$$d(x(t), M) = \|x(t) - m(t)\| = \left(\int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6} \right)^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6\sqrt{5}}.$$

Στη συνέχεια θα δούμε ότι η πρόταση 1.3.2 γενικεύεται σε κάθε κλειστό υπόχωρο (όχι μόνο πεπερασμένης διάστασης) ενός χώρου Hilbert.

Θεώρημα 1.3.3. *Έστω $(X, \langle, \rangle)$ ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $M \subset X$ ένας κλειστός υπόχωρος. Έστω ακόμη $\mathbf{x} \in X$ και $\mathbf{m} \in M$. Τότε:*

$$(\mathbf{x} - \mathbf{m}) \perp M \Leftrightarrow d(\mathbf{x}, M) = \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|.$$

Απόδειξη. Αν $(\mathbf{x} - \mathbf{m}) \perp M$ τότε, όπως στην απόδειξη της πρότασης 1.3.2, είναι $d(\mathbf{x}, M) = \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|$.
Έστω τώρα $d(\mathbf{x}, M) = \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|$. Τότε για κάθε $\mathbf{y} \in M$ θα είναι $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|$. Επί πλέον για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ το $\lambda\mathbf{y} + \mathbf{m} \in M$ για κάθε $\mathbf{y} \in M$. Άρα

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|^2 \leq \|\mathbf{x} - (\mathbf{m} + \lambda\mathbf{y})\|^2 &= \langle \mathbf{x} - \mathbf{m} - \lambda\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{m} - \lambda\mathbf{y} \rangle \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|^2 - 2\mathrm{Re}(\lambda\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{m} \rangle) + |\lambda|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$2\mathrm{Re}(\lambda\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{m} \rangle) \leq |\lambda|^2 \|\mathbf{y}\|^2. \tag{1.4}$$

Από τη σχέση (1.4), για $\lambda = r\overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{m} \rangle}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ έχουμε:

$$2r|\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{m} \rangle|^2 \leq r^2 |\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{m} \rangle|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \Rightarrow \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{m} \rangle = 0,$$

διότι, αν ήταν $|\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{m} \rangle| \neq 0$, θα έπρεπε $2 \leq r\|\mathbf{y}\|^2$, για κάθε $r \in \mathbb{R}_+^*$, άτοπο. Επομένως $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{m} \rangle = 0$ για κάθε $\mathbf{y} \in M$, δηλαδή $(\mathbf{x} - \mathbf{m}) \perp M$. ☐

Θεώρημα 1.3.4. *Έστω H ένας χώρος Hilbert, $\mathbf{h} \in H$ και $K \subseteq H$, ένα κλειστό και κυρτό υποσύνολο του H. Τότε υπάρχει μοναδικό $\mathbf{k} \in K$ τέτοιο, ώστε $d = d(\mathbf{h}, K) = \|\mathbf{h} - \mathbf{k}\|$.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό της απόστασης (ως infimum), για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\mathbf{k}_n \in K$:

$$\|\mathbf{h} - \mathbf{k}_n\| < \frac{1}{n} + d, \quad \text{οπότε} \quad \|\mathbf{h} - \mathbf{k}_n\| \to d. \tag{1.5}$$

Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $(\mathbf{k}_n)$ είναι Cauchy. Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\|(\mathbf{k}_n - \mathbf{h}) - (\mathbf{k}_m - \mathbf{h})\|^2 + \|(\mathbf{k}_n - \mathbf{h}) + (\mathbf{k}_m - \mathbf{h})\|^2 \\
&\qquad\qquad = 2\|\mathbf{k}_n - \mathbf{h}\|^2 + 2\|\mathbf{k}_m - \mathbf{h}\|^2 && \Rightarrow \\
&\|\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_m\|^2 + 4\|\frac{\mathbf{k}_n + \mathbf{k}_m}{2} - \mathbf{h}\|^2 = 2\|\mathbf{k}_n - \mathbf{h}\|^2 + 2\|\mathbf{k}_m - \mathbf{h}\|^2 && \Rightarrow \\
&\|\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_m\|^2 \le 2\|\mathbf{k}_n - \mathbf{h}\|^2 + 2\|\mathbf{k}_m - \mathbf{h}\|^2 - 4d^2 && \Rightarrow \\
&\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_m\|^2 = 0. \quad (\text{Πού χρησιμοποιήθηκε ότι το } K \text{ είναι κυρτό;})
\end{aligned}$$

Άρα η ακολουθία $(\mathbf{k}_n)$ είναι Cauchy και επομένως συγκλίνει σ' ένα $\mathbf{k} \in H$. Επειδή το K είναι κλειστό είναι $\mathbf{k} \in K$. Επομένως, από τη σχέση (1.5), έχουμε $\|\mathbf{h} - \mathbf{k}\| = d$.

Μένει να δειχθεί ότι το $\mathbf{k}$ είναι μοναδικό. Έστω ότι υπάρχει και $\mathbf{k}' \in K$: $\|\mathbf{h} - \mathbf{k}'\| = d$. Τότε:

$$\begin{aligned}
&\|(\mathbf{k} - \mathbf{h}) - (\mathbf{k}' - \mathbf{h})\|^2 + \|(\mathbf{k} - \mathbf{h}) + (\mathbf{k}' - \mathbf{h})\|^2 \\
&\qquad\qquad = 2\|\mathbf{k} - \mathbf{h}\|^2 + 2\|\mathbf{k}' - \mathbf{h}\|^2 && \Rightarrow \\
&\|\mathbf{k} - \mathbf{k}'\|^2 = 2d^2 + 2d^2 - 4\|\frac{\mathbf{k} + \mathbf{k}'}{2} - \mathbf{h}\|^2 \le 0 && \Rightarrow \\
&\|\mathbf{k} - \mathbf{k}'\| = 0 \Rightarrow \mathbf{k} = \mathbf{k}'.
\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 1.3.1. Για ένα κλειστό υπόχωρο M ενός χώρου Hilbert H το μοναδικό στοιχείο $\mathbf{m} \in M$ με την ιδιότητα $d(\mathbf{x}, M) = \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|$, ικανοποιεί και τη σχέση $\|\mathbf{m}\| \le \|\mathbf{x}\|$, αφού $\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|^2 + \|\mathbf{m}\|^2$ (Πυθαγόρειο θεώρημα). Το μοναδικό αυτό $\mathbf{m}$ ονομάζεται **ορθή προβολή** του $\mathbf{x}$ πάνω στον χώρο M και συμβολίζεται με $P_M\mathbf{x}$. Επομένως, για κάθε $\mathbf{x} \in H \backslash M$, το $(\mathbf{x} - P_M\mathbf{x}) \perp M$ και αντιστρόφως, αν $\mathbf{x} \in H \backslash M$, $\mathbf{m} \in M$ με $(\mathbf{x} - \mathbf{m}) \perp M$, τότε $\mathbf{m} = P_M\mathbf{x}$. Άρα υπάρχει $\mathbf{z} = \mathbf{x} - P_M\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{z} \in M^\perp$ και επομένως $M^\perp \neq \{\mathbf{0}\}$ (βλ. Ορισμό 1.4.1).

1.4 Ορθογώνιο Συμπλήρωμα

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και V_1 ένας υπόχωρός του. Ξέρουμε, από την Γραμμική Άλγεβρα, ότι υπάρχει πάντα ένας «συμπληρωματικός» υπόχωρος V_2 (όχι γενικά μοναδικός) τέτοιος, ώστε $V = V_1 \dot{+} V_2$ (το $\dot{+}$ συμβολίζει το αλγεβρικό ευθύ άθροισμα) και κάθε $\mathbf{x} \in V$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο, ως $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ με $\mathbf{x}_1 \in V_1$ και $\mathbf{x}_2 \in V_2$. Στην άπειρη διάσταση η ιδιότητα αυτή, συνδυασμένη και με την τοπολογική δομή του χώρου, διαφοροποιείται ριζικά. Αν V είναι ένας χώρος Banach και E_1 ένας κλειστός υπόχωρός του, δεν υπάρχει πάντα **κλειστός** υπόχωρος E_2, ώστε $V = E_1 \dot{+} E_2$.

Επίσης, αν M, N είναι κλειστοί υπόχωροι του V δεν έπεται ότι και το άθροισμά τους είναι κλειστός υπόχωρος, ακόμα και αν ο V είναι χώρος Hilbert.

Στην περίπτωση του χώρου Hilbert, λόγω της ορθογωνιότητας, θα δούμε ότι κάθε κλειστός υπόχωρος έχει πάντα συμπληρωματικό κλειστό υπόχωρο και μάλιστα τον «καλύτερο δυνατό»: Είναι ορθογώνιος με τον αρχικό.

Ορισμός 1.4.1. *Έστω S ένα μη κενό υποσύνολο ενός χώρου X με εσωτερικό γινόμενο. Ονομάζουμε* **ορθογώνιο συμπλήρωμα** *του S, το σύνολο:*

$$S^{\perp} = \{\mathbf{x} \in X : \langle \mathbf{x}, \mathbf{s} \rangle = 0 \text{ για κάθε } \mathbf{s} \in S\}.$$

Λήμμα 1.4.2. *Έστω S, S_1, S_2 μη κενά υποσύνολα ενός χώρου X με εσωτερικό γινόμενο. Τότε ισχύουν:*

(i) *Το $S^{\perp}$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.*
(ii) *Αν $S_1 \subseteq S_2$ τότε $S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$.*
(iii) $S \subseteq S^{\perp\perp} \qquad (S^{\perp\perp} \underset{ορσ}{=\!=} (S^{\perp})^{\perp})$.
(iv) $S^{\perp} = S^{\perp\perp\perp}$.
(v) *Αν $\mathbf{x} \in S \cap S^{\perp}$ τότε $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*
(vi) *Αν S είναι πυκνό στον X, τότε $S^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.*

Απόδειξη. (i) Έστω $(\mathbf{x}_n)$ μια ακολουθία στοιχείων του $S^{\perp}$: $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$. Τότε $\langle \mathbf{x}_n, \mathbf{s} \rangle \to \langle \mathbf{x}, \mathbf{s} \rangle$ για κάθε $\mathbf{s} \in S$. Όμως $\langle \mathbf{x}_n, \mathbf{s} \rangle = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε