

Θεωρία Τελεστών - Εαρινό 2023

Δεύτερο Σετ Ασκήσεων

Άσκηση 1 Σ'ένα διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο δείξτε ότι

$$(i) \langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

$$(ii) \|y\| = \|\lambda x + y\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \Leftrightarrow x \perp y.$$

Άσκηση 2 Να δείξετε ότι αν M, N είναι κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert και $M \perp N$, τότε ο χώρος $M + N$ είναι κλειστός.

Άσκηση 3 Έστω M ένας κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H , $m \in M$ και $h \in H$. Αν $P_M h$ είναι η ορθή προβολή του h επί του M , δείξτε ότι $m \perp P_M h \Leftrightarrow m \perp h$.

Άσκηση 4 Δείξτε ότι για δύο κλειστούς υπόχωρους M, N ενός χώρου Hilbert, ισχύουν

$$(i) (M + N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp.$$

$$(ii) (M \cap N)^\perp = \overline{M^\perp + N^\perp}.$$

Άσκηση 5 Έστω M ένας κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H . Δείξτε ότι, αν $M \neq H$, τότε $M^\perp \neq \emptyset$ και ότι αυτό δεν ισχύει απαραίτητα αν ο υπόχωρος M δεν είναι κλειστός.