

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εξέταση στο “Απειροστικός Λογισμός IV” (ΜΥ 41)

11/09/2025

ΘΕΜΑ 1 [1/10]

Υπολογίστε το $\int_{\Omega} f$, όταν $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ και $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Λύση: Είναι $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3^2\}$. Επομένως αλλάζουμε μεταβλητές χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, δηλαδή $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, όπου $(r, \theta) \in [0, 3] \times [0, 2\pi)$. Εύκολα βλέπουμε (είναι και στο τυπολόγιο που σας δίνεται) ότι η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα είναι ίση με r . Άρα

$$\int_{\Omega} f = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \ln(r^2 + 1) r dr d\theta = \pi \int_0^3 \ln(r^2 + 1) d(r^2 + 1) = \dots = \pi(10 \ln 10 - 9).$$

ΘΕΜΑ 2 [1/10]

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Σχεδιάστε την περιοχή ολοκλήρωσης και αλλάξτε τη σειρά ολοκλήρωσης στο ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα: $\int_0^4 \left(\int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy$.

Λύση: Κάντε το σχήμα και προκύπτει ότι

$$\int_0^4 \left(\int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy = \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} f(x, y) dy \right) dx.$$

ΘΕΜΑ 3 [1/10]

Υπολογίστε το $\int_C f$, όπου $f(x, y, z) = x + z$ και C είναι η καμπύλη η οποία διαγράφει μία φορά την τομή των επιφανειών με εξισώσεις $x = z$ και $y^2 + z^2 = 1$.

Λύση: Μια παραμετροποίηση της καμπύλης C είναι η $\vec{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t, \cos t)$, $t \in [0, 2\pi)$. Άρα $\vec{\sigma}'(t) = (-\sin t, \cos t, -\sin t) \Rightarrow \|\vec{\sigma}'(t)\| = \sqrt{1 + \sin^2 t}$, επομένως

$$\int_C f = \int_0^{2\pi} 2 \cos t \sqrt{1 + \sin^2 t} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin^2 t} d(\sin t) = \dots = 0.$$

ΘΕΜΑ 4 [1/10]

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_S f$, όπου $f(x, y, z) = x^2 z + y^2 z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, και S είναι το τμήμα του επιπέδου $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \pi + x + y\}$, που αποκόπτεται από τον κύλινδρο $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 9, z \in \mathbb{R}\}$.

Λύση: Το S είναι το κομμάτι του επιπέδου $\{z = \pi + x + y\}$ που έχει για προβολή στο xy -επίπεδο τον κύκλο ακτίνας $R = 3$ και κέντρου $(0, 0)$, επομένως έχουμε την ακόλουθη παραμετρικοποίηση του S :

$$\vec{\Phi}(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi, \pi + r \cos \phi + r \sin \phi), \quad (r, \phi) \in [0, 3] \times [0, 2\pi).$$

Εύκολα υπολογίζουμε $\vec{\Phi}_r \times \vec{\Phi}_\phi = r(-1, 1, 1) \Rightarrow \|\vec{\Phi}_r \times \vec{\Phi}_\phi\| = r\sqrt{3}$. Επίσης $f(\vec{\Phi}) = r^2(\pi + r \cos \phi + r \sin \phi)$. Επομένως

$$\int_S f = \sqrt{3} \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^3(\pi + r \cos \phi + r \sin \phi) dr d\phi = 2\pi^2 \sqrt{3} \int_0^3 r^3 dr + 0 + 0 = \frac{81\sqrt{3}\pi^2}{2}.$$

ΘΕΜΑ 5 [(0,5+0,5+0,5+0,5=2)/10]

(Α) Βρείτε $\gamma \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \vec{F}$, με

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(2x^2 + xy, \frac{1}{2}(x^2 - 7y + 2z), \gamma y\right), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

να είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης για όλες τις ομαλές καμπύλες του $\mathbb{R}^3$.

(Β) Για το/τα γ του (Α), να βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\vec{F} = \nabla f$.

(Γ) Έστω C είναι ομαλή καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$ με αρχή το $(0, 0, 0)$ και τέλος το $(0, 1, 1)$. Να υπολογίσετε το $\int_C \vec{F}$ με τους εξής δύο τρόπους:

(i) χρησιμοποιώντας το (Β), και

(ii) απευθείας, με επιλογή της καμπύλης C .

Λύση: (Α) Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ είναι αστρόβιλο (δηλ. $(\text{curl } \vec{F})(x, y, z) = (0, 0, 0)$ στο $\mathbb{R}^3$), αν και μόνο αν $\gamma = 1$. Επομένως (από θεώρημα), για $\gamma = 1$ το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης για όλες τις ομαλές καμπύλες του $\mathbb{R}^3$.

(Β) Η f θα πρέπει να ικανοποιεί την

$$f_x(x, y, z) = 2x^2 + xy \Rightarrow f(x, y, z) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2y + g(y, z).$$

Θα πρέπει επίσης

$$f_y(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 - 7y + 2z) \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + g_y(y, z) = \frac{1}{2}(x^2 - 7y + 2z) \Rightarrow$$

$$g(y, z) = -\frac{7}{4}y^2 + zy + h(z).$$

Άρα $f(x, y, z) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2y - \frac{7}{4}y^2 + zy + h(z)$. Θα πρέπει επίσης

$$f_z(x, y, z) = y \Rightarrow y + h'(z) = y \Rightarrow h(z) = c.$$

Χ.π.τ.γ. παίρνουμε $c = 0$ και καταλήγουμε στον τύπο

$$f(x, y, z) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2y - \frac{7}{4}y^2 + zy.$$

(Γ)-(i) Για οποιαδήποτε ομαλή καμπύλη $\vec{\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, από τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε $\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} = \int_a^b \frac{d}{dt} [f(\vec{\sigma}(t))] dt = f(\vec{\sigma}(b)) - f(\vec{\sigma}(a))$. Αν C είναι ομαλή καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$ με αρχή το $(0, 0, 0)$ και τέλος το $(0, 1, 1)$, παίρνουμε $\int_C \vec{F} = f(0, 1, 1) - f(0, 0, 0) = -\frac{3}{4}$.

(Γ)-(ii) Μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα διαλέγοντας για παράδειγμα την καμπύλη $\vec{\sigma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο $\vec{\sigma}(t) = (0, t, t)$. Είναι $\vec{\sigma}'(t) = (0, 1, 1)$, άρα

$$\vec{F}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) = (0, -\frac{7}{2}t + t, t) \cdot (0, 1, 1) = -\frac{3}{2}t,$$

$$\text{δηλαδή } \int_C \vec{F} = \int_0^1 (-\frac{3}{2}t) dt = -\frac{3}{4}.$$

ΘΕΜΑ 6 [(0,5+1,5=2)/10]

Να επαληθεύσετε το Θ. Gauss για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$, στο χωρίο $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 4, 0 < z < 2\}$.

Λύση: Το Ω είναι κύλινδρος ακτίνας $R = 2$ και ύψους $h = 2$, άρα

$$\text{Vol}(\Omega) = \pi R^2 \times h = 8\pi.$$

Επίσης $(\text{div } \vec{F})(x, y, z) = 3$. Επομένως

$$\int_{\Omega} \text{div } \vec{F} = \int_{\Omega} 3 = 3\text{Vol}(\Omega) = 24\pi.$$

Απο την άλλη,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu}_{\partial\Omega} &= \int_{\{x^2+y^2 \leq 4, z=0\}} \vec{F} \cdot (0, 0, -1) \\
&\quad + \int_{\{x^2+y^2 \leq 4, z=2\}} \vec{F} \cdot (0, 0, 1) \\
&\quad + \int_{\{x^2+y^2=4, 0 < z < 2\}} \vec{F} \cdot \frac{1}{2}(x, y, 0) \\
&= \int_{\{x^2+y^2 \leq 4, z=0\}} (-z) \\
&\quad + \int_{\{x^2+y^2 \leq 4, z=2\}} z \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\{x^2+y^2=4, 0 < z < 2\}} (x^2 + y^2) \\
&= 0 \\
&\quad + 2 \times \pi 2^2 \\
&\quad + 2 \times 2\pi 2 \times 2 = 24\pi.
\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 7 [(1+1=2)/10]

Να επαληθεύσετε το Θ. Stokes για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ και την επιφάνεια S , όπου $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, z)$ και S είναι το προς τα πάνω προσανατολισμένο τμήμα του γραφήματος της $f(x, y) = x^2y$ πάνω σε ένα τρίγωνο στο επίπεδο xy με κορυφές $(0, 0)$, $(2, 0)$ και $(0, 2)$.

Λύση: Το S είναι το κομμάτι του γραφήματος $\{z = x^2y\}$ που έχει για προβολή στο xy -επίπεδο το τρίγωνο με κορυφές $O(0, 0)$, $A(2, 0)$ και $B(0, 2)$, επομένως έχουμε την ακόλουθη παραμετρικοποίηση του S :

$$\vec{\Phi}(x, y) = (x, y, x^2y), (x, y) \in D := \{0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}.$$

Εύκολα υπολογίζουμε $(\vec{\Phi}_x \times \vec{\Phi}_y)(x, y) = (-2xy, -x^2, 1)$. Επειδή $\text{curl} \vec{F}(x, y, z) = (0, 0, 2)$ έχουμε $\text{curl} \vec{F}(\vec{\Phi}(x, y)) = (0, 0, 2)$, επομένως

$$\begin{aligned}
\int_S \text{curl} \vec{F} &= \int_0^2 \int_0^{2-x} \text{curl} \vec{F}(\vec{\Phi}) \cdot (\vec{\Phi}_x \times \vec{\Phi}_y) dy dx \\
&= \int_0^2 \int_0^{2-x} 2 dy dx = \dots = 4.
\end{aligned}$$

Από την άλλη, η καμπύλη ∂S είναι η ένωση των εξής τριών καμπυλών (συμβατών με το $\vec{\Phi}_x \times \vec{\Phi}_y$ για να ισχύει το Θ. Stokes):

- $\vec{\sigma}_1(t) = (t, 0, 0), t \in [0, 2] \Rightarrow \vec{\sigma}'_1(t) = (1, 0, 0),$

- $\vec{\sigma}_2(t) = (2 - t, t, (2 - t)^2 t), t \in [0, 2] \Rightarrow \vec{\sigma}'_2(t) = (-1, 1, 3t^2 - 8t + 4),$
- $\vec{\sigma}_3(t) = (0, 2 - t, 0), t \in [0, 2] \Rightarrow \vec{\sigma}'_3(t) = (0, -1, 0).$

Αμέσως έχουμε ότι

$$\int_{\vec{\sigma}_1} \vec{F} = \int_0^2 \vec{F}(\vec{\sigma}_1(t)) \cdot \vec{\sigma}'_1(t) dt = \int_0^2 (0, t, 0) \cdot (1, 0, 0) dt = 0,$$

$$\int_{\vec{\sigma}_3} \vec{F} = \int_0^2 \vec{F}(\vec{\sigma}_3(t)) \cdot \vec{\sigma}'_3(t) dt = \int_0^2 (t - 2, 0, 0) \cdot (0, -1, 0) dt = 0,$$

ενώ

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\sigma}_2} \vec{F} &= \int_0^2 \vec{F}(\vec{\sigma}_2(t)) \cdot \vec{\sigma}'_2(t) dt \\ &= \int_0^2 (-t, 2 - t, (2 - t)^2 t) \cdot (-1, 1, 3t^2 - 8t + 4) dt \\ &= \int_0^2 \left(2 + (2 - t)^2 t (3t^2 - 8t + 4) \right) dt = \dots = 4. \end{aligned}$$

Φυσικά, δεν χρειάζεται να εκτελέσετε τον υπολογισμό για να βαθμολογηθεί πλήρως το θέμα.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ