

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
27/06/2025 - Εξέταση στο “Απειροστικός Λογισμός IV” (ΜΥ 4I)

ΘΕΜΑ 1 [I/IO]

Υπολογίστε το $\int_{\Omega} f$, όπου $f(x, y) = x$ και $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$.

Λύση: Είναι $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$. Επομένως αλλάζουμε μεταβλητές χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες γύρω από το $(1, 0)$, δηλαδή $x = 1 + r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, όπου $(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi)$. Εύκολα βλέπουμε ότι η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα είναι ίση με r . Άρα

$$\int_{\Omega} f = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + r \cos \theta) r \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^1 r \, dr + \int_0^1 r^2 \, dr \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = \pi.$$

ΘΕΜΑ 2 [I/IO]

Υπολογίστε τον όγκο που περικλείει ένα κυκλικό παραβολοειδές, $\mathcal{P}_{h,R}$, ύψους $h > 0$ και ακτίνας $R > 0$ σε αυτό το ύψος.

(Υπόδ.: Πάρτε π.χ. $\mathcal{P}_{h,R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2(1 + z/h), -h \leq z \leq 0\}$.)

Λύση: Εφαρμόζουμε την αρχή του Cavalieri, ή αλλιώς πάρτε το τριπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y, z) = 1$ πάνω στο χωρίο K που περικλείει η επιφάνεια $\mathcal{P}_{h,R}$. Είναι $\text{Vol}(K) = \int_{-h}^0 \text{Area}\left(D(R\sqrt{1 + z/h})\right) dz$, όπου $D(R\sqrt{1 + z/h})$ είναι ο δίσκος ακτίνας $R\sqrt{1 + z/h}$. Επομένως

$$\text{Vol}(K) = \int_{-h}^0 \pi R^2(1 + z/h) \, dz = \pi R^2 \left(h + \frac{1}{h} [z^2/2]_{z=-h}^{z=0} \right) = \pi R^2 h/2.$$

ΘΕΜΑ 3 [I/IO]

Υπολογίστε τό $\int_C f$, όπου $f(x, y, z) = yz$ και C είναι η καμπύλη που προκύπτει από την τομή των επιφανειών με εξισώσεις $y = x$ και $z = x^2$, από το σημείο $(0, 0, 0)$ μέχρι το σημείο $(1, 1, 1)$.

Λύση: Μια παραμετρικοποίηση της καμπύλης C είναι η $\vec{\sigma}(t) = (t, t, t^2)$, $t \in [0, 1]$. Άρα $\vec{\sigma}'(t) = (1, 1, 2t) \Rightarrow \|\vec{\sigma}'(t)\| = \sqrt{2 + 4t^2}$, επομένως

$$\begin{aligned} \int_C f &= \int_0^1 t^3 \sqrt{2 + 4t^2} \, dt = \frac{1}{8} \int_0^1 t^2 \sqrt{2 + 4t^2} \, d(2 + 4t^2) \\ &= \frac{1}{32} \int_2^6 (s - 2) \sqrt{s} \, ds = \frac{1}{32} \left[\frac{2}{5} s^{5/2} - \frac{4}{3} s^{3/2} \right]_{s=2}^{s=6} = \dots \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4 [I/IO]

Υπολογίστε το $\int_S \vec{F} \cdot \nu_S$, όπου $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$, S είναι η κυλινδρική επιφάνεια

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 2\},$$

και ν_S είναι το μοναδιαίο κάθετο στην S με φορά προς το εξωτερικό του κυλίνδρου.

Λύση: Το S είναι κύλινδρος ακτίνας $R = 2$ και ύψους $h = 2$, άρα $\text{Area}(S) = 2\pi R h = 8\pi$. Για κάθε $(x, y, z) \in S$ έχουμε $\nu_S = \frac{1}{2}(x, y, 0)$. Επομένως $\vec{F} \cdot \nu_S = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, δηλαδή

$$\int_S \vec{F} \cdot \nu_S = \frac{1}{2} \int_S (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \int_S 4 = 2\text{Area}(S) = 16\pi.$$

ΘΕΜΑ 5 [(0,5+0,5+0,5+0,5=2)/IO]

(A) Είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \vec{F}$, με

$$\vec{F}(x, y) = \left(1 + 2xy \sin(x^2 y), 1 + x^2 \sin(x^2 y)\right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης για όλες τις ομαλές καμπύλες του $\mathbb{R}^2$;

(B) Να βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\vec{F} = \nabla f$.

(Γ) Έστω C είναι ομαλή καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$ με αρχή το $(0, 0)$ και τέλος το $(0, 1)$. Να υπολογίσετε το $\int_C \vec{F}$ με τους εξής δύο τρόπους:

(i) χρησιμοποιώντας το (B), και

(ii) απευθείας, με επιλογή της καμπύλης C .

Λύση: Αν υπάρχει η συνάρτηση που ζητείται στο (B) ερωτήμα, τότε η απάντηση στο (A) είναι καταφατική, διότι τότε για οποιαδήποτε ομαλή καμπύλη $\vec{\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, από τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε $\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} = \int_a^b \frac{d}{dt} [f(\vec{\sigma}(t))] dt = f(\vec{\sigma}(b)) - f(\vec{\sigma}(a))$. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ (εφόσον επεκταθεί με τον προφανή τρόπο στον $\mathbb{R}^3$) είναι αστρόβιλο (δηλ. $\text{curl} \vec{F}(x, y, z) = (0, 0, 0)$ στο $\mathbb{R}^3$), επομένως η συνάρτηση που ζητείται στο (B) ερωτήμα υπάρχει λόγω θεωρήματος που αποδείχτηκε στην τάξη. Η f θα πρέπει να ικανοποιεί την

$$f_x(x, y) = 1 + 2xy \sin(x^2 y) \Rightarrow f(x, y) = x - \cos(x^2 y) + g(y).$$

Θα πρέπει επίσης

$$f_y(x, y) = 1 + x^2 \sin(x^2 y) \Rightarrow x^2 \sin(x^2 y) + g'(y) = 1 + x^2 \sin(x^2 y) \Rightarrow g'(y) = 1.$$

Άρα $g(y) = y$ και η f έχει τύπο $f(x, y) = x + y - \cos(x^2 y)$. Αν C είναι ομαλή καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$ με αρχή το $(0, 0)$ και τέλος το $(0, 1)$, παίρνουμε $\int_C \vec{F} = f(0, 1) - f(0, 0) = 1$. Μπορούμε να καταλήξουμε σε αυτό το αποτέλεσμα διαλέγοντας για παράδειγμα την καμπύλη $\vec{\sigma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $\vec{\sigma}(t) = (0, t)$. Είναι $\vec{\sigma}'(t) = (0, 1)$, άρα $\vec{F}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) = (1, 1) \cdot (0, 1) = 1$, δηλαδή $\int_C \vec{F} = 1$.

ΘΕΜΑ 6 [(0,5+1,5=2)/10]

Να επαληθεύσετε το Θ. Gauss για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z),$$

στο χωρίο

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, x, y, z > 0 \right\}.$$

Λύση: Το Ω είναι το πρώτο ογδοημόριο μπάλας ακτίνας $R = 1$, άρα

$$\text{Vol}(\Omega) = \frac{1}{8} \times \frac{4}{3} \pi R^3 = \pi/6.$$

Επίσης $(\text{div} \vec{F})(x, y, z) = 3$. Επομένως

$$\int_{\Omega} \text{div} \vec{F} = \int_{\Omega} 3 = 3\text{Vol}(\Omega) = \pi/2.$$

Απο την άλλη,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu}_{\partial\Omega} &= \int_{\{y^2+z^2 \leq 1, x=0, y>0, z>0\}} \vec{F} \cdot (-1, 0, 0) \\ &\quad + \int_{\{x^2+z^2 \leq 1, x>0, y=0, z>0\}} \vec{F} \cdot (0, -1, 0) \\ &\quad + \int_{\{x^2+y^2 \leq 1, x>0, y>0, z=0\}} \vec{F} \cdot (0, 0, -1) \\ &\quad + \int_{\{x^2+y^2+z^2=1, x>0, y>0, z>0\}} \vec{F} \cdot (x, y, z) \\ &= \int_{\{y^2+z^2 \leq 1, x=0, y>0, z>0\}} (-x) \\ &\quad + \int_{\{x^2+z^2 \leq 1, x>0, y=0, z>0\}} (-y) \\ &\quad + \int_{\{x^2+y^2 \leq 1, x>0, y>0, z=0\}} (-z) \\ &\quad + \int_{\{x^2+y^2+z^2=1, x>0, y>0, z>0\}} (x^2 + y^2 + z^2) \\ &= 0 \\ &\quad + 0 \\ &\quad + 0 \\ &\quad + \text{Area}\left(\{x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}\right). \end{aligned}$$

Όμως το $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$ είναι το πρώτο ογδοημόριο σφαίρας ακτίνας $R = 1$, άρα

$$\text{Area}\left(\{x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}\right) = \frac{1}{8} \times 4\pi R^2 = \pi/2.$$

ΘΕΜΑ 7 [(0,5+1,5=2)/10]

Να επαληθεύσετε το Θ. Stokes για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$\vec{F}(x, y, z) = (xz, yz, xy),$$

στο κομμάτι του πάνω ημισφαιρίου

$$\mathfrak{S} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3, z > 0 \right\},$$

που αποκόπτεται από τον κύλινδρο

$$\mathcal{S} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Λύση: Το κομμάτι της $\mathfrak{S}$ που αποκόπτεται από τον $\mathcal{S}$ είναι το

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3, 1 \leq z \leq \sqrt{3}\}.$$

Μια παραμετρικοποίηση αυτού είναι η

$$\vec{\Phi}(\theta, \varphi) = (\sqrt{3} \sin \varphi \cos \theta, \sqrt{3} \sin \varphi \sin \theta, \sqrt{3} \cos \varphi), \quad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi/6].$$

Επειδή $(\operatorname{curl} \vec{F})(x, y, z) = (x - y)(1, 1, 0)$, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \operatorname{curl} \vec{F} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} (\operatorname{curl} \vec{F})(\vec{\Phi}(\theta, \varphi)) \cdot (\vec{\Phi}_{\theta} \times \vec{\Phi}_{\varphi})(\vartheta, \varphi) \, d\varphi d\theta \\ &= -3\sqrt{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \sin^3 \varphi (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \, d\varphi d\theta \\ &= -3\sqrt{3} \int_0^{2\pi} \sin^3 \varphi \, d\varphi \int_0^{\pi/6} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \, d\theta = 0. \end{aligned}$$

Από την άλλη, μια παραμετρικοποίηση της καμπύλης

$$\partial \Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2, z = 1\},$$

(συμβατή με το $\vec{\Phi}_{\varphi} \times \vec{\Phi}_{\theta}$ για να ισχύει το Θ. Stokes) είναι η $\vec{\sigma}(t) = (\sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos t, 1)$, $t \in [0, 2\pi)$. Επομένως $\vec{\sigma}'(t) = (\sqrt{2} \cos t, -\sqrt{2} \sin t, 0)$

$$\int_{\partial \Sigma} \vec{F} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) \, dt = 0.$$

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ

ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \exists! (\rho, \vartheta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi) \text{ ώστε } \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta. \end{cases}$$

Έχουμε

$$\det(\text{Ιακωβιανού πίνακα}) = \rho.$$

Επίσης, είναι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, αρα για κάθε $\rho > 0$ έχουμε μια

Παραμετρικοποίηση κύκλου κέντρου 0 και ακτίνας ρ :

$$\vec{\sigma}(\vartheta) = (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta, 0), \quad \vartheta \in [0, 2\pi).$$

Είναι τότε

$$\vec{\sigma}'(\vartheta) = \rho(-\sin \vartheta, \cos \vartheta, 0), \quad \vartheta \in [0, 2\pi),$$

επομένως

$$\|\vec{\sigma}'(\vartheta)\| = \rho, \quad \vartheta \in [0, 2\pi).$$

ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ:

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}, \exists! (\rho, \vartheta, \varphi) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi) \text{ ώστε } \begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = \rho \cos \varphi. \end{cases}$$

Έχουμε

$$\det(\text{Ιακωβιανού πίνακα}) = -\rho^2 \sin \varphi.$$

Επίσης, είναι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, αρα για κάθε $\rho > 0$ έχουμε μια

Παραμετρικοποίηση της σφαίρας κέντρου 0 και ακτίνας ρ :

$$\vec{\Phi}(\vartheta, \varphi) = (\rho \sin \varphi \cos \vartheta, \rho \sin \varphi \sin \vartheta, \rho \cos \varphi), \quad (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi).$$

Είναι τότε

$$(\vec{\Phi}_\vartheta \times \vec{\Phi}_\varphi)(\vartheta, \varphi) = -\rho^2 \sin \varphi (\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi), \quad (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi),$$

επομένως

$$\|(\vec{\Phi}_\vartheta \times \vec{\Phi}_\varphi)(\vartheta, \varphi)\| = \rho^2 \sin \varphi, \quad (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi).$$