ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΕΜΠΤΗ 01/02/2024
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ IV (ΜΥ 41)

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1 (0,75/10+0,75/10=1,5/10)

Υπολογίστε:

(i) τον όγκο του χωρίου $\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq \pi^2,\ x,y,z \geq 0\}$.

(ii) το εμβαδό της επιφάνειας $S := \Omega \cap \{y=1\}$.

ΘΕΜΑ 2 (1/10+0,5/10+0,5/10=2/10)

(i) Υπολογίστε το $\iint_{B_R^+(0)} e^{-x^2-y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, όπου $B_R^+(0)$ είναι το πάνω μισό του δίσκου με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα $R>0$, δηλ.

$$B_R^+(0) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq R^2,\ y \geq 0\}.$$

(ii) Παίρνοντας το όριο: $R \to \infty$, συμπεράνετε ότι $\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi/2$.

(iii) Δείξτε ότι $\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}/2$.

ΘΕΜΑ 3 (0,5/10+1,5/10=2/10)

Επαληθεύστε το Θ. Gauss για το τετράγωνο $0 \leq x,y \leq 1$, και τη συνάρτηση $\vec{F}(x,y) = (x^2,y^2)$.

ΘΕΜΑ 4 (1,5/10+1,5/10=3/10)

Επαληθεύστε το Θ. Stokes για την συνάρτηση $\vec{F}(x,y,z) = (x+y, 2x-z, y+z)$ στην τριγωνική επιφάνεια που ορίζεται από το επίπεδο $3x+2y+z=6$ και τις σχέσεις: $x \geq 0$, $y \geq 0$ και $z \geq 0$.

ΘΕΜΑ 5 (0,5/10+1,5/10=2/10)

Επαληθεύστε το Θ. Gauss για την μπάλα ακτίνας 1 κέντρου $(0,0,0)$, και τη συνάρτηση $\vec{F}(x,y,z) = (z,y,x)$.

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ

ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \exists!(\rho,\vartheta)\in[0,\infty)\times[0,2\pi)\text{ ώστε }\begin{cases}x=\rho\cos\vartheta\\ y=\rho\sin\vartheta.\end{cases}$$

Έχουμε

$$\det(\text{Ιακωβιανού πίνακα})=\rho.$$

Επίσης, είναι $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, αρα για κάθε $\rho>0$ έχουμε την ακόλουθη παραμετρικοποίηση της καμπύλης κύκλου κέντρου 0 και ακτίνας ρ:

$$\vec{\sigma}(\vartheta)=(\rho\cos\vartheta,\rho\sin\vartheta),\qquad \vartheta\in[0,2\pi).$$

Έχουμε

$$\vec{\sigma}'(\vartheta)=\rho(-\sin\vartheta,\cos\vartheta),\qquad \vartheta\in[0,2\pi),$$

επομένως

$$\|\vec{\sigma}'(\vartheta)\|=\rho,\qquad \vartheta\in[0,2\pi).$$

ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

$$\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \exists!(\rho,\vartheta,\varphi)\in[0,\infty)\times[0,2\pi)\times[0,\pi)\text{ ώστε }\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\vartheta\\ y=\rho\sin\varphi\sin\vartheta\\ z=\rho\cos\varphi.\end{cases}$$

Έχουμε

$$\det(\text{Ιακωβιανού πίνακα})=-\rho^2\sin\varphi.$$

Επίσης, είναι $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, αρα για κάθε $\rho>0$ έχουμε την ακόλουθη παραμετρικοποίηση της επιφάνειας σφαίρας κέντρου 0 και ακτίνας ρ:

$$\vec{\Phi}(\vartheta,\varphi)=(\rho\sin\varphi\cos\vartheta,\rho\sin\varphi\sin\vartheta,\rho\cos\varphi),\qquad (\vartheta,\varphi)\in[0,2\pi)\times[0,\pi).$$

Έχουμε

$$\big(\vec{\Phi}_\vartheta\times\vec{\Phi}_\varphi\big)(\vartheta,\varphi)=-\rho^2\sin\varphi(\sin\varphi\cos\vartheta,\sin\varphi\sin\vartheta,\cos\varphi),\qquad (\vartheta,\varphi)\in[0,2\pi)\times[0,\pi).$$

Επομένως

$$\|\big(\vec{\Phi}_\vartheta\times\vec{\Phi}_\varphi\big)(\vartheta,\varphi)\|=\rho^2\sin\varphi,\qquad (\vartheta,\varphi)\in[0,2\pi)\times[0,\pi).$$

ΤΥΠΟΣ ΑΠΟΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΗΜΙΤΟΝΟΥ

Μπορεί να σας φανεί χρήσιμη η σχέση

$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos(2\theta)}{2}.$$