

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
28/01/2026 - Εμβόλιμη εξέταση στο “Απειροστικός Λογισμός IV” (ΜΥ 41)

ΘΕΜΑ 1 [1,5/10]

Υπολογίστε το

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_x^R e^{-y^2} dy dx.$$

Λύση: Δεν μπορούμε να ξεκινήσουμε τον υπολογισμό, γιατί η συνάρτηση e^{-y^2} δεν έχει παράγουσα. Όμως, το ολοκλήρωμα είναι στο τρίγωνο

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq R, x \leq y \leq R\},$$

το οποίο περιγράφεται και ως εξής (κάντε ένα σχήμα):

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq R, 0 \leq x \leq y\}.$$

Με τη νέα περιγραφή του T , το ολοκλήρωμα που δίνεται γράφεται

$$\int_0^R \int_0^y e^{-y^2} dx dy,$$

το οποίο μπορεί τώρα να υπολογιστεί:

$$\int_0^R \int_0^y e^{-y^2} dx dy = \int_0^R e^{-y^2} \int_0^y 1 dx dy = \int_0^R e^{-y^2} y dy = \left[-\frac{1}{2} e^{-y^2} \right]_{y=0}^{y=R}.$$

Επομένως,

$$\int_0^R \int_x^R e^{-y^2} dy dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-R^2}) \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_x^R e^{-y^2} dy dx = \frac{1}{2}.$$

ΘΕΜΑ 2 [1,5/10]

Να αποδείξετε ότι ο όγκος V του χωρίου που δημιουργείται αν περιστρέψουμε το γράφημα της συνάρτησης με τύπο $y = \ln x$, $x \in [1, e]$, γύρω από τον x -άξονα, δίνεται από τον τύπο

$$V = \pi(e - 2).$$

Λύση: Εφαρμόζουμε την αρχή του Cavalieri. Αν σαρώσουμε με το yz -επίπεδο ένα χωρίο που δημιουργείται με περιστροφή του γραφήματος συνεχούς συνάρτησης $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, γύρω από τον x -άξονα, βλέπουμε ότι οι τομές είναι δίσκοι ακτίνας $|f(x)|$ (κάντε ένα σχήμα). Επομένως το εμβαδό μιας τέτοιας τομής είναι $A(x) = \pi f^2(x)$. Από την αρχή του Cavalieri, ο όγκος V του χωρίου δίνεται από τον τύπο

$$V = \int_a^b A(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Για την $f(x) = \ln x$, $x \in [1, e]$, έχουμε

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^e \ln^2 x \, dx = \pi \int_1^e (x)' \ln^2 x \, dx = -2\pi \int_1^e \ln x \, dx + \pi [x \ln^2 x]_{x=1}^{x=e} \\ &= -2\pi \int_1^e (x)' \ln x \, dx + \pi e = 2\pi \int_1^e 1 \, dx - 2\pi [x \ln x]_{x=1}^{x=e} + \pi e. \\ &= 2\pi e - 2\pi - 2\pi e + \pi e = \pi(e - 2). \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3 [(I+I)/IO]

(A) Ναδειχτεί ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \vec{F}$, όπου

$$\vec{F} = \left(\frac{1+y^2}{x^3}, -\frac{1+x^2}{x^2}y, 2026 \right), \quad (x, y) \in D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\},$$

είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης για όλες τις ομαλές καμπύλες C του D .

(B) Να υπολογίσετε το $\int_C \vec{F}$, όπου C είναι μια ομαλή καμπύλη του D με αρχή το $(1, 0)$ και τέλος το $(2, 1)$.

Λύση: (A) Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$, εφόσον επεκταθεί με τετριμμένο τρόπο στον $\mathbb{R}^3$, είναι αστρόβιλο (δηλ. $(\text{curl } \vec{F})(x, y, z) = (0, 0, 0)$ στο $\mathbb{R}^3$).

(B) Από το θεώρημα για αστρόβιλα διανυσματικά πεδία, αναζητούμε μια βαθμωτή συνάρτηση f τ.ώ. $\vec{F} = \nabla f$. Η f θα πρέπει να ικανοποιεί την

$$f_z(x, y, z) = 2026 \Rightarrow \boxed{f(x, y, z) = 2026z + g(x, y)}.$$

Πρέπει ακόμη

$$f_x(x, y, z) = \frac{1+y^2}{x^3} \Rightarrow g_x(x, y) = \frac{1+y^2}{x^3} \Rightarrow \boxed{g(x, y) = -\frac{1+y^2}{2x^2} + h(y)}.$$

Θα πρέπει επίσης

$$f_y(x, y, z) = -\frac{1+x^2}{x^2}y \Rightarrow g_y(x, y) = -\frac{y}{x^2} - y \Rightarrow -\frac{y}{x^2} + h'(y) = -\frac{y}{x^2} - y$$

$$\Rightarrow h'(y) = -y, \text{ άρα } \boxed{h(y) = -y^2/2}. \text{ Επομένως}$$

$$f(x, y, z) = 2026z - \frac{1+y^2}{2x^2} - \frac{y^2}{2}.$$

Αν C είναι ομαλή καμπύλη στον $\mathbb{R}^2 \times \{z = 0\}$ με αρχή το $(1, 0, 0)$ και τέλος το $(2, 1, 0)$, παίρνουμε $\int_C \vec{F} = f(2, 1, 0) - f(1, 0, 0) = -1/2$.

Μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα υπολογίζοντας απ' ευθείας το $\int_C \vec{F}$. Για παράδειγμα επιλέγουμε την καμπύλη με παραμετρικοποίηση $\vec{\sigma}(t) = (1+t, t, 0)$, $t \in [0, 1]$, και υπολογίζουμε $\int_C \vec{F} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) \, dt = \dots$

ΘΕΜΑ 4 [2,5/10]

Να επαληθεύσετε το Θ. Stokes για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο $\vec{F} = (z, x, y)$, στη μισή σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ που κείται πάνω από το xy -επίπεδο.

Λύση: Θέτουμε S να είναι η επιφάνεια της μισής σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ που κείται πάνω από το xy -επίπεδο, δηλαδή

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z > 0\}.$$

Μια παραμετρικοποίηση αυτής είναι η

$$\vec{\Phi}(\vartheta, \varphi) = R(\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi), \quad (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi/2),$$

με

$$(\vec{\Phi}_\vartheta \times \vec{\Phi}_\varphi)(\vartheta, \varphi) = -R^2 \sin \varphi (\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi).$$

Υπολογίζουμε: $(\text{curl} \vec{F})(x, y, z) = (1, 1, 1)$, επομένως

$$\begin{aligned} \int_S \text{curl} \vec{F} &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (\text{curl} \vec{F})(\vec{\Phi}(\vartheta, \varphi)) \cdot (\vec{\Phi}_\vartheta \times \vec{\Phi}_\varphi)(\vartheta, \varphi) \, d\vartheta d\varphi \\ &= -R^2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \int_0^{2\pi} (1, 1, 1) \cdot (\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi) \, d\vartheta d\varphi \\ &= -R^2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \int_0^{2\pi} (\sin \varphi \cos \vartheta + \sin \varphi \sin \vartheta + \cos \varphi) \, d\vartheta d\varphi \\ &= -R^2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \left(\sin \varphi \int_0^{2\pi} \cos \vartheta \, d\vartheta + \sin \varphi \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta + 2\pi \cos \varphi \right) d\varphi \\ &= -2\pi R^2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \\ &= \pi R^2 \left[\cos^2 \varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} = -\pi R^2. \end{aligned}$$

Από την άλλη, η καμπύλη που αποτελεί το σύνορο της S βρίσκεται στο επίπεδο $z = 0$ και είναι ο κύκλος κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας R (κάντε ένα σχήμα), δηλαδή

$$\partial S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2\}.$$

Μια παραμετρικοποίηση αυτής (η οποία διατηρεί τον προσανατολισμό που επιβάλλει η επιλογή της $\vec{\Phi}$) είναι η

$$\vec{\sigma}(t) = R(\sin t, \cos t, 0), \quad t \in [0, 2\pi),$$

με

$$\vec{\sigma}'(t) = R(\cos t, -\sin t, 0).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} \vec{F} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) dt \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} (0, \sin t, \cos t) \cdot (\cos t, -\sin t, 0) dt \\ &= -R^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt \\ &= -R^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = -\pi R^2.\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 5 [(0,5+2)/10]

Να επαληθεύσετε το Θ. Gauss για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{3}(x, y, z),$$

στο χωρίο

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4, z > 0\}.$$

Λύση: Το Ω είναι το “πάνω” μισό (διότι $z > 0$) της μπάλας κέντρου $(0, 0, 0)$ και ακτίνας 2. Είναι $\operatorname{div} \vec{F} = 1$, επομένως το τριπλό ολοκλήρωμα υπολογίζεται αμέσως:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} = \int_{\Omega} 1 = \text{Όγκος}(\Omega) = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi 2^3 = \frac{16}{3} \pi.$$

Από την άλλη, το σύνορο του Ω αποτελείται (κάντε ένα σχήμα) από το ημι-σφαιρικό “καπάκι”

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z > 0\},$$

και το “πάτωμα”

$$S_2 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Επομένως,

$$\int_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu} = \int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{\nu} + \int_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{\nu}.$$

Όμως $\vec{\nu} = \frac{1}{2}(x, y, z)$ στην επιφάνεια S_1 , άρα

$$\vec{F} \cdot \vec{\nu} = \frac{1}{3}(x, y, z) \cdot \frac{1}{2}(x, y, z) = \frac{1}{6}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{6}4 = \frac{2}{3} \text{ στην } S_1.$$

Επίσης $\vec{\nu} = (0, 0, -1)$ στην επιφάνεια S_2 , άρα

$$\vec{F} \cdot \vec{\nu} = \frac{1}{3}(x, y, z) \cdot (0, 0, -1) = -\frac{1}{3}z = 0 \text{ στην } S_2.$$

Έχουμε λοιπόν

$$\int_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu} = \int_{S_1} \frac{2}{3} + \int_{S_2} 0 = \frac{2}{3} \int_{S_1} 1 = \frac{2}{3} \operatorname{Εμβαδόν}(S_1) = \frac{2}{3} \frac{1}{2} 4\pi 2^2 = \frac{16}{3} \pi.$$