

Απειροστικός Λογισμός IV - Εαρινό 2025

Πρώτο Σετ Ασκήσεων

Άσκηση 1

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$(i) \int_0^1 \int_0^{(\arcsin x)/x} x \cos(xy) \, dy dx,$$

$$(ii) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 yz^2 e^{-xyz} \, dz dy dx.$$

Άσκηση 2

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$(i) \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} \, dx dy,$$

$$(ii) \int_0^1 \int_x^1 \cos\left(\frac{\pi y^2}{2}\right) \, dy dx,$$

$$(iii) \int_0^{\pi/2} \int_y^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} \, dx dy.$$

Άσκηση 3

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$(i) \int_0^1 \int_y^1 e^{\frac{y-x}{y+x}} \, dx dy,$$

$$(ii) \int_D f, \text{ όπου } f(x, y) = y \text{ και } D \text{ είναι το χωρίο που περικλείεται από τις ευθείες } 2x - y = -1, \\ 2x - y = 1, x + y = 2 \text{ και } x + y = 3,$$

$$(iii) \int_D f, \text{ όπου } f(x, y) = xy^2 \text{ και } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}.$$

Άσκηση 4

Με a, b, c θετικές σταθερές, θεωρούμε το ελλειψοειδές

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1\}.$$

$$(i) \text{ Υπολογίστε τον όγκο του } E.$$

$$(ii) \text{ Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης } f(x, y, z) = xyz, \text{ στο πρώτο ογδομήριο του } E.$$

Άσκηση 5

Να υπολογίσετε τον όγκο του χωρίου Ω που περιλείεται από τις επιφάνειες $z = x^2 + y^2$ και $2y + z = 3$.

Άσκηση 6

Αποδείξτε ότι ο όγκος V που περικλείει ένα χωνάκι $\mathcal{K}_{h,R}$ ύψους $h > 0$ και ακτίνας $R > 0$ σε αυτό το ύψος, δίνεται από τον τύπο

$$V = \frac{1}{3}\pi h R^2.$$

Υπόδειξη: $\mathcal{K}_{h,R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{R}{h}z, 0 \leq z \leq h\}$.

Άσκηση 7

Θέτουμε $\mathbb{B}^1 := \{x_1 \in \mathbb{R} \mid x_1^2 \leq 1\}$, $\mathbb{B}^2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ και $\mathbb{B}^3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$. Επίσης θέτουμε $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = \pi$ και $\omega_3 = (4/3)\pi$ για το μήκος, το εμβαδό και τον όγκο των $\mathbb{B}^1$, $\mathbb{B}^2$, $\mathbb{B}^3$, αντιστοίχως.

(i) Αν $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{B}^n} f\left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right) dx_1 \dots dx_n = n\omega_n \int_0^1 f(r)r^{n-1} dr \quad \text{για κάθε } n \in \{1, 2, 3\}.$$

(ii) Να δείξετε ότι για $a < n$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{B}^n} \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right)^{-a} dx_1 \dots dx_n = \frac{n\omega_n}{n-a} \quad \text{για κάθε } n \in \{1, 2, 3\}.$$