

Απειροστικός Λογισμός IV - Εαρινό 2025

Πρώτο Σετ Ασκήσεων

Άσκηση 1

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$(i) \int_0^1 \int_0^{(\arcsin x)/x} x \cos(xy) \, dy \, dx,$$

$$(ii) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 yz^2 e^{-xyz} \, dz \, dy \, dx.$$

Λύσεις:

$$\begin{aligned} (i) \int_0^1 \int_0^{(\arcsin x)/x} x \cos(xy) \, dy \, dx &= \int_0^1 \int_0^{(\arcsin x)/x} \frac{\partial}{\partial y} (\sin(xy)) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left[\sin(xy) \right]_{y=0}^{y=(\arcsin x)/x} dx = \int_0^1 \sin(\arcsin x) \, dx = \int_0^1 x \, dx = 1/2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 yz^2 e^{-xyz} \, dz \, dy \, dx &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} (-ze^{-xyz}) \, dx \, dz \, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 z \left[e^{-xyz} \right]_{x=0}^{x=1} dz \, dy = \int_0^1 \int_0^1 z(1 - e^{-yz}) \, dz \, dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} (zy + e^{-yz}) \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \left[zy + e^{-yz} \right]_{y=0}^{y=1} dz = \int_0^1 (z + e^{-z} - 1) dz = 1/2 - 1/e. \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$(i) \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} \, dx \, dy,$$

$$(ii) \int_0^1 \int_x^1 \cos\left(\frac{\pi y^2}{2}\right) \, dy \, dx,$$

$$(iii) \int_0^{\pi/2} \int_y^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} \, dx \, dy.$$

Λύσεις:

$$\begin{aligned} (i) \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_{x^2}^x e^{\frac{y}{x}} \, dy \, dx = \int_0^1 \int_{x^2}^x \frac{\partial}{\partial y} (xe^{\frac{y}{x}}) \, dy \, dx = \int_0^1 x \left[e^{\frac{y}{x}} \right]_{y=x^2}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 x(e - e^x) \, dx = e/2 - \int_0^1 x \, d(e^x) = e/2 + \left[e^x \right]_{x=0}^{x=1} - \left[xe^x \right]_{x=0}^{x=1} = e/2 - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \int_0^1 \int_x^1 \cos\left(\frac{\pi y^2}{2}\right) \, dy \, dx &= \int_0^1 \int_0^y \cos\left(\frac{\pi y^2}{2}\right) \, dx \, dy = \int_0^1 y \cos\left(\frac{\pi y^2}{2}\right) \, dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi y^2}{2}\right) d\left(\frac{\pi y^2}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \left[\sin\left(\frac{\pi y^2}{2}\right) \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

$$(iii) \int_0^{\pi/2} \int_y^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} \, dx \, dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^x \frac{\sin x}{x} \, dy \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 1.$$

Άσκηση 3

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- (i) $\int_0^1 \int_y^1 e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy$,
- (ii) $\int_D f$, όπου $f(x, y) = y$ και D είναι το χωρίο που περικλείεται από τις ευθείες $2x - y = -1$, $2x - y = 1$, $x + y = 2$ και $x + y = 3$,
- (iii) $\int_D f$, όπου $f(x, y) = xy^2$ και $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}$.

Λύσεις:

- (i) Η ολοκλήρωση είναι πάνω στο τριγωνικό χωρίο D με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(1, 1)$ του (x, y) -επιπέδου. Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών $u = y - x$ και $v = y + x$, δηλαδή $x = \frac{1}{2}(v - u)$ και $y = \frac{1}{2}(u + v)$. Θεωρούμε επομένως το γραμμικό μετασχηματισμό $T(u, v) = \frac{1}{2}(v - u, u + v)$, $(u, v) \in D^*$. Επειδή ο T έχει ορίζουσα $-\frac{1}{2} \neq 0$, από το Θεώρημα 1 της §6.1 στη σελίδα 308, ξέρουμε ότι το D^* είναι ένα επίσης τριγωνικό χωρίο στο uv -επίπεδο, με κορυφές τις εικόνες των κορυφών του D μέσω του παραπάνω μετασχηματισμού. Δηλαδή το D^* είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(-1, 1)$ και $(0, 2)$ του (u, v) -επιπέδου. Αρα, από το Θεώρημα 2 της §6.2 στη σελίδα 317, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_y^1 e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy &= \int_{-1}^0 \int_{-u}^{u+2} e^{\frac{u}{v}} \left| -\frac{1}{2} \right| dv du = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \int_{-u}^{u+2} e^{\frac{u}{v}} dv du \\ & \text{(συνεχίσουμε τον υπολογισμό αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης - κάντε σχήμα!)} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-v}^0 e^{\frac{u}{v}} du dv + \frac{1}{2} \int_1^2 \int_{v-2}^0 e^{\frac{u}{v}} du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 v \left(1 - \frac{1}{e}\right) dv + \frac{1}{2} \int_1^2 v \left(1 - e^{1-2/v}\right) dv = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{e}\right) + \frac{3}{4} - \frac{e}{2} \int_1^2 v e^{-2/v} dv \\ & \text{(σταματάμε εδώ τον υπολογισμό καθώς το τελευταίο ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται στοιχειω-} \\ & \text{δώς).} \end{aligned}$$

- (ii) Η ολοκλήρωση είναι πάνω στο ορθογώνιο χωρίο D με κορυφές τα σημεία $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{7}{3})$, $(\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$ και $(1, 1)$ του (x, y) -επιπέδου. Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών $u = 2x - y$ και $v = x + y$, δηλαδή $x = \frac{1}{3}(u + v)$ και $y = \frac{1}{3}(2v - u)$. Θεωρούμε επομένως το γραμμικό μετασχηματισμό $T(u, v) = \frac{1}{3}(u + v, 2v - u)$, $(u, v) \in D^*$. Επειδή ο T έχει ορίζουσα $\frac{1}{3} \neq 0$, από το Θεώρημα 1 της §6.1 στη σελίδα 308, ξέρουμε ότι το D^* είναι ένα επίσης ορθογώνιο χωρίο στο uv -επίπεδο, με κορυφές τις εικόνες των κορυφών του D μέσω του παραπάνω μετασχηματισμού. Δηλαδή το D^* είναι το ορθογώνιο με κορυφές τα σημεία $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(-1, 3)$ και $(-1, 2)$ του (u, v) -επιπέδου. Αρα, από το Θεώρημα 2 της §6.2 στη σελίδα 317 παίρνουμε

$$\int_D f = \int_{-1}^1 \int_2^3 \frac{1}{3}(2v - u) \left| \frac{1}{3} \right| dv du = \frac{1}{9} \int_{-1}^1 \left[v^2 - uv \right]_{v=2}^{v=3} du = \frac{1}{9} \int_{-1}^1 (5 - u) du = 10/9.$$

- (iii) Θέτουμε $x = \frac{1}{2}\rho \cos \theta$ και $y = \rho \sin \theta$. Το D μετασχηματίζεται τότε στο

$$D^* := \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}.$$

Επειδή $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \frac{1}{2}\rho$, από το Θεώρημα 2 της §6.2 στη σελίδα 317 παίρνουμε

$$\int_D f = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\rho^3 \cos \theta \sin^2 \theta \left| \frac{1}{2}\rho \right| d\theta d\rho = \frac{1}{4} \int_0^1 \rho^4 d\rho \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin^2 \theta d\theta = 1/60.$$

Άσκηση 4

Με a, b, c θετικές σταθερές, θεωρούμε το ελλειψοειδές

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1\}.$$

- (i) Υπολογίστε τον όγκο του E .
- (ii) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y, z) = xyz$, στο πρώτο ογδομήμιο του E .

Λύσεις:

- (i) Θέτουμε $x = au, y = bv$ και $z = cw$. Το E μετασχηματίζεται τότε στο

$$E^* := \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\},$$

δηλαδή στη μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^3$. Επειδή $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = abc$, από τον τύπο αλλαγής μεταβλητής για τριπλά ολοκληρώματα στη σελίδα 322 παίρνουμε $\text{Vol}(E) = \int_E 1 = \int_{E^*} |abc| = abc \int_{E^*} 1 = abc \text{Vol}(E^*) = abc \frac{4}{3}\pi$.

- (ii) Όπως στο (i), παίρνουμε $\int \int \int_E xyz \, dx dy dz = abc \int \int \int_{E^*} uvw \, du dv dw$
 $= abc \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin^2 \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta - \rho^2 \sin \varphi \mid d\varphi d\theta d\rho$
 $= abc \int_0^1 \rho^5 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi$
 $= abc \frac{1}{6} \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \left[\frac{\sin^4 \varphi}{4} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} = \frac{abc}{48}.$

Άσκηση 5

Να υπολογίσετε τον όγκο του χωρίου Ω που περιλείεται από τις επιφάνειες $z = x^2 + y^2$ και $2y + z = 3$.

Λύση: Εύκολα βλέπουμε ότι οι δοσμένες επιφάνειες τέμνονται επί του κυλίνδρου

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (1 + y)^2 = 2^2, z \in (0, \infty)\},$$

του οποίου η προβολή στο xy -επίπεδο είναι το σύνορο του δίσκου

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (1 + y)^2 < 2^2\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε, } \text{Vol}(\Omega) &= \int_{\Omega} 1 = \int_D \int_{x^2+y^2}^{3-2y} 1 \, dz dx dy = \int_D (4 - (y+1)^2 - x^2) \, dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - \rho^2) |\rho| d\rho d\theta = \frac{\pi}{2} \left[(4 - \rho^2)^2 \right]_{\rho=2}^{\rho=0} = 8\pi. \end{aligned}$$

Άσκηση 6

Αποδείξτε ότι ο όγκος V που περικλείει ένα χωνάκι $\mathcal{K}_{h,R}$ ύψους $h > 0$ και ακτίνας $R > 0$ σε αυτό το ύψος, δίνεται από τον τύπο

$$V = \frac{1}{3} \pi h R^2.$$

Υπόδειξη: $\mathcal{K}_{h,R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{R}{h} z, 0 \leq z \leq h\}$.

Λύση: Εφαρμόζουμε την αρχή του Cavalieri: $V = \text{Vol}(\mathcal{K}_{h,R}) = \int_0^h \text{Area}(D(\frac{R}{h}z)) \, dz$, όπου $D(\frac{R}{h}z)$ είναι ο δίσκος ακτίνας $\frac{R}{h}z$. Επομένως $V = \int_0^h \pi (\frac{R}{h}z)^2 \, dz = \frac{1}{3} \pi h R^2$.

Άσκηση 7

Θέτουμε $\mathbb{B}^1 := \{x_1 \in \mathbb{R} \mid x_1^2 \leq 1\}$, $\mathbb{B}^2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ και $\mathbb{B}^3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$. Επίσης θέτουμε $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = \pi$ και $\omega_3 = (4/3)\pi$ για το μήκος, το εμβαδό και τον όγκο των $\mathbb{B}^1$, $\mathbb{B}^2$, $\mathbb{B}^3$, αντιστοίχως.

(i) Αν $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{B}^n} f(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}) dx_1 \dots dx_n = n\omega_n \int_0^1 f(r) r^{n-1} dr \quad \text{για κάθε } n \in \{1, 2, 3\}.$$

(ii) Να δείξετε ότι για $a < n$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{B}^n} \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right)^{-a} dx_1 \dots dx_n = \frac{n\omega_n}{n-a} \quad \text{για κάθε } n \in \{1, 2, 3\}.$$

Λύση:

$$\begin{aligned} (i) \quad \text{Για } n=1, \int_{\mathbb{B}^1} f(\sqrt{x_1^2}) dx_1 &= \int_{-1}^1 f(|x_1|) dx_1 = \int_{-1}^0 f(-x_1) dx_1 + \int_0^1 f(x_1) dx_1 \\ &= \int_0^1 f(y) dy + \int_0^1 f(x_1) dx_1 = 2 \int_0^1 f(x_1) dx_1 = \omega_1 \int_0^1 f(r) dr. \\ \text{Για } n=2, \int_{\mathbb{B}^2} f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) dx_1 dx_2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(\rho) \rho d\rho d\theta = 2\pi \int_0^1 f(\rho) \rho d\rho \\ &= 2\omega_2 \int_0^1 f(r) r dr. \\ \text{Για } n=3, \int_{\mathbb{B}^3} f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}) dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 f(\rho) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \\ &= 2\pi \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^1 f(\rho) \rho^2 d\rho = 4\pi \int_0^1 f(\rho) \rho^2 d\rho = 3\omega_3 \int_0^1 f(r) r^2 dr. \end{aligned}$$

(ii) Εφαρμογή του (i) με $f(r) = r^{-a}$ (αντιμετωπίζουμε το αριστερό μέλος ως γενικευμένο ολοκλήρωμα!).