

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εξέταση στο “Απειροστικός Λογισμός IV” (ΜΥ 41)

11/09/2025

ΘΕΜΑ 1 [1/10]

Υπολογίστε το $\int_{\Omega} f$, όταν $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ και $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$.

ΘΕΜΑ 2 [1/10]

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Σχεδιάστε την περιοχή ολοκλήρωσης και αλλάξτε τη σειρά ολοκλήρωσης στο ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα: $\int_0^4 \left(\int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy$.

ΘΕΜΑ 3 [1/10]

Υπολογίστε το $\int_C f$, όπου $f(x, y, z) = x + z$ και C είναι η καμπύλη η οποία διαγράφει μία φορά την τομή των επιφανειών με εξισώσεις $x = z$ και $y^2 + z^2 = 1$.

ΘΕΜΑ 4 [1/10]

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_S f$, όπου $f(x, y, z) = x^2 z + y^2 z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, και S είναι το τμήμα του επιπέδου $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \pi + x + y\}$, που αποκόπτεται από τον κύλινδρο $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 9, z \in \mathbb{R}\}$.

ΘΕΜΑ 5 [(0,5+0,5+0,5+0,5=2)/10]

(Α) Βρείτε $\gamma \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \vec{F}$, με

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(2x^2 + xy, \frac{1}{2}(x^2 - 7y + 2z), \gamma y \right), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

να είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης για όλες τις ομαλές καμπύλες του $\mathbb{R}^3$.

(Β) Για το/τα γ του (Α), να βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\vec{F} = \nabla f$.

(Γ) Έστω C είναι ομαλή καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$ με αρχή το $(0, 0, 0)$ και τέλος το $(0, 1, 1)$. Να υπολογίσετε το $\int_C \vec{F}$ με τους εξής δύο τρόπους:

- (i) χρησιμοποιώντας το (Β), και
- (ii) απευθείας, με επιλογή της καμπύλης C .

ΘΕΜΑ 6 [(0,5+1,5=2)/10]

Να επαληθεύσετε το Θ. Gauss για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$, στο χωρίο $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 4, 0 < z < 2\}$.

ΘΕΜΑ 7 [(I+I=2)/10]

Να επαληθεύσετε το Θ . Stokes για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ και την επιφάνεια S , όπου $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, z)$ και S είναι το προς τα πάνω προσανατολισμένο τμήμα του γραφήματος της $f(x, y) = x^2y$ πάνω σε ένα τρίγωνο στο επίπεδο xy με κορυφές $(0, 0)$, $(2, 0)$ και $(0, 2)$.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ

ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \exists! (\rho, \vartheta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi) \text{ ώστε } \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta. \end{cases}$$

Έχουμε

$$\det(\text{Ιακωβιανού πίνακα}) = \rho.$$

Επίσης, είναι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, αρα για κάθε $\rho > 0$ έχουμε μια

Παραμετρικοποίηση κύκλου κέντρου 0 και ακτίνας ρ :

$$\vec{\sigma}(\vartheta) = (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta, 0), \quad \vartheta \in [0, 2\pi).$$

Είναι τότε

$$\vec{\sigma}'(\vartheta) = \rho(-\sin \vartheta, \cos \vartheta, 0), \quad \vartheta \in [0, 2\pi),$$

επομένως

$$\|\vec{\sigma}'(\vartheta)\| = \rho, \quad \vartheta \in [0, 2\pi).$$

ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ:

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}, \exists! (\rho, \vartheta, \varphi) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi) \text{ ώστε } \begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = \rho \cos \varphi. \end{cases}$$

Έχουμε

$$\det(\text{Ιακωβιανού πίνακα}) = -\rho^2 \sin \varphi.$$

Επίσης, είναι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, αρα για κάθε $\rho > 0$ έχουμε μια

Παραμετρικοποίηση της σφαίρας κέντρου 0 και ακτίνας ρ :

$$\vec{\Phi}(\vartheta, \varphi) = (\rho \sin \varphi \cos \vartheta, \rho \sin \varphi \sin \vartheta, \rho \cos \varphi), \quad (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi).$$

Είναι τότε

$$(\vec{\Phi}_\vartheta \times \vec{\Phi}_\varphi)(\vartheta, \varphi) = -\rho^2 \sin \varphi (\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi), \quad (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi),$$

επομένως

$$\|(\vec{\Phi}_\vartheta \times \vec{\Phi}_\varphi)(\vartheta, \varphi)\| = \rho^2 \sin \varphi, \quad (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi).$$