(διδάσκονται στα περισσότερα μαθήματα διαφορικών εξισώσεων). Για να αντιληφθείτε τον κυματικό χαρακτήρα των λύσεων, για παράδειγμα, παρατηρήστε ότι για οποιαδήποτε συνάρτηση f, η

$$\phi(t, x, y, z) = f(x - t)$$

είναι λύση της κυματικής εξίσωσης $\nabla^2\phi - (\partial^2\phi/\partial t^2) = 0$. Αυτή η λύση απλώς διαδίδει το γράφημα της f σαν κύμα· άρα μπορούμε να εικάσουμε ότι οι λύσεις των εξισώσεων του Maxwell έχουν κυματικό χαρακτήρα. Ιστορικά, το μεγάλο επίτευγμα του Maxwell ήταν όλα τα παραπάνω, τα οποία οδήγησαν, ύστερα από σύντομο χρονικό διάστημα, τον Hertz στην ανακάλυψη των ραδιοκυμάτων.

Τα μαθηματικά αποδεικνύουν για ακόμη μία φορά την παράξενη ικανότητά τους όχι μόνο να *περιγράφουν* αλλά και να *προβλέπουν* τα φυσικά φαινόμενα.

Ασκήσεις

Στις Ασκήσεις 1 έως 4, επαληθεύστε το θεώρημα απόκλισης για το δεδομένο χωρίο W, με σύνορο ∂W προσανατολισμένο προς τα έξω και το δεδομένο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$.

1. $W = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$,
$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

2. Το W της Άσκησης 1 και $\mathbf{F} = zy\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

3. $W = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
(η μοναδιαία μπάλα),
$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

4. Το W της Άσκησης 3 και $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

5. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα απόκλισης υπολογίστε τη εξερχόμενη ροή του $\mathbf{F} = (x-y)\mathbf{i} + (y-z)\mathbf{j} + (z-x)\mathbf{k}$ διαμέσου της μοναδιαίας σφαίρας.

6. Έστω $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$. Υπολογίστε την τιμή του επιφανειακού ολοκληρώματος του $\mathbf{F}$ επί της μοναδιαίας σφαίρας.

7. Υπολογίστε την τιμή του $\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, όπου $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ και W είναι ο μοναδιαίος κύβος (στο πρώτο ογδοημόριο). Κάντε απευθείας τον υπολογισμό και ελέγξτε το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας το θεώρημα απόκλισης.

8. Να επαναλάβετε την Άσκηση 7 για

(α) $\mathbf{F} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

(β) $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

9. Έστω $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$. Υπολογίστε την τιμή του $\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ για τα παρακάτω χωρία W:

(α) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$

(β) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ και $x \geq 0$

(γ) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ και $x \leq 0$

10. Να επαναλάβετε την Άσκηση 9 για $\mathbf{F} = (x-y)\mathbf{i} + (y-z)\mathbf{j} + (z-x)\mathbf{k}$. [Στον οδηγό μελέτης του βιβλίο περιλαμβάνεται μόνο η λύση του ερωτήματος (β).]

11. Να βρείτε την εξερχόμενη ροή του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F} = (x - y^2)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x^3\mathbf{k}$ διαμέσου του ορθογώνιου στερεού $[0,1] \times [1,2] \times [1,4]$.

12. Υπολογίστε την τιμή του $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, όπου $\mathbf{F} = 3xy^2\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ και S είναι η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας.

[7] Υπάρχουν παραλλαγές αυτής της διαδικασίας. Για περισσότερες λεπτομέρειες, βλ., για παράδειγμα, *Differential Equations of Applied Mathematics*