# 1

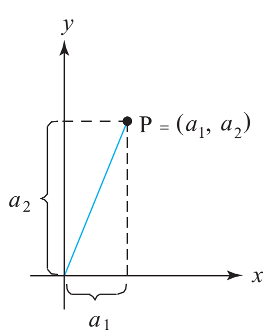
# Η γεωμετρία του ευκλείδειου χώρου

Τα τετραδόνια ήταν έργο του Hamilton ... και αποδείχθηκαν σκέτο βάσανο για όσους τα άγγιξαν με οποιονδήποτε τρόπο. Το διάνυσμα είναι ένα άχρηστο απομεινάρι ... και δεν έχει φανεί ποτέ χρήσιμο ούτε στο παραμικρό σε κανένα πλάσμα.

—Lord Kelvin

**Σε αυτό το κεφάλαιο** μελετάμε τις βασικές πράξεις των διανυσμάτων στον διδιάστατο και τριδιάστατο χώρο: την πρόσθεση διανυσμάτων, τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό και το εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο. Στην Ενότητα 1.5 γενικεύουμε μερικές από αυτές τις έννοιες στον $n$-χώρο και υπενθυμίζουμε τις ιδιότητες των πινάκων που θα μας χρειαστούν στα Κεφάλαια 2 και 3.

## 1.1 Διανύσματα στον διδιάστατο και τριδιάστατο χώρο



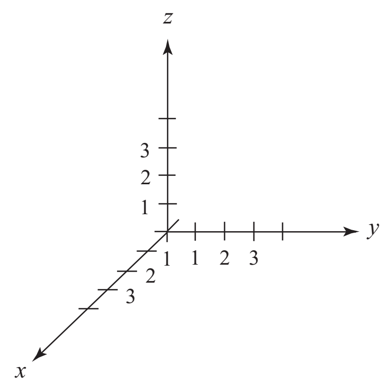

Σχήμα **1.1.1** Καρτεσιανές συντεταγμένες στο επίπεδο.

Τα σημεία P του επιπέδου αναπαριστώνται ως διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών $(a_1, a_2)$· οι αριθμοί $a_1$ και $a_2$ καλούνται ***καρτεσιανές συντεταγμένες του*** P. Σχεδιάζουμε δύο κάθετες ευθείες, τις ονομάζουμε άξονες $x$ και $y$, και στη συνέχεια φέρνουμε κάθετες ευθείες από το P σε αυτούς τους άξονες, όπως στο Σχήμα 1.1.1. Αφού ορίσουμε την τομή των αξόνων $x$ και $y$ ως αρχή των αξόνων και επιλέξουμε μοναδιαία μήκη για αυτούς τους άξονες, παράγουμε δύο προσημασμένες αποστάσεις $a_1$ και $a_2$, όπως φαίνεται στο σχήμα· η $a_1$ καλείται ***συνιστώσα*** $x$ του P, ενώ η $a_2$ καλείται ***συνιστώσα*** $y$.

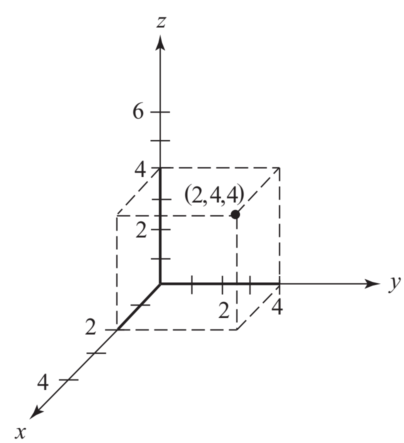
Με αντίστοιχο τρόπο, τα σημεία του χώρου μπορούν να αναπαρασταθούν ως διατεταγμένες τριάδες πραγματικών αριθμών. Για να κατασκευάσουμε μια τέτοια αναπαράσταση, επιλέγουμε τρεις ανά δύο κάθετες μεταξύ τους ευθείες που τέμνονται σε ένα σημείο του χώρου. Αυτές οι ευθείες καλούνται ***άξονας*** $x$, ***άξονας*** $y$ και ***άξονας*** $z$, ενώ το σημείο στο οποίο τέμνονται καλείται ***αρχή των αξόνων*** (και είναι το σημείο αναφοράς μας). Επιλέγουμε μια κλίμακα για αυτούς τους άξονες, όπως στο Σχήμα 1.1.2.

Η τριάδα $(0, 0, 0)$ αντιστοιχεί στην αρχή των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων, ενώ τα βέλη πάνω στους άξονες δηλώνουν τις θετικές κατευθύνσεις. Για παράδειγμα, η τριάδα $(2, 4, 4)$ αναπαριστά ένα σημείο 2 μονάδες από την αρχή των αξόνων κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x$, 4 μονάδες κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα $y$, και 4 μονάδες κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα $z$ (Σχήμα 1.1.3).

Αφού μπορούμε να αντιστοιχίζουμε σημεία του χώρου με διατεταγμένες τριάδες κατ' αυτό τον τρόπο, συχνά χρησιμοποιούμε την έκφραση «το σημείο $(a_1, a_2, a_3)$» αντί της μακρύτερης φράσης «το σημείο P που αντιστοιχεί στην τριάδα $(a_1, a_2, a_3)$». Λέμε ότι το $a_1$ είναι η ***συντεταγμένη*** $x$ (ή πρώτη συντεταγμένη), το $a_2$ η ***συντεταγμένη*** $y$ (ή δεύτερη συντεταγμένη) και το $a_3$ η ***συντεταγμένη*** $z$ (ή τρίτη συντεταγμένη) του P. Συχνά συμβολίζουμε τα σημεία του χώρου με τα γράμματα $x$, $y$ και $z$ αντί των $a_1$, $a_2$ και $a_3$. Άρα η τριάδα $(x, y, z)$ αναπαριστά ένα σημείο με πρώτη συντεταγμένη το $x$, δεύτερη συντεταγμένη το $y$ και τρίτη συντεταγμένη το $z$.




Σχήμα 1.1.2 Καρτεσιανές συντεταγμένες στον χώρο.




Σχήμα 1.1.3 Γεωμετρική αναπαράσταση του σημείου $(2, 4, 4)$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό για την ευθεία, το επίπεδο και τον τριδιάστατο χώρο:

(i) Η ευθεία των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{R}^1$ ή απλά με $\mathbb{R}$.

(ii) Το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών $(x, y)$ πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{R}^2$.

(iii) Το σύνολο όλων των διατεταγμένων τριάδων $(x, y, z)$ πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{R}^3$.

Όταν αναφερόμαστε στους $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ ταυτόχρονα, γράφουμε $\mathbb{R}^n$, όπου $n = 1, 2$ ή 3, ή $\mathbb{R}^m$, όπου $m = 1, 2, 3$. Ξεκινώντας από την Ενότητα 1.5, θα μελετήσουμε επίσης τον $\mathbb{R}^n$ για $n = 4, 5, 6, \ldots$, αλλά επειδή η γεωμετρία των περιπτώσεων $n = 1, 2, 3$ μας είναι διαισθητικά ευκολότερα αντιληπτή θα δίνουμε έμφαση σε αυτές τις περιπτώσεις σε ολόκληρο το βιβλίο.

## Πρόσθεση διανυσμάτων και βαθμωτός πολλαπλασιασμός

Η πράξη της πρόσθεσης μπορεί να επεκταθεί από τον $\mathbb{R}$ στους $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$. Για τον $\mathbb{R}^3$, αυτό γίνεται ως εξής: Δεδομένων δύο τριάδων $(a_1, a_2, a_3)$ και $(b_1, b_2, b_3)$, ορίζουμε το ***άθροισμά*** τους ως

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$

**Παράδειγμα 1**

$$\begin{aligned}(1, 1, 1) + (2, -3, 4) &= (3, -2, 5),\\ (x, y, z) + (0, 0, 0) &= (x, y, z),\\ (1, 7, 3) + (a, b, c) &= (1 + a, 7 + b, 3 + c)\end{aligned}$$

▲

Το στοιχείο $(0,0,0)$ καλείται ***μηδενικό στοιχείο*** (ή απλώς ***μηδέν***) του $\mathbb{R}^3$. Το στοιχείο $(-a_1, -a_2, -a_3)$ είναι το ***προσθετικό αντίστροφο*** (ή ***αντίθετο***) του $(a_1, a_2, a_3)$, και θα γράφουμε $(a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3)$ αντί για $(a_1, a_2, a_3) + (-b_1, -b_2, -b_3)$.

Το προσθετικό αντίστροφο ενός διανύσματος, όταν προστίθεται στο ίδιο το διάνυσμα, παράγει ασφαλώς το μηδέν:

$$(a_1, a_2, a_3) + (-a_1, -a_2, -a_3) = (0, 0, 0).$$

Θα ορίσουμε διάφορες σημαντικές πράξεις γινομένου στον $\mathbb{R}^3$. Μια από αυτές, το λεγόμενο *εσωτερικό γινόμενο*, αντιστοιχίζει έναν πραγματικό αριθμό σε κάθε ζεύγος στοιχείων του $\mathbb{R}^3$. Θα το εξετάσουμε λεπτομερώς στην Ενότητα 1.2. Μια άλλη πράξη γινομένου στον $\mathbb{R}^3$ είναι ο λεγόμενος *βαθμωτός πολλαπλασιασμός* (ο όρος «βαθμωτή ποσότητα» είναι συνώνυμο του «πραγματικός αριθμός»). Αυτό το γινόμενο συνδυάζει βαθμωτές ποσότητες (πραγματικούς αριθμούς) και στοιχεία του $\mathbb{R}^3$ (διατεταγμένες τριάδες) και παράγει στοιχεία του $\mathbb{R}^3$ ως εξής: Δεδομένου ενός πραγματικού αριθμού $\alpha$ και μιας τριάδας $(a_1, a_2, a_3)$, ορίζουμε το ***βαθμωτό γινόμενο*** ως

$$\alpha(a_1, a_2, a_3) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3).$$

**Παράδειγμα 2**

$$\begin{aligned} 2(4, e, 1) &= (2 \cdot 4, 2 \cdot e, 2 \cdot 1) = (8, 2e, 2), \\ 6(1, 1, 1) &= (6, 6, 6), \\ 1(u, v, w) &= (u, v, w), \\ 0(p, q, r) &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

▲

Η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός τριάδων ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $(\alpha\beta)(a_1, a_2, a_3) = \alpha[\beta(a_1, a_2, a_3)]$ (προσεταιριστικότητα)

(ii) $(\alpha + \beta)(a_1, a_2, a_3) = \alpha(a_1, a_2, a_3) + \beta(a_1, a_2, a_3)$ (επιμεριστικότητα)

(iii) $\alpha[(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)] = \alpha(a_1, a_2, a_3) + \alpha(b_1, b_2, b_3)$ (επιμεριστικότητα)

(iv) $\alpha(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ (ιδιότητα του μηδενός)

(v) $0(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$ (ιδιότητα του μηδενός)

(vi) $1(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, a_3)$ (ιδιότητα του μοναδιαίου στοιχείου)

Οι παραπάνω ταυτότητες αποδεικνύονται απευθείας από τους ορισμούς της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(a_1, a_2, a_3) &= ((\alpha + \beta)a_1, (\alpha + \beta)a_2, (\alpha + \beta)a_3) \\ &= (\alpha a_1 + \beta a_1, \alpha a_2 + \beta a_2, \alpha a_3 + \beta a_3) \\ &= \alpha(a_1, a_2, a_3) + \beta(a_1, a_2, a_3). \end{aligned}$$

Στον $\mathbb{R}^2$, η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός ορίζονται ακριβώς όπως στον $\mathbb{R}^3$, αφού παραλείψουμε την τρίτη συνιστώσα των διανυσμάτων. Εξακολουθούν να ισχύουν όλες οι ιδιότητες (i) έως (vi).

**Παράδειγμα 3** Ερμηνεύστε τη χημική εξίσωση $2\mathrm{NH}_2 + \mathrm{H}_2 = 2\mathrm{NH}_3$ ως σχέση στην άλγεβρα των διατεταγμένων ζευγών.

**Λύση** Αν φανταστούμε το μόριο $\mathrm{N}_x\mathrm{H}_y$ ($x$ άτομα αζώτου, $y$ άτομα υδρογόνου) ως το διατεταγμένο ζεύγος $(x, y)$, η παραπάνω χημική εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $2(1, 2) + (0, 2) = 2(1, 3)$. Πράγματι, και τα δύο μέλη της ισούνται με $(2, 6)$. ▲

## Γεωμετρία των διανυσματικών πράξεων

Ας δούμε τη γεωμετρία αυτών των πράξεων στους $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$. Προς το παρόν, ορίζουμε ένα ***διάνυσμα*** ως ένα κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινάει από την αρχή των αξόνων, δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα με καθορισμένο μέτρο και κατεύθυνση, και αρχικό σημείο την αρχή των αξόνων. Στο Σχήμα 1.1.4 παρουσιάζονται διάφορα διανύσματα, σχεδιασμένα ως βέλη που ξεκινούν από την αρχή των αξόνων. Στα βιβλία, τα διανύσματα γράφονται συνήθως με έντονους χαρακτήρες, π.χ. **a**. Όταν τα γράφουμε με το χέρι, τα γράφουμε συνήθως ως $\vec{a}$ ή απλά ως $a$, πιθανόν με μια ευθεία ή κυματιστή γραμμή από κάτω.

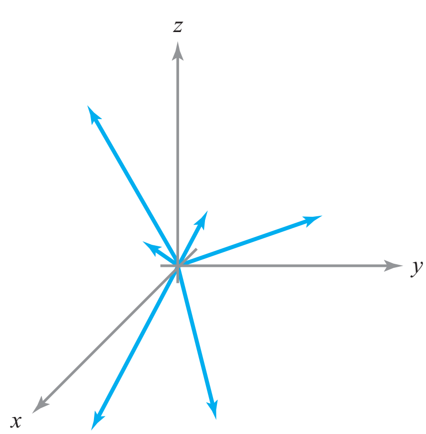
Χρησιμοποιώντας αυτό τον ορισμό του διανύσματος, αντιστοιχίζουμε σε κάθε διάνυσμα **a** το σημείο $(a_1, a_2, a_3)$ όπου τερματίζει το **a** και, αντιστρόφως, σε κάθε σημείο $(a_1, a_2, a_3)$ του χώρου μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα διάνυσμα **a**. Επομένως, θα ταυτίζουμε το **a** με το $(a_1, a_2, a_3)$ και θα γράφουμε $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Για αυτό τον λόγο, τα στοιχεία του $\mathbb{R}^3$ δεν είναι μόνο διατεταγμένες τριάδες πραγματικών αριθμών· θεωρούνται και διανύσματα. Η τριάδα $(0, 0, 0)$ συμβολίζεται με **0**. Καλούμε τα $a_1$, $a_2$, και $a_3$ ***συνιστώσες*** του **a**, ή όταν θεωρούμε το **a** σημείο, ***συντεταγμένες*** του.

Δύο διανύσματα $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ και $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ είναι ίσα αν και μόνο αν $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ και $a_3 = b_3$. Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι τα **a** και **b** έχουν την ίδια κατεύθυνση και το ίδιο μήκος (ή «μέτρο»).

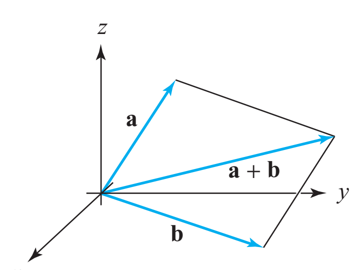
Γεωμετρικά, ορίζουμε την πρόσθεση διανυσμάτων ως εξής: Στο επίπεδο που περιέχει τα διανύσματα $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ και $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ (βλ. Σχήμα 1.1.5), σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο που έχει ως μία του πλευρά το **a** και ως προσκείμενη σε αυτήν πλευρά το **b**. Το άθροισμα $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ είναι το κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα που συμπίπτει με τη διαγώνιο του παραλληλογράμμου.

Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, αυτή η γεωμετρική εικόνα της πρόσθεσης διανυσμάτων είναι χρήσιμη σε πολλές φυσικές καταστάσεις. Ένα παράδειγμα που μπορούμε να φανταστούμε εύκολα είναι ένα πουλί ή ένα αεροπλάνο που πετάει στον αέρα με ταχύτητα $\mathbf{v}_1$, αλλά παρουσία ανέμου ταχύτητας $\mathbf{v}_2$. Αυτό που παρατηρούμε είναι η συνολική ταχύτητα $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ (βλ. Σχήμα 1.1.6).

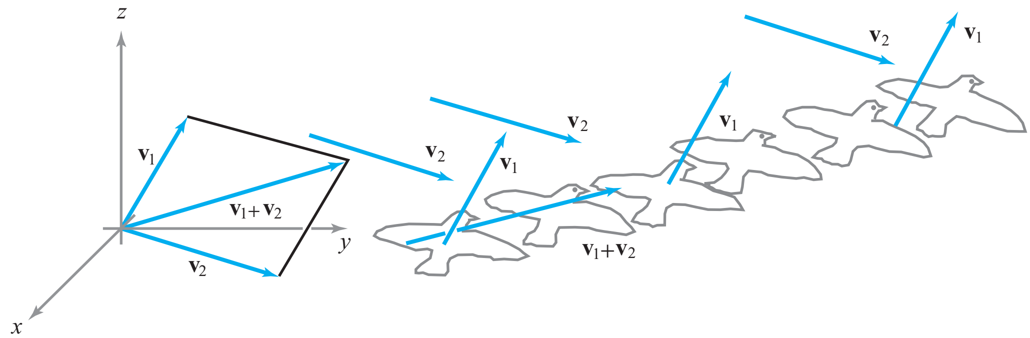
Για να δείξουμε ότι ο γεωμετρικός ορισμός της πρόσθεσης είναι συνεπής με τον αλγεβρικό ορισμό, αποδεικνύουμε ότι $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$. Θα αποδείξουμε




Σχήμα 1.1.4 Γεωμετρικά, σκεφτόμαστε τα διανύσματα ως βέλη που ξεκινούν από την αρχή των αξόνων.




Σχήμα 1.1.5 Η γεωμετρία της πρόσθεσης διανυσμάτων.

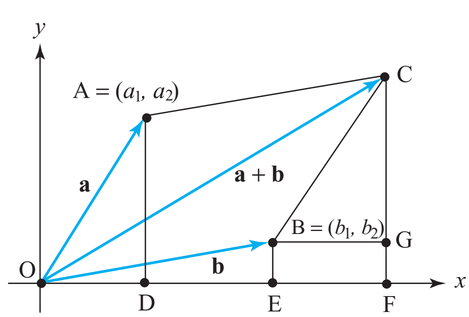



Σχήμα 1.1.6 Μια φυσική ερμηνεία της πρόσθεσης διανυσμάτων.

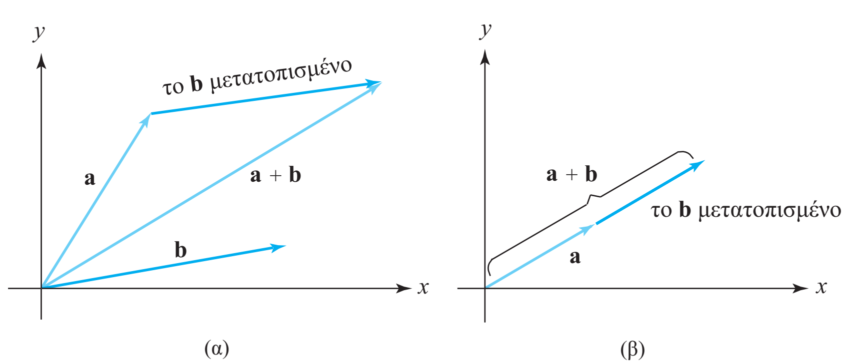
αυτό το αποτέλεσμα στο επίπεδο και θα αφήσουμε την απόδειξη για τον τριδιάστατο χώρο στον αναγνώστη. Θέλουμε δηλαδή να δείξουμε ότι αν $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ και $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, τότε $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

Στο Σχήμα 1.1.7, έστω $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ το διάνυσμα το οποίο καταλήγει στο σημείο A και έστω $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ το διάνυσμα το οποίο καταλήγει στο σημείο B. Εξ ορισμού, το διάνυσμα $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ καταλήγει στην κορυφή C του παραλληλογράμμου OBCA. Για να επαληθεύσουμε ότι $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, αρκεί να δείξουμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου C είναι $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$. Οι πλευρές των τριγώνων OAD και BCG είναι παράλληλες και οι πλευρές OA και BC έχουν ίσο μήκος, το οποίο γράφουμε ως $\mathrm{OA} = \mathrm{BC}$. Αυτά τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα $\mathrm{BG} = \mathrm{OD}$, και αφού το BGFE είναι ορθογώνιο, $\mathrm{EF} = \mathrm{BG}$. Όμως $\mathrm{OD} = a_1$ και $\mathrm{OE} = b_1$, άρα $\mathrm{EF} = \mathrm{BG} = \mathrm{OD} = a_1$. Αφού $\mathrm{OF} = \mathrm{EF} + \mathrm{OE}$, έπεται ότι $\mathrm{OF} = a_1 + b_1$. Άρα αποδείξαμε ότι η συντεταγμένη $x$ του $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ είναι $a_1 + b_1$. Η απόδειξη ότι η συντεταγμένη $y$ είναι $a_2 + b_2$ είναι παρόμοια. Στον παραπάνω συλλογισμό υποθέσαμε ότι τα A και B βρίσκονται στο πρώτο τεταρτημόριο, αλλά αντίστοιχοι συλλογισμοί ισχύουν και για τα άλλα τεταρτημόρια.

Στο Σχήμα 1.1.8(α) παρουσιάζεται ένας άλλος τρόπος θεώρησης της πρόσθεσης διανυσμάτων, με χρήση τριγώνων αντί παραλληλογράμμων. Συγκεκριμένα, μετατοπίζουμε (χωρίς περιστροφή) το κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα που αναπαριστά το διάνυσμα $\mathbf{b}$ έτσι




Σχήμα 1.1.7 Η κατασκευή που χρησιμοποιήσαμε για να αποδείξουμε ότι $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.




Σχήμα 1.1.8 (α) Μπορούμε να αναπαραστήσουμε την πρόσθεση διανυσμάτων χρησιμοποιώντας είτε τρίγωνα είτε παραλληλόγραμμα. (β) Το τρίγωνο εκφυλίζεται σε ευθύγραμμο τμήμα όταν τα **a** και **b** είναι συνευθειακά.

ώστε να ξεκινά από το πέρας του διανύσματος **a**. Το πέρας του κατευθυνόμενου ευθύγραμμου τμήματος που προκύπτει είναι το πέρας του διανύσματος $\mathbf{a}+\mathbf{b}$. Παρατηρούμε ότι όταν τα **a** και **b** είναι συνευθειακά, το τρίγωνο εκφυλίζεται σε ευθύγραμμο τμήμα, όπως στο Σχήμα 1.1.8(β).

Στο Σχήμα 1.1.8 τοποθετήσαμε τα **a** και **b** *κεφαλή με ουρά*, δηλαδή τοποθετήσαμε την ουρά του **b** στην κεφαλή του **a**, και το διάνυσμα $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ πηγαίνει από την ουρά του **a** ώς την κεφαλή του **b**. Αν το κάνουμε με την αντίθετη σειρά, $\mathbf{b}+\mathbf{a}$, παίρνουμε το ίδιο διάνυσμα κινούμενοι κατά μήκος των άλλων πλευρών του παραλληλογράμμου. Όπως στο συγκεκριμένο σχήμα, είναι χρήσιμο να επιτρέπουμε στα διανύσματα να «ολισθαίνουν» διατηρώντας το ίδιο μέτρο και κατεύθυνση. Μάλιστα, θέλουμε να θεωρούμε ότι δύο διανύσματα είναι *ίδια* αν έχουν το ίδιο μέτρο και κατεύθυνση. Όταν επιμένουμε τα διανύσματα να ξεκινούν από την αρχή των αξόνων, λέμε ότι έχουμε ***δεσμευμένα διανύσματα***. Αν επιτρέπουμε στα διανύσματα να ξεκινούν από άλλα σημεία, μιλάμε για ***ελεύθερα διανύσματα*** ή απλά για ***διανύσματα***.

**Διανύσματα** Τα διανύσματα (που καλούνται επίσης *ελεύθερα διανύσματα*) είναι κατευθυνόμενα ευθύγραμμα τμήματα [στο επίπεδο ή] στον χώρο που αναπαριστώνται με κατευθυνόμενα ευθύγραμμα τμήματα με μια αρχή (ουρά) και ένα πέρας (κεφαλή). Τα κατευθυνόμενα ευθύγραμμα τμήματα που προκύπτουν από άλλα με παράλληλη μετατόπιση (αλλά όχι περιστροφή) αναπαριστούν το ίδιο διάνυσμα.

Οι συνιστώσες $(a_1, a_2, a_3)$ του **a** είναι τα (προσημασμένα) μήκη των προβολών του **a** επί των τριών αξόνων συντεταγμένων· ισοδύναμα, ορίζουμε τις συντεταγμένες του **a** τοποθετώντας την ουρά του **a** στην αρχή των αξόνων και θεωρώντας κεφαλή το σημείο $(a_1, a_2, a_3)$. Γράφουμε $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Προσθέτουμε δύο διανύσματα τοποθετώντας τα κεφαλή με ουρά και σχεδιάζοντας το διάνυσμα από την ουρά του πρώτου ώς την κεφαλή του δεύτερου, όπως στο Σχήμα 1.1.8.

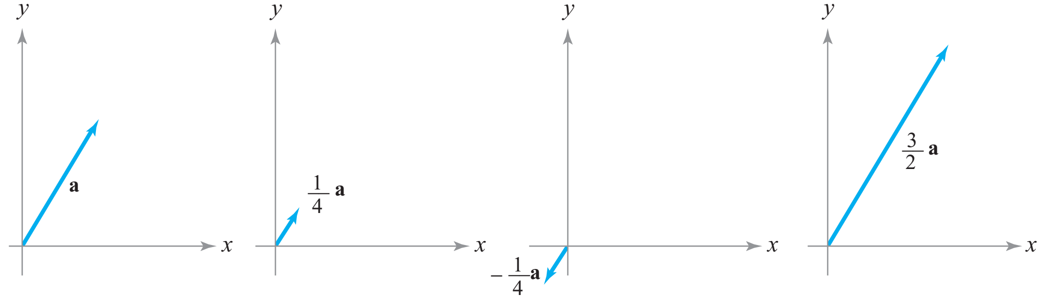
Μπορούμε να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό διανυσμάτων. Αν $\alpha$ είναι ένας πραγματικός αριθμός και **a** ένα διάνυσμα, ορίζουμε το $\alpha\mathbf{a}$ ως το διάνυσμα που έχει $|\alpha|$ φορές το μήκος του **a** και την ίδια κατεύθυνση με το **a** αν $\alpha > 0$, και την αντίθετη κατεύθυνση αν $\alpha < 0$. Στο Σχήμα 1.1.9 παρουσιάζονται διάφορα παραδείγματα.

Χρησιμοποιώντας έναν συλλογισμό βασισμένο στα όμοια τρίγωνα, διαπιστώνουμε ότι αν $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ και $\alpha$ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε

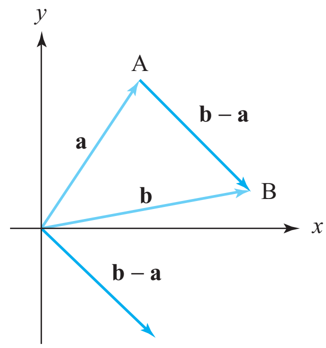
$$\alpha\mathbf{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3).$$

Άρα ο γεωμετρικός ορισμός συμπίπτει με τον αλγεβρικό.

Δεδομένων δύο διανυσμάτων **a** και **b**, πώς αναπαριστούμε γεωμετρικά το διάνυσμα $\mathbf{b}-\mathbf{a}$, δηλαδή ποια είναι η γεωμετρία της αφαίρεσης διανυσμάτων; Επειδή $\mathbf{a}+(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \mathbf{b}$, το $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ είναι το διάνυσμα που προσθέτουμε στο **a** για να πάρουμε το **b**. Από αυτό μπο-



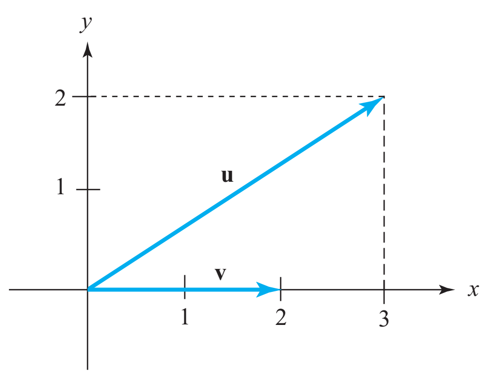

Σχήμα 1.1.9 Μερικά βαθμωτά πολλαπλάσια ενός διανύσματος **a**.




Σχήμα 1.1.10 Η γεωμετρία της αφαίρεσης διανυσμάτων.

ρούμε να συμπεράνουμε ότι το $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ είναι το διάνυσμα που είναι παράλληλο, και έχει το ίδιο μέτρο, με το κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινάει από το πέρας του $\mathbf{a}$ και καταλήγει στο πέρας του $\mathbf{b}$, όταν τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ ξεκινούν από το ίδιο σημείο (βλ. Σχήμα 1.1.10).

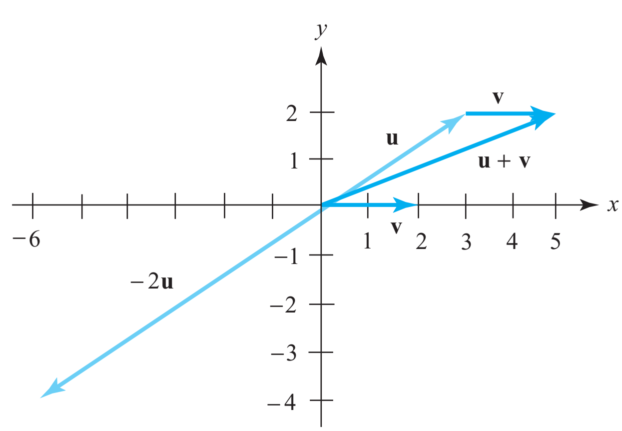
**Παράδειγμα 4** Έστω $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ τα διανύσματα που παρουσιάζονται στο Σχήμα 1.1.11. Σχεδιάστε τα δύο διανύσματα $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ και $-2\mathbf{u}$. Ποιες είναι οι συνιστώσες τους;




Σχήμα 1.1.11 Βρείτε τα $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ και $-2\mathbf{u}$.

**Λύση** Τοποθετούμε την ουρά του $\mathbf{v}$ στην κεφαλή του $\mathbf{u}$, οπότε προκύπτει το διάνυσμα που παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.1.12.

Το διάνυσμα $-2\mathbf{u}$, που παρουσιάζεται στο ίδιο σχήμα, έχει διπλάσιο μήκος από το $\mathbf{u}$ και αντίθετη κατεύθυνση. Όπως φαίνεται στο σχήμα, το διάνυσμα $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ έχει συνιστώσες $(5,2)$, ενώ το $-2\mathbf{u}$ έχει συνιστώσες $(-6,-4)$.




Σχήμα 1.1.12 Υπολογισμός των $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ και $-2\mathbf{u}$.

▲

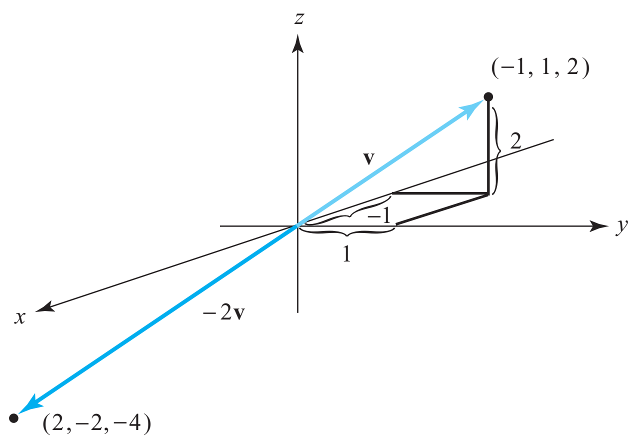
**Παράδειγμα 5**

(α) Σχεδιάστε το $-2\mathbf{v}$, όπου το $\mathbf{v}$ έχει συνιστώσες $(-1, 1, 2)$.

(β) Αν $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$ είναι δύο τυχόντα διανύσματα, δείξτε ότι τα $\mathbf{v} - \frac{1}{3}\mathbf{w}$ και $3\mathbf{v} - \mathbf{w}$ είναι παράλληλα.

**Λύση**

(α) Το διάνυσμα $-2\mathbf{v}$ έχει διπλάσιο μήκος από το $\mathbf{v}$, αλλά αντίθετη κατεύθυνση (βλ. Σχήμα 1.1.13).




Σχήμα 1.1.13 Πολλαπλασιασμός του $(-1, 1, 2)$ με $-2$.

(β) $\mathbf{v} - \frac{1}{3}\mathbf{w} = \frac{1}{3}(3\mathbf{v} - \mathbf{w})$. Τα διανύσματα που είναι πολλαπλάσια το ένα του άλλου είναι παράλληλα. ▲

## Τα διανύσματα της συνήθους βάσης

Για να περιγράφουμε διανύσματα στον χώρο, είναι βολικό να ορίσουμε τρία ειδικά διανύσματα επί των αξόνων $x$, $y$ και $z$:

$\mathbf{i}$: το διάνυσμα με συνιστώσες $(1, 0, 0)$

$\mathbf{j}$: το διάνυσμα με συνιστώσες $(0, 1, 0)$

$\mathbf{k}$: το διάνυσμα με συνιστώσες $(0, 0, 1)$.

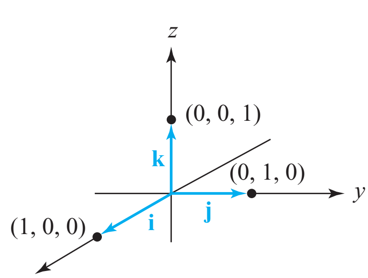
Αυτά τα ***διανύσματα της συνήθους βάσης*** παρουσιάζονται στο Σχήμα 1.1.14. Στο επίπεδο έχουμε τη συνήθη βάση $\mathbf{i}$ και $\mathbf{j}$, με συνιστώσες $(1, 0)$ και $(0, 1)$.

Αν $\mathbf{a}$ είναι οποιοδήποτε διάνυσμα και $(a_1, a_2, a_3)$ οι συνιστώσες του, τότε

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k},$$

διότι οι συνιστώσες του δεξιού μέλος είναι

$$\begin{aligned} a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1) &= (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) \\ &= (a_1, a_2, a_3). \end{aligned}$$




Σχήμα 1.1.14 Τα διανύσματα της συνήθους βάσης.

Άρα μπορούμε να εκφράσουμε κάθε διάνυσμα ως ένα άθροισμα βαθμωτών πολλαπλάσιων των $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$.

**Τα διανύσματα της συνήθους βάσης**

1. Τα διανύσματα $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ είναι μοναδιαία διανύσματα επί των τριών αξόνων συντεταγμένων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1.14.
2. Αν το $\mathbf{a}$ έχει συνιστώσες $(a_1, a_2, a_3)$, τότε

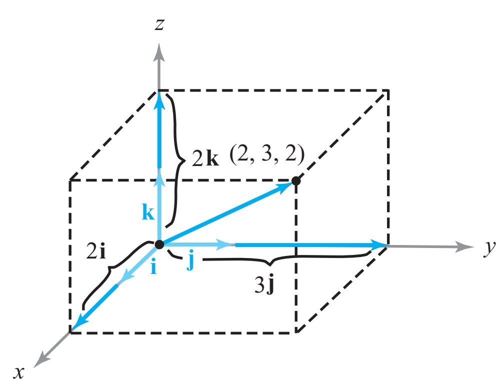
$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}.$$

**Παράδειγμα 6** Εκφράστε το διάνυσμα με συνιστώσες $(e, \pi, -\sqrt{3})$ συναρτήσει της συνήθους βάσης.

**Λύση** Θέτοντας $a_1 = e$, $a_2 = \pi$ και $a_3 = -\sqrt{3}$ στην $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, παίρνουμε

$$\mathbf{v} = e\mathbf{i} + \pi\mathbf{j} - \sqrt{3}\mathbf{k}.$$ ▲

**Παράδειγμα 7** Το διάνυσμα $(2, 3, 2)$ ισούται με $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, ενώ το διάνυσμα $(0, -1, 4)$ είναι το $-\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Στο Σχήμα 1.1.15 παρουσιάζεται το $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$· αφήνουμε στον αναγνώστη να συμπληρώσει το σχήμα σχεδιάζοντας το διάνυσμα $-\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. ▲



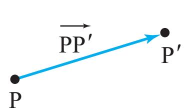

Σχήμα 1.1.15 Αναπαράσταση του $(2, 3, 2)$ συναρτήσει των διανυσμάτων της συνήθους βάσης $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$.

Η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός μπορούν να γραφτούν με χρήση των διανυσμάτων της συνήθους βάσης ως εξής:

$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) + (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j} + (a_3 + b_3)\mathbf{k}$$

και

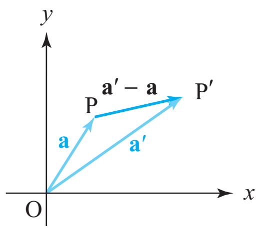
$$\alpha(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) = (\alpha a_1)\mathbf{i} + (\alpha a_2)\mathbf{j} + \alpha(a_3)\mathbf{k}.$$




Σχήμα 1.1.16 Το διάνυσμα που ξεκινά από το P και καταλήγει στο P′ συμβολίζεται με $\overrightarrow{PP'}$.

## Το διάνυσμα που ενώνει δύο σημεία

Για να μπορούμε να χρησιμοποιούμε τα διανύσματα σε γεωμετρικά προβλήματα, είναι χρήσιμο να αντιστοιχίσουμε ένα διάνυσμα σε ένα *ζεύγος* σημείων του επιπέδου ή του χώρου ως εξής: δεδομένων δύο σημείων P και P′, μπορούμε να σχεδιάσουμε το διάνυσμα $\mathbf{v}$ με ουρά το P και κεφαλή το P′, όπως στο Σχήμα 1.1.16, όπου έχουμε γράψει το $\mathbf{v}$ ως $\overrightarrow{PP'}$.




Σχήμα 1.1.17
$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP}$.

Αν $P = (x, y, z)$ και $P' = (x', y', z')$, τότε τα διανύσματα που ξεκινούν από την αρχή των αξόνων και καταλήγουν στο P και στο P′ είναι τα $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ και $\mathbf{a}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$, αντίστοιχα, επομένως το διάνυσμα $\overrightarrow{PP'}$ είναι η διαφορά $\mathbf{a}' - \mathbf{a} = (x' - x)\mathbf{i} + (y' - y)\mathbf{j} + (z' - z)\mathbf{k}$. (Βλ. Σχήμα 1.1.17.)

**Το διάνυσμα που ενώνει δύο σημεία** Αν το σημείο P έχει συντεταγμένες $(x, y, z)$ και το P′ έχει συντεταγμένες $(x', y', z')$, τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{PP'}$ που ξεκινά από το P και καταλήγει στο P′ έχει συνιστώσες $(x' - x, y' - y, z' - z)$.

**Παράδειγμα 8**

(α) Βρείτε τις συνιστώσες του διανύσματος που ξεκινά από το $(3, 5)$ και καταλήγει στο $(4, 7)$.

(β) Προσθέστε το διάνυσμα $\mathbf{v}$ που ξεκινά από το $(-1, 0)$ και καταλήγει στο $(2, -3)$ με το διάνυσμα $\mathbf{w}$ που ξεκινά από το $(2, 0)$ και καταλήγει στο $(1, 1)$.

(γ) Πολλαπλασιάστε το διάνυσμα $\mathbf{v}$ του ερωτήματος (β) με 8. Αν το διάνυσμα που προκύπτει αναπαριστάται με ένα κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινά από το $(5, 6)$ και καταλήγει στο Q, ποιο είναι το Q;

**Λύση**

(α) Όπως αναφέρεται στο προηγούμενο πλαίσιο, αφαιρούμε τα διατεταγμένα ζεύγη: $(4, 7) - (3, 5) = (1, 2)$. Άρα οι ζητούμενες συνιστώσες είναι $(1, 2)$.

(β) Το διάνυσμα $\mathbf{v}$ έχει συνιστώσες $(2, -3) - (-1, 0) = (3, -3)$, ενώ το $\mathbf{w}$ έχει συνιστώσες $(1, 1) - (2, 0) = (-1, 1)$. Άρα το διάνυσμα $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ έχει συνιστώσες $(3, -3) + (-1, 1) = (2, -2)$.

(γ) Το διάνυσμα $8\mathbf{v}$ έχει συνιστώσες $8(3, -3) = (24, -24)$. Αν αναπαραστήσουμε αυτό το διάνυσμα με το κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινά από το $(5, 6)$ και καταλήγει στο Q, και το Q έχει συντεταγμένες $(x, y)$, τότε $(x, y) - (5, 6) = (24, -24)$, άρα $(x, y) = (5, 6) + (24, -24) = (29, -18)$. ▲

**Παράδειγμα 9**

Έστω $P = (-2, -1)$, $Q = (-3, -3)$ και $R = (-1, -4)$ στο επίπεδο $xy$.

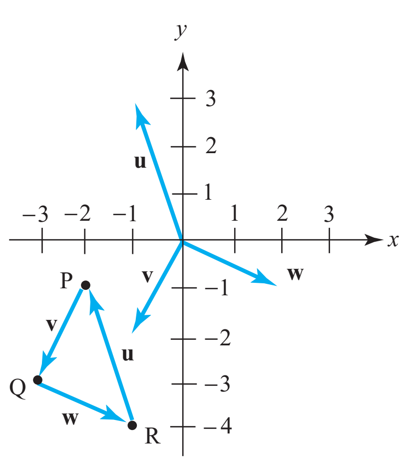
(α) Σχεδιάστε τα εξής διανύσματα: το $\mathbf{v}$ που ενώνει το P με το Q, το $\mathbf{w}$ που ενώνει το Q με το R, το $\mathbf{u}$ που ενώνει το R με το P.

(β) Ποιες είναι οι συνιστώσες των $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ και $\mathbf{u}$;

(γ) Ποιο είναι το $\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{u}$;

**Λύση**

(α) Βλ. Σχήμα 1.1.18.




Σχήμα 1.1.18 Το διάνυσμα **v** ενώνει το P με το Q, το **w** ενώνει το Q με το R, και το **u** ενώνει το R με το P.

(β) Επειδή $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$, $\mathbf{w} = \overrightarrow{QR}$ και $\mathbf{u} = \overrightarrow{RP}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (-3,-3) - (-2,-1) = (-1,-2),\\ \mathbf{w} &= (-1,-4) - (-3,-3) = (2,-1),\\ \mathbf{u} &= -(-1,-4) + (-2,-1) = (-1,3).\end{aligned}$$

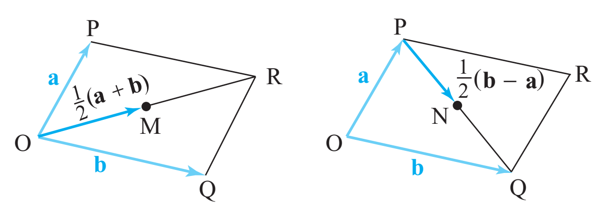
(γ) $\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{u} = (-1,-2) + (2,-1) + (-1,3) = (0,0)$. ▲

## Γεωμετρικά θεωρήματα με χρήση διανυσματικών μεθόδων

Πολλά από τα θεωρήματα της επιπεδομετρίας μπορούν να αποδειχθούν με χρήση διανυσματικών μεθόδων. Ακολουθεί ένα παράδειγμα.

**Παράδειγμα 10** Χρησιμοποιώντας διανύσματα αποδείξτε ότι οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούν η μία την άλλη.

**Λύση** Έστω OPRQ το παραλληλόγραμμο με δύο προσκείμενες πλευρές που αναπαριστώνται από τα διανύσματα $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP}$ και $\mathbf{b} = \overrightarrow{OQ}$. Έστω M το μέσο της διαγωνίου OR και έστω N το μέσο της άλλης διαγωνίου PQ. (Βλ. Σχήμα 1.1.19.)




Σχήμα 1.1.19 Αν τα μέσα M και N συμπίπτουν, τότε οι διαγώνιοι OR και PQ διχοτομούν η μία την άλλη.

Σύμφωνα με τον κανόνα του παραλληλογράμμου για την πρόσθεση διανυσμάτων, $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, άρα $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$. Από την άλλη πλευρά,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \mathbf{b} - \mathbf{a}, \qquad \text{άρα} \qquad \overrightarrow{PN} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a}),$$

και συνεπώς

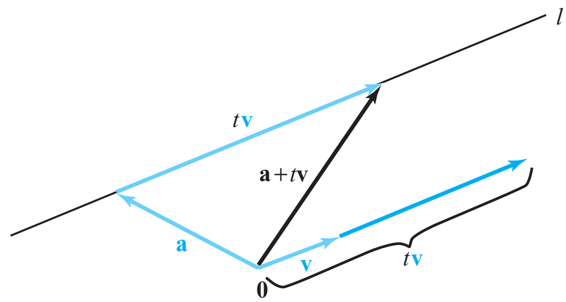
$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} = \mathbf{a} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}).$$

Επειδή τα $\overrightarrow{OM}$ και $\overrightarrow{ON}$ είναι ίσα διανύσματα, τα σημεία M και N συμπίπτουν, επομένως οι διαγώνιοι διχοτομούν η μία την άλλη. ▲

## Εξισώσεις ευθειών

Τα επίπεδα και οι ευθείες είναι γεωμετρικά αντικείμενα που μπορούν να αναπαρασταθούν με εξισώσεις. Θα μελετήσουμε τις εξισώσεις που αναπαριστούν επίπεδα στην Ενότητα 1.3. Ωστόσο, χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική ερμηνεία της πρόσθεσης διανυσμάτων και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό, σε αυτό το σημείο θα βρούμε την *εξίσωση μιας ευθείας $l$ που διέρχεται από το πέρας ενός διανύσματος* $\mathbf{a}$ και έχει *τη διεύθυνση ενός διανύσματος* $\mathbf{v}$ (βλ. Σχήμα 1.1.20)· δηλαδή η ευθεία $l$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\mathbf{v}$.

Καθώς το $t$ παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές, τα σημεία της μορφής $t\mathbf{v}$ είναι όλα τα βαθμωτά πολλαπλάσια του διανύσματος $\mathbf{v}$, και συνεπώς εξαντλούν τα σημεία της ευθείας *που διέρχεται από την αρχή των αξόνων* και έχει τη διεύθυνση του $\mathbf{v}$. Επειδή κάθε σημείο




Σχήμα 1.1.20 Η ευθεία $l$, που δίνεται παραμετρικά από την $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$, έχει τη διεύθυνση του $\mathbf{v}$ και διέρχεται από το πέρας του $\mathbf{a}$.

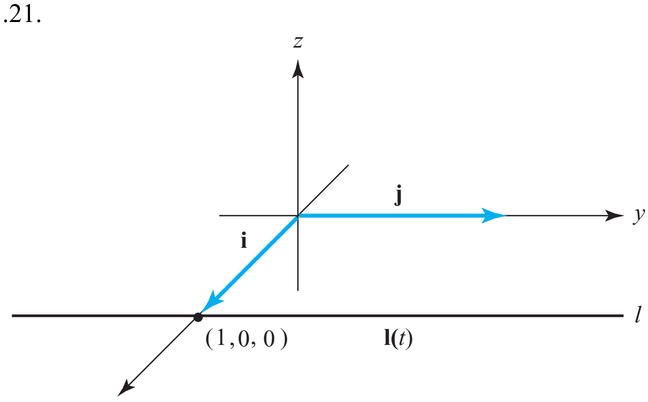
της $l$ είναι το άκρο της διαγωνίου ενός παραλληλογράμμου με πλευρές τα $\mathbf{a}$ και $t\mathbf{v}$ για κάποια πραγματική τιμή του $t$, όλα τα σημεία της $l$ είναι της μορφής $\mathbf{a} + t\mathbf{v}$. Επομένως, η ευθεία $l$ μπορεί να αναπαρασταθεί από την εξίσωση $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$. Λέμε ότι η $l$ δίνεται ***παραμετρικά***, με παράμετρο το $t$. Για $t = 0$, $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a}$. Καθώς το $t$ αυξάνεται, το σημείο $\mathbf{l}(t)$ απομακρύνεται από το $\mathbf{a}$ κατά την κατεύθυνση του $\mathbf{v}$. Καθώς το $t$ μειώνεται σε σχέση με την τιμή $t = 0$ και παίρνει αρνητικές τιμές, το $\mathbf{l}(t)$ απομακρύνεται από το $\mathbf{a}$ κατά την κατεύθυνση του $-\mathbf{v}$.

**Εξίσωση ευθείας που διέρχεται από συγκεκριμένο σημείο και έχει συγκεκριμένη διεύθυνση** Η εξίσωση της ευθείας $l$ που διέρχεται από το πέρας του $\mathbf{a}$ και έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{v}$ είναι $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$, όπου η παράμετρος $t$ παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές. Σε μορφή συντεταγμένων, έχουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} x &= x_1 + at, \\ y &= y_1 + bt, \\ z &= z_1 + ct, \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ και $\mathbf{v} = (a, b, c)$. Για τις ευθείες του επιπέδου $xy$, απλώς παραλείπουμε τη συνιστώσα $z$.

**Παράδειγμα 11** Βρείτε την εξίσωση της ευθείας $l$ που διέρχεται από το $(1, 0, 0)$ και έχει τη διεύθυνση του $\mathbf{j}$. Βλ. Σχήμα 1.1.21.




Σχήμα 1.1.21 Η ευθεία $l$ διέρχεται από το πέρας του $\mathbf{i}$ και έχει τη διεύθυνση του $\mathbf{j}$.

**Λύση** Η ζητούμενη ευθεία μπορεί να γραφτεί παραμετρικά ως $\mathbf{l}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j}$. Σε μορφή συντεταγμένων,

$$\mathbf{l}(t) = (1, 0, 0) + t(0, 1, 0) = (1, t, 0).$$

▲

**Παράδειγμα 12**

(α) Βρείτε τις εξισώσεις της ευθείας του χώρου που διέρχεται από το σημείο $(3, -1, 2)$ και έχει τη διεύθυνση του $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

(β) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $(1, -6)$ και έχει τη διεύθυνση του $5\mathbf{i} - \pi\mathbf{j}$.

(γ) Ποια είναι η διεύθυνση της ευθείας $x = -3t + 2$, $y = -2(t - 1)$, $z = 8t + 2$;

**Λύση**

(α) Έχουμε $\mathbf{a} = (3, -1, 2) = (x_1, y_1, z_1)$ και $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, άρα $a = 2$, $b = -3$ και $c = 4$. Σύμφωνα με το προηγούμενο πλαίσιο, οι εξισώσεις είναι οι

$$x = 3 + 2t, \qquad y = -1 - 3t, \qquad z = 2 + 4t.$$

(β) Έχουμε $\mathbf{a} = (1, -6)$ και $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - \pi\mathbf{j}$, άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η

$$\mathbf{l}(t) = (1, -6) + (5t, -\pi t) = (1 + 5t, -6 - \pi t),$$

δηλαδή

$$x = 1 + 5t, \qquad y = -6 - \pi t.$$

(γ) Στηριζόμενοι στο προηγούμενο πλαίσιο, κατασκευάζουμε το διάνυσμα $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ από τους συντελεστές του $t$: $a = -3$, $b = -2$, $c = 8$. Άρα η ευθεία έχει τη διεύθυνση του $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$. ▲

**Παράδειγμα 13**

Τέμνονται οι δύο ευθείες $(x, y, z) = (t, -6t + 1, 2t - 8)$ και $(x, y, z) = (3t + 1, 2t, 0)$;

**Λύση**

Αν οι ευθείες τέμνονται, πρέπει να υπάρχουν αριθμοί $t_1$ και $t_2$ για τους οποίους τα αντίστοιχα σημεία να είναι ίσα:

$$(t_1, -6t_1 + 1, 2t_1 - 8) = (3t_2 + 1, 2t_2, 0),$$

δηλαδή οι $t_1$ και $t_2$ να ικανοποιούν και τις τρεις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} t_1 &= 3t_2 + 1, \\ -6t_1 + 1 &= 2t_2, \\ 2t_1 - 8 &= 0. \end{aligned}$$

Από την τρίτη εξίσωση, $t_1 = 4$, οπότε η πρώτη εξίσωση γίνεται $4 = 3t_2 + 1$, δηλαδή $t_2 = 1$. Πρέπει να ελέγξουμε αν αυτές οι τιμές ικανοποιούν τη μεσαία εξίσωση:

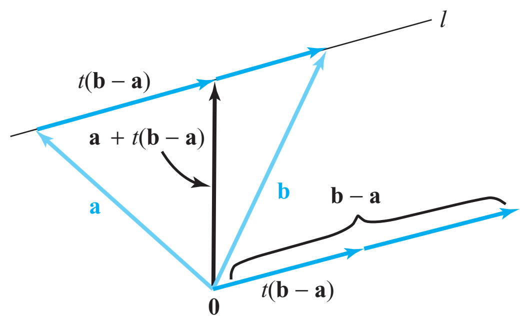
$$-6t_1 + 1 \overset{;}{=} 2t_2.$$

Αφού $t_1 = 4$ και $t_2 = 1$, αυτό γράφεται

$$-24 + 1 \overset{;}{=} 2,$$

που δεν ισχύει, άρα οι ευθείες δεν τέμνονται. ▲

*Προσέξτε ότι μπορεί να υπάρχουν πολλές διαφορετικές εξισώσεις για την ίδια ευθεία.* Κάποιες από αυτές προκύπτουν αν επιλέξουμε, αντί του $\mathbf{a}$, κάποιο διαφορετικό σημείο της δεδομένης ευθείας και σχηματίσουμε την παραμετρική εξίσωση της ευθείας που ξεκινάει από αυτό το σημείο και έχει τη διεύθυνση του $\mathbf{v}$. Για παράδειγμα, το πέρας του $\mathbf{a} + \mathbf{v}$ βρίσκεται επί της ευθείας $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$, επομένως η $\mathbf{l}_1(t) = (\mathbf{a} + \mathbf{v}) + t\mathbf{v}$ αναπαριστά την ίδια ευθεία. Μπορούμε να βρούμε και άλλες εξισώσεις παρατηρώντας ότι, αν $\alpha \neq 0$, το διάνυσμα $\alpha\mathbf{v}$ έχει την ίδια (ή αντίθετη) κατεύθυνση με το $\mathbf{v}$. Επομένως, η $\mathbf{l}_2(t) = \mathbf{a} + t\alpha\mathbf{v}$




Σχήμα 1.1.22 Η ευθεία $l$, που δίνεται παραμετρικά από την $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1-t)\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}$, διέρχεται από τα πέρατα των **a** και **b**.

είναι μια ακόμη εξίσωση της ευθείας $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$.

Για παράδειγμα, οι $\mathbf{l}(t) = (1,0,0) + (t,t,0)$ και $\mathbf{l}_1(s) = (0,-1,0) + (s,s,0)$ αναπαριστούν αμφότερες την ίδια ευθεία, αφού και οι δύο έχουν τη διεύθυνση του $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ και διέρχονται από το σημείο $(1,0,0)$· η $\mathbf{l}$ διέρχεται από το $(1,0,0)$ για $t = 0$, ενώ η $\mathbf{l}_1$ διέρχεται από το $(1,0,0)$ για $s = 1$.

Επομένως, η εξίσωση μιας ευθείας δεν ορίζεται με μοναδικό τρόπο. Παρόλα αυτά, συνηθίζεται να χρησιμοποιούμε τον όρο «η εξίσωση μιας ευθείας». Έχοντας αυτό υπόψη, ας υπολογίσουμε *την εξίσωση μιας ευθείας που διέρχεται από τα πέρατα δύο δεδομένων διανυσμάτων* **a** *και* **b**. Επειδή το διάνυσμα $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ είναι παράλληλο στο κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινά από το **a** και καταλήγει στο **b**, υπολογίζουμε την παραμετρική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το **a** και έχει τη διεύθυνση του $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ (Σχήμα 1.1.22). Επομένως,

$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \qquad \text{δηλαδή} \qquad \mathbf{l}(t) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}.$$

Καθώς το $t$ αυξάνεται από 0 σε 1, το $t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ ξεκινά ως το μηδενικό διάνυσμα και αυξάνεται σε μήκος (διατηρώντας την κατεύθυνση του $\mathbf{b} - \mathbf{a}$) μέχρις ότου, για $t = 1$, γίνει το διάνυσμα $\mathbf{b}-\mathbf{a}$. Επομένως, για $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})$, καθώς το $t$ αυξάνεται από 0 σε 1, το διάνυσμα $\mathbf{l}(t)$ κινείται από το πέρας του **a** ώς το πέρας του **b** κατά μήκος του κατευθυνόμενου ευθύγραμμου τμήματος που ξεκινά από το **a** και καταλήγει στο **b**.

Αν $\mathrm{P} = (x_1, y_1, z_1)$ είναι το πέρας του **a** και $\mathrm{Q} = (x_2, y_2, z_2)$ το πέρας του **b**, τότε $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$, οπότε οι εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από τα P και Q είναι

$$\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)t, \\ z &= z_1 + (z_2 - z_1)t, \end{aligned}$$

οι οποίες, με απαλοιφή του $t$, γράφονται ως εξής:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

**Παραμετρική εξίσωση ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία** Οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας $l$ που διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{P} = (x_1, y_1, z_1)$ και $\mathrm{Q} = (x_2, y_2, z_2)$ είναι

$$\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)t, \\ z &= z_1 + (z_2 - z_1)t, \end{aligned}$$

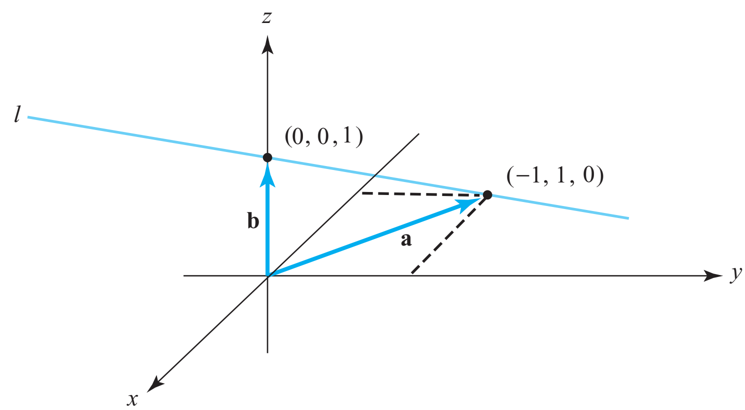
όπου $(x, y, z)$ είναι το γενικό σημείο της $l$ και η παράμετρος $t$ παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές.

**Παράδειγμα 14** Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα $(2, 1, -3)$ και $(6, -1, -5)$.

**Λύση** Με βάση το προηγούμενο πλαίσιο, επιλέγουμε $(x_1, y_1, z_1) = (2, 1, -3)$ και $(x_2, y_2 z_2) = (6, -1, -5)$, άρα οι εξισώσεις είναι

$$\begin{aligned} x &= 2 + (6 - 2)t = 2 + 4t, \\ y &= 1 + (-1 - 1)t = 1 - 2t, \\ z &= -3 + (-5 - (-3))t = -3 - 2t. \end{aligned}$$ ▲

**Παράδειγμα 15** Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα $(-1, 1, 0)$ και (0, 0, 1) (βλ. Σχήμα 1.1.23).




Σχήμα 1.1.23 Εύρεση της εξίσωσης της ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία.

**Λύση** Τα δεδομένα σημεία αναπαριστώνται από τα $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ και $\mathbf{b} = \mathbf{k}$, επομένως

$$\mathbf{l}(t) = (1 - t)(-\mathbf{i} + \mathbf{j}) + t\mathbf{k} = -(1 - t)\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}.$$

Άρα η εξίσωση αυτής της ευθείας γράφεται ως

$$\mathbf{l}(t) = (t - 1)\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j} + t\mathbf{k},$$

ή, ισοδύναμα, αν $\mathbf{l}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,

$$x = t - 1, \qquad y = 1 - t, \qquad z = t.$$ ▲

Για να περιγράψουμε ένα ευθύγραμμο *τμήμα* πρέπει να περιορίσουμε τις τιμές που παίρνει η παράμετρος $t$, όπως στο ακόλουθο παράδειγμα.

**Παράδειγμα 16** Βρείτε την εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία $(1, 1, 1)$ και $(2, 1, 2)$.

**Λύση** Η *ευθεία* που διέρχεται από τα $(1, 1, 1)$ και $(2, 1, 2)$ περιγράφεται παραμετρικά από την $(x, y, z) = (1 + t, 1, 1 + t)$, με το $t$ να παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές. Όταν $t = 0$, το σημείο $(x, y, z)$ είναι το $(1, 1, 1)$, ενώ όταν $t = 1$, το σημείο $(x, y, z)$ είναι το $(2, 1, 2)$. Επομένως, το σημείο $(x, y, z)$ βρίσκεται μεταξύ των $(1, 1, 1)$ και $(2, 1, 2)$ όταν $0 \leq t \leq 1$, άρα το ευθύγραμμο *τμήμα* περιγράφεται από τις εξισώσεις

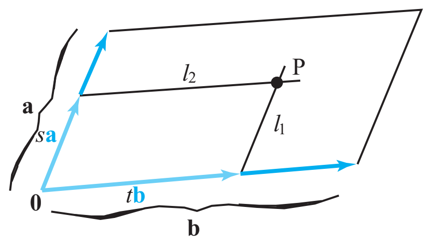
$$\begin{aligned} x &= 1 + t, \\ y &= 1, \\ z &= 1 + t, \end{aligned}$$

μαζί με τις ανισότητες $0 \leq t \leq 1$. ▲

Μπορούμε να περιγράψουμε παραμετρικά και άλλα γεωμετρικά αντικείμενα εκτός από ευθείες.

**Παράδειγμα 17** Περιγράψτε τα σημεία που βρίσκονται εντός του παραλληλογράμμου με προσκείμενες πλευρές τα διανύσματα **a** και **b** με αφετηρία την αρχή των αξόνων (το «εντός» συμπεριλαμβάνει τα σημεία που ανήκουν στις πλευρές του παραλληλογράμμου).

**Λύση** Θεωρούμε το Σχήμα 1.1.24. Αν P είναι οποιοδήποτε σημείο εντός του δεδομένου παραλληλογράμμου και κατασκευάσουμε τις ευθείες $l_1$ και $l_2$ που διέρχονται από το P και είναι παράλληλες στα διανύσματα **a** και **b**, αντίστοιχα, βλέπουμε ότι η $l_1$ τέμνει την πλευρά του παραλληλογράμμου που ορίζει το διάνυσμα **b** σε κάποιο σημείο $t\mathbf{b}$, όπου $0 \leq t \leq 1$. Με αντίστοιχο τρόπο, η $l_2$ τέμνει την πλευρά που ορίζει το διάνυσμα **a** σε κάποιο σημείο $s\mathbf{a}$, όπου $0 \leq s \leq 1$.



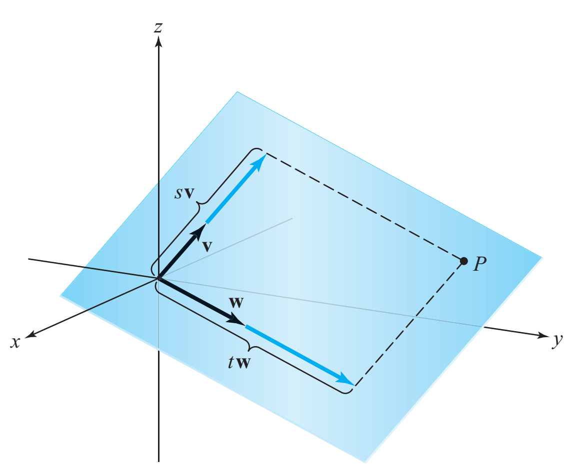

Σχήμα 1.1.24 Περιγραφή των σημείων εντός του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα διανύσματα **a** και **b**, με κορυφή το **0**.

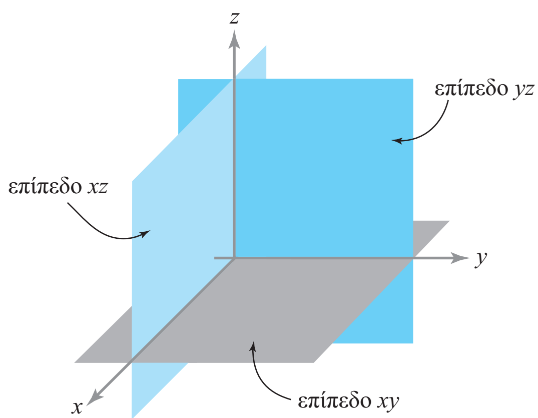
Παρατηρούμε ότι το P είναι το άκρο της διαγωνίου ενός παραλληλογράμμου με προσκείμενες πλευρές τα $s\mathbf{a}$ και $t\mathbf{b}$· επομένως, αν **v** είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, έχουμε $\mathbf{v} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$. Συμπεραίνουμε ότι όλα τα σημεία του δεδομένου παραλληλογράμμου είναι πέρατα διανυσμάτων της μορφής $s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$, για $0 \leq s \leq 1$ και $0 \leq t \leq 1$. Αντιστρέφοντας τα βήματα που ακολουθήσαμε, διαπιστώνουμε ότι όλα τα διανύσματα αυτής της μορφής έχουν πέρας εντός του παραλληλογράμμου. ▲

Όπως δύο διαφορετικές ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων, έτσι και δύο μη παράλληλα διανύσματα ορίζουν ένα επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Χρησιμοποιώντας τον ίδιο συλλογισμό όπως στο Παράδειγμα 17, διαπιστώνουμε ότι το επίπεδο που σχηματίζουν δύο μη παράλληλα διανύσματα **v** και **w** αποτελείται από όλα τα σημεία της μορφής $s\mathbf{v} + t\mathbf{w}$, όπου τα $s$ και $t$ μπορούν να είναι οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί, όπως στο Σχήμα 1.1.25.

Επομένως, περιγράψαμε τα σημεία του επιπέδου με δύο παραμέτρους. Για αυτό τον

Σχήμα 1.1.25 Περιγραφή των σημείων P του επιπέδου που σχηματίζουν τα διανύσματα **v** και **w**.






Σχήμα 1.1.26 Τα τρία επίπεδα συντεταγμένων.

λόγο, λέμε ότι το επίπεδο είναι ***διδιάστατο***. Με αντίστοιχο τρόπο, μια ευθεία καλείται ***μονοδιάστατη*** είτε ανήκει στο επίπεδο είτε στον χώρο είτε είναι η ίδια η ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Το επίπεδο που ορίζουν τα $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$ καλείται το επίπεδο ***που παράγουν*** τα $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$. Όταν το $\mathbf{v}$ είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του $\mathbf{w}$ και $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, τότε τα $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$ είναι παράλληλα και το επίπεδο εκφυλίζεται σε ευθεία. Όταν $\mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{0}$ (δηλαδή και τα δύο είναι μηδενικά διανύσματα), παίρνουμε ένα σημείο.

Υπάρχουν τρία ιδιαίτερα επίπεδα που προκύπτουν φυσικά σε ένα σύστημα συντεταγμένων και θα μας φανούν χρήσιμα στη συνέχεια. Καλούμε το επίπεδο που παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{i}$ και $\mathbf{j}$ επίπεδο $xy$, το επίπεδο που παράγεται από τα $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ επίπεδο $yz$, και το επίπεδο που παράγεται από τα $\mathbf{i}$ και $\mathbf{k}$ επίπεδο $xz$. Τα επίπεδα αυτά παρουσιάζονται στο Σχήμα 1.1.26.

## Ασκήσεις

*(Οι ασκήσεις με έγχρωμη αρίθμηση λύνονται στον Οδηγό μελέτης.)*

*Ολοκληρώστε τους υπολογισμούς στις Ασκήσεις 1 έως 4.*

**1.** $(-21, 23) - (;, 6) = (-25, ;)$

**2.** $3(133, -0{,}33, 0) + (-399, 0{,}99, 0) = (;, ;, ;)$

**3.** $(8a, -2b, 13c) = (52, 12, 11) + \frac{1}{2}(;, ;, ;)$

**4.** $(2, 3, 5) - 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} = (;, ;, ;)$

*Στις Ασκήσεις 5 έως 8, σχεδιάστε τα δεδομένα διανύσματα* $\mathbf{v}$ *και* $\mathbf{w}$. *Σχεδιάστε επίσης τα* $-\mathbf{v}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ *και* $\mathbf{v} - \mathbf{w}$.

**5.** $\mathbf{v} = (2, 1)$ και $\mathbf{w} = (1, 2)$

**6.** $\mathbf{v} = (0, 4)$ και $\mathbf{w} = (2, -1)$

**7.** $\mathbf{v} = (2, 3, -6)$ και $\mathbf{w} = (-1, 1, 1)$

**8.** $\mathbf{v} = (2, 1, 3)$ και $\mathbf{w} = (-2, 0, -1)$

**9.** Έστω $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ και $\mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Σχεδιάστε τα $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, $2\mathbf{w}$ και $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ στο επίπεδο.

**10.** Σχεδιάστε τα $(1, -2, 3)$ και $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -1)$. Γιατί έχουν αντίθετες κατευθύνσεις αυτά τα διανύσματα;

**11.** Ποιοι περιορισμοί πρέπει να επιβληθούν στα $x$, $y$ και $z$ ώστε η τριάδα $(x, y, z)$ να αναπαριστά ένα σημείο του άξονα $y$; Του άξονα $z$; Του επιπέδου $xz$; Του επιπέδου $yz$;

**12.** (α) Γενικεύοντας τη γεωμετρική κατασκευή του Σχήματος 1.1.7, δείξτε ότι αν $\mathbf{v}_1 = (x, y, z)$ και $\mathbf{v}_2 = (x', y', z')$, τότε $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (x + x', y + y', z + z')$.

(β) Χρησιμοποιώντας έναν συλλογισμό βασισμένο στα όμοια τρίγωνα, αποδείξτε ότι $\alpha\mathbf{v} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ όταν $\mathbf{v} = (x, y, z)$.

*Στις Ασκήσεις 13 έως 19, περιγράψτε τα σημεία των αναφερόμενων σχημάτων χρησιμοποιώντας συνολοθεωρητικό ή διανυσματικό συμβολισμό ή και τους δύο.*

**13.** Το επίπεδο που παράγουν τα $\mathbf{v}_1 = (2, 7, 0)$ και $\mathbf{v}_2 = (0, 2, 7)$

**14.** Το επίπεδο που παράγουν τα $\mathbf{v}_1 = (3, -1, 1)$ και $\mathbf{v}_2 = (0, 3, 4)$

**15.** Η ευθεία που διέρχεται από το $(-1, -1, -1)$ και έχει τη διεύθυνση του $\mathbf{j}$

**16.** Η ευθεία που διέρχεται από το $(0, 2, 1)$ και έχει τη διεύθυνση του $2\mathbf{i} - \mathbf{k}$

**17.** Η ευθεία που διέρχεται από τα $(-1, -1, -1)$ και $(1, -1, 2)$

**18.** Η ευθεία που διέρχεται από τα $(-5, 0, 4)$ και $(6, -3, 2)$

**19.** Το παραλληλόγραμμο με προσκείμενες πλευρές τα διανύσματα $\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ και $-2\mathbf{j}$

**20.** Δείξτε ότι οι $\mathbf{l}_1(t) = (1, 2, 3) + t(1, 0, -2)$ και $\mathbf{l}_2(t) = (2, 2, 1) + t(-2, 0, 4)$ αποτελούν παραμετρικοποιήσεις της ίδιας ευθείας.

**21.** Ανήκουν τα σημεία $(2, 3, -4)$, $(2, 1, -1)$ και $(2, 7, -10)$ στην ίδια ευθεία;

**22.** Έστω $\mathbf{u} = (1, 2)$, $\mathbf{v} = (-3, 4)$ και $\mathbf{w} = (5, 0)$.

(α) Σχεδιάστε αυτά τα διανύσματα στον $\mathbb{R}^2$.

(β) Βρείτε πραγματικούς αριθμούς $\lambda_1$ και $\lambda_2$ τέτοιους ώστε $\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{v}$.

**23.** Έστω ότι A, B και C είναι οι κορυφές ενός τριγώνου. Βρείτε το $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}}$.

**24.** Βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας $x = 3 + 2t$, $y = 7 + 8t$, $z = -2 + t$, δηλαδή της $\mathbf{l}(t) = (3 + 2t, 7 + 8t, -2 + t)$, με τα επίπεδα συντεταγμένων.

**25.** Δείξτε ότι δεν υπάρχουν σημεία $(x, y, z)$ που να ικανοποιούν την $2x - 3y + z - 2 = 0$ και να ανήκουν στην ευθεία $\mathbf{v} = (2, -2, -1) + t(1, 1, 1)$.

**26.** Δείξτε ότι όλα τα σημεία της ευθείας $\mathbf{v} = (1, -1, 2) + t(2, 3, 1)$ ικανοποιούν την εξίσωση $5x - 3y - z - 6 = 0$.

**27.** Ελέγξτε αν τέμνονται οι ευθείες $x = 3t + 2$, $y = t - 1$, $z = 6t + 1$ και $x = 3s - 1$, $y = s - 2$, $z = s$.

**28.** Τέμνονται οι ευθείες $(x, y, z) = (t + 4, 4t + 5, t - 2)$ και $(x, y, z) = (2s + 3, s + 1, 2s - 3)$;

*Στις Ασκήσεις 29 έως 31, περιγράψτε τα δεδομένα σχήματα χρησιμοποιώντας διανυσματικές μεθόδους.*

**29.** Το παραλληλεπίπεδο με ακμές τα διανύσματα **a**, **b** και **c** με αφετηρία την αρχή των αξόνων.

**30.** Τα σημεία εντός του παραλληλογράμμου που έχει τη μία του κορυφή στο σημείο $(x_0, y_0, z_0)$ και οι προσκείμενες σε αυτή την κορυφή πλευρές του έχουν το ίδιο μέτρο και την ίδια διεύθυνση με τα διανύσματα **a** και **b**.

**31.** Το επίπεδο που ορίζεται από τα τρία σημεία $(x_0, y_0, z_0)$, $(x_1, y_1, z_1)$ και $(x_2, y_2, z_2)$.

*Αποδείξτε τους ισχυρισμούς των Ασκήσεων 32 έως 34.*

**32.** Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά και έχει το μισό μήκος.

**33.** Αν PQR είναι ένα τρίγωνο στον χώρο και $b > 0$ ένας αριθμός, τότε υπάρχει ένα τρίγωνο με πλευρές παράλληλες στις πλευρές του PQR και μήκος $b$ επί το μήκος των πλευρών του PQR.

**34.** Οι διάμεσοι ενός τριγώνου τέμνονται σε ένα σημείο, το οποίο διαιρεί κάθε διάμεσο με λόγο $2:1$.

*Για τα Προβλήματα 35 και 36 απαιτείται γνώση του χημικού συμβολισμού.*

**35.** Γράψτε τη χημική εξίσωση $\mathrm{CO} + \mathrm{H_2O} = \mathrm{H_2} + \mathrm{CO_2}$ σαν εξίσωση διατεταγμένων τριάδων $(x_1, x_2, x_3)$, όπου $x_1, x_2, x_3$ είναι το πλήθος των ατόμων άνθρακα, υδρογόνου και οξυγόνου, αντίστοιχα, σε κάθε μόριο.

**36.** (α) Γράψτε τη χημική εξίσωση $p\mathrm{C_3H_4O_3} + q\mathrm{O_2} = r\mathrm{CO_2} + s\mathrm{H_2O}$ σαν εξίσωση διατεταγμένων τριάδων με άγνωστους συντελεστές τα $p$, $q$, $r$ και $s$.

(β) Βρείτε τη μικρότερη θετική ακέραια λύση για τα $p$, $q$, $r$ και $s$.

(γ) Παραστήστε σχηματικά τη λύση με ένα διάγραμμα διανυσμάτων στον χώρο.

**37.** Βρείτε μια ευθεία που περιέχεται ολόκληρη στο σύνολο που ορίζει η εξίσωση $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

## 1.2 Το εσωτερικό γινόμενο, το μήκος και η απόσταση

Σε αυτή και την επόμενη ενότητα θα εξετάσουμε δύο γινόμενα διανυσμάτων: το εσωτερικό γινόμενο και το εξωτερικό γινόμενο. Τα γινόμενα αυτά είναι πολύ χρήσιμα στις φυσικές εφαρμογές και έχουν ενδιαφέρουσες γεωμετρικές ερμηνείες. Το πρώτο γινόμενο που θα μελετήσουμε καλείται *εσωτερικό γινόμενο*.

### Το εσωτερικό γινόμενο

Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο διανύσματα **a** και **b** στον $\mathbb{R}^3$ (Σχήμα 1.2.1) και θέλουμε να προσδιορίσουμε τη γωνία που σχηματίζουν, δηλαδή τη μικρότερη γωνία μεταξύ των **a** και **b** στο επίπεδο που παράγουν. Το εσωτερικό γινόμενο μας επιτρέπει να το κάνουμε. Θα αναπτύξουμε αρχικά την έννοια με τυπικό τρόπο και κατόπιν θα αποδείξουμε ότι το συγκεκριμένο γινόμενο κάνει αυτό που ισχυριζόμαστε. Έστω $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ και $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. Ορίζουμε ως ***εσωτερικό γινόμενο*** των **a** και **b**, το οποίο συμβολίζουμε με $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, τον πραγματικό αριθμό

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Προσέξτε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι βαθμωτή ποσότητα. Μερικές φορές το εσωτερικό γινόμενο συμβολίζεται με $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, *δηλαδή τα* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ *και* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ *σημαίνουν ακριβώς το ίδιο πράγμα.*

**Παράδειγμα 1**

(α) Αν $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ και $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, υπολογίστε το $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

(β) Υπολογίστε το $(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (3\mathbf{k} - 2\mathbf{j})$.

**Λύση**

(α) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 = 3 - 1 - 2 = 0.$

(β)
$$\begin{aligned}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (3\mathbf{k} - 2\mathbf{j}) &= (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (0\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \\ &= 2 \cdot 0 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = -5.\end{aligned}$$

▲

Κάποιες από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου έπονται από τον ορισμό. Αν τα **a**, **b** και **c** είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$ και τα $\alpha$ και $\beta$ πραγματικοί αριθμοί, τότε

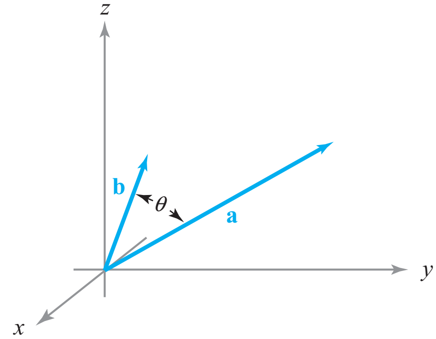
(i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$,
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

(ii) $\alpha\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ και $\mathbf{a} \cdot \beta\mathbf{b} = \beta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

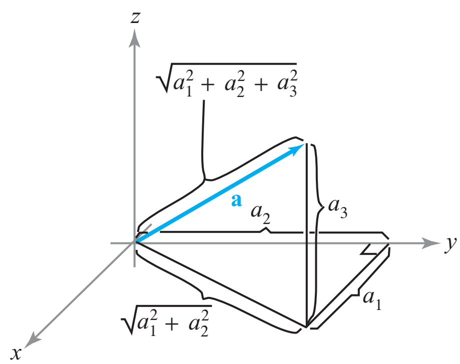
(iii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ και $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.

(iv) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.

Για να αποδείξουμε την πρώτη από τις παραπάνω ιδιότητες, παρατηρούμε ότι εάν $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, τότε $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Επειδή τα $a_1$, $a_2$ και $a_3$ είναι πραγ-




Σχήμα 1.2.1 $\theta$ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα **a** και **b**.

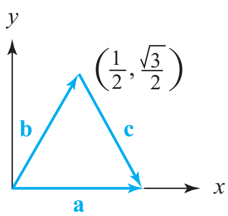



Σχήμα 1.2.2 Το μήκος του διανύσματος $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ δίνεται από τον πυθαγόρειο τύπο: $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

ματικοί αριθμοί, γνωρίζουμε ότι $a_1^2 \geq 0$, $a_2^2 \geq 0$, $a_3^2 \geq 0$. Επομένως, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$. Επιπλέον, αν $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$, τότε $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, συνεπώς $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ (μηδενικό διάνυσμα). Οι αποδείξεις των άλλων ιδιοτήτων του εσωτερικού γινομένου είναι εξίσου εύκολες.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα έπεται ότι το ***μήκος*** του διανύσματος $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ είναι $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ (βλ. Σχήμα 1.2.2). Το μήκος του διανύσματος $\mathbf{a}$ συμβολίζεται με $\|\mathbf{a}\|$. Αυτή η ποσότητα συνήθως ονομάζεται ***νόρμα*** του $\mathbf{a}$. Επειδή $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, έπεται ότι

$$\|\mathbf{a}\| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}.$$




Σχήμα 1.2.3 Τα διανύσματα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$ αναπαριστούν τις πλευρές ενός ισόπλευρου τριγώνου.

## Μοναδιαία διανύσματα

Τα διανύσματα που έχουν νόρμα 1 καλούνται ***μοναδιαία διανύσματα***. Για παράδειγμα, τα διανύσματα $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ είναι μοναδιαία διανύσματα. Παρατηρήστε ότι για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{a}$, το $\mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα· όταν διαιρούμε το $\mathbf{a}$ με $\|\mathbf{a}\|$, λέμε ότι ***κανονικοποιούμε*** το $\mathbf{a}$.

**Παράδειγμα 2**

(α) Κανονικοποιήστε το $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k}$.

(β) Βρείτε μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$ στο επίπεδο τέτοια ώστε $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}$.

**Λύση**

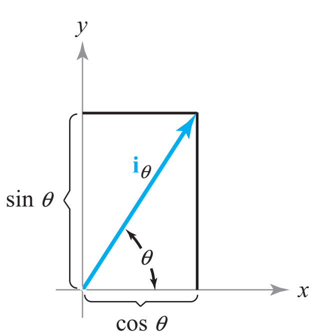
(α) Έχουμε $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (1/2)^2} = (1/2)\sqrt{53}$, άρα η κανονικοποίηση του $\mathbf{v}$ είναι

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} = \frac{4}{\sqrt{53}}\mathbf{i} + \frac{6}{\sqrt{53}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{53}}\mathbf{k}.$$

(β) Επειδή και τα τρία διανύσματα πρέπει να έχουν μήκος 1, ένα τρίγωνο με πλευρές τα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$ πρέπει να είναι ισόπλευρο, όπως στο Σχήμα 1.2.3. Αν προσανατολίσουμε το τρίγωνο όπως στο σχήμα και πάρουμε $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, τότε αναγκαστικά

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{c} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}.$$

Προσέξτε ότι πράγματι $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{c}\| = 1$ και $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}$. ▲

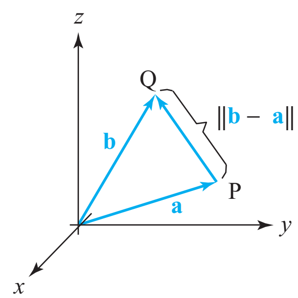



Σχήμα 1.2.4 Οι συντεταγμένες του $\mathbf{i}_\theta$ είναι $\cos\theta$ και $\sin\theta$, και είναι μοναδιαίο διάνυσμα διότι $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Στο επίπεδο, ορίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{i}_\theta = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j}$, που είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που σχηματίζει γωνία $\theta$ με τον άξονα $x$ (βλ. Σχήμα 1.2.4).

## Απόσταση

Αν $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι δύο διανύσματα, έχουμε δει ότι το διάνυσμα $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ είναι παράλληλο και έχει το ίδιο μέτρο με το κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινάει από το πέρας του




Σχήμα 1.2.5 Η απόσταση μεταξύ των περάτων των **a** και **b** είναι $\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$.

**a** και καταλήγει στο πέρας του **b**. Έπεται ότι η απόσταση του πέρατος του **a** από το πέρας του **b** είναι $\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$ (βλ. Σχήμα 1.2.5).

**Εσωτερικό γινόμενο, μήκος και απόσταση** Αν $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ και $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, το ***εσωτερικό*** τους ***γινόμενο*** είναι

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

και το ***μήκος*** του **a** είναι

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Για να ***κανονικοποιήσουμε*** ένα διάνυσμα **a**, κατασκευάζουμε το διάνυσμα

$$\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}.$$

Η ***απόσταση μεταξύ*** των περάτων των **a** και **b** είναι $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ ενώ η ***απόσταση μεταξύ*** των P και Q είναι $\|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\|$.

**Παράδειγμα 3** Βρείτε την απόσταση του διανύσματος **i**, δηλαδή του σημείου $(1, 0, 0)$, από το άκρο του διανύσματος **j**, δηλαδή του σημείου $(0, 1, 0)$.

**Λύση** $\|\mathbf{j} - \mathbf{i}\| = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2}$. ▲

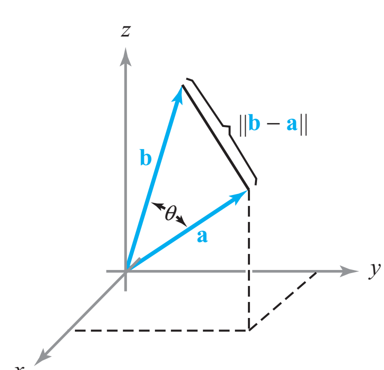
## Η γωνία που σχηματίζουν δύο διανύσματα

Σε αυτό το σημείο θα αποδείξουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων πράγματι προσδιορίζει τη γωνία που σχηματίζουν.

**Θεώρημα 1** Αν **a** και **b** είναι δύο διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$ και $\theta$, όπου $0 \leq \theta \leq \pi$, η γωνία που σχηματίζουν (Σχήμα 1.2.6), τότε

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos\theta.$$

Από την εξίσωση $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos\theta$ έπεται ότι αν τα **a** και **b** είναι μη μηδενικά, μπο-




Σχήμα 1.2.6 Τα διανύσματα **a**, **b** και η γωνία $\theta$ που σχηματίζουν· η γεωμετρία του Θεωρήματος 1 και της απόδειξής του.

ρούμε να γράψουμε τη γωνία που σχηματίζουν ως

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}\right).$$

**Απόδειξη** Αν εφαρμόσουμε τον νόμο των συνημιτόνων της τριγωνομετρίας στο τρίγωνο που έχει ως μία του κορυφή την αρχή των αξόνων και προσκείμενες πλευρές αυτές που ορίζονται από τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ (όπως στο σχήμα), παίρνουμε

$$\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta.$$

Επειδή $\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|^2 = (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$, $\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$ και $\|\mathbf{b}\|^2 = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$, μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω εξίσωση ως εξής:

$$(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta.$$

Μπορούμε επίσης να αναπτύξουμε το $(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) &= \mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) - \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})\\ &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Επομένως,

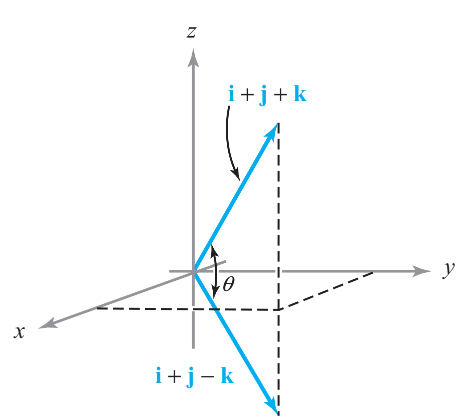
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta,$$

δηλαδή

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta.$$

■

**Παράδειγμα 4** Βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ και $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ (βλ. Σχήμα 1.2.7).




Σχήμα 1.2.7 Εύρεση της γωνίας που σχηματίζουν τα $\mathbf{a} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ και $\mathbf{b} = \mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

**Λύση** Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1, έχουμε

$$(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}) = \|\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}\|\|\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}\|\cos\theta,$$

άρα

$$1+1-1 = (\sqrt{3})(\sqrt{3})\cos\theta.$$

Επομένως,

$$\cos\theta = \tfrac{1}{3},$$

δηλαδή

$$\theta = \cos^{-1}(\tfrac{1}{3}) \approx 1{,}23 \text{ rad } (71^\circ).$$ ▲

## Η ανισότητα Cauchy-Schwarz

Το Θεώρημα 1 λέει ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι το γινόμενο των μηκών τους επί το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν. Αυτή η σχέση είναι συχνά χρήσιμη σε προβλήματα γεωμετρικής φύσης. Μια σημαντική συνέπεια του Θεωρήματος 1 είναι η εξής:

**Πόρισμα** Ανισότητα Cauchy-Schwarz Για δύο διανύσματα **a** και **b**, έχουμε

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$$

με ισότητα αν και μόνο αν το **a** είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του **b** ή ένα από τα δύο διανύσματα είναι το **0**.

**Απόδειξη** Αν το **a** δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του **b**, τότε η $\theta$, η γωνία που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα, δεν είναι μηδέν ή $\pi$, άρα $|\cos\theta| < 1$ και έτσι η ανισότητα ισχύει· μάλιστα, αν τα **a** και **b** είναι αμφότερα μη μηδενικά, ισχύει η *γνήσια* ανισότητα. Αν το **a** είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του **b**, τότε $\theta = 0$ ή $\pi$ και $|\cos\theta| = 1$, οπότε σε αυτή την περίπτωση ισχύει η ισότητα. ■

**Παράδειγμα 5** Επαληθεύστε την ανισότητα Cauchy-Schwarz για τα $\mathbf{a} = -\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ και $\mathbf{b} = 3\mathbf{i}+\mathbf{k}$.

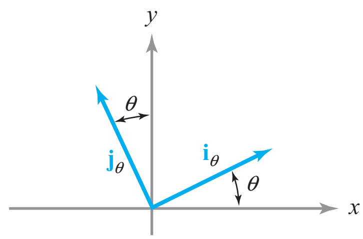
**Λύση** Το εσωτερικό γινόμενο είναι $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -3+0+1 = -2$, οπότε $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = 2$. Επιπλέον, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ και $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$. Η ανισότητα $2 \le \sqrt{3}\cdot\sqrt{10}$ ισχύει διότι $\sqrt{3}\cdot\sqrt{10} > \sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3 \ge 2$. ▲

Αν τα **a** και **b** είναι μη μηδενικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$ και $\theta$ είναι η γωνία που σχηματίζουν, βλέπουμε ότι $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ αν και μόνο αν $\cos\theta = 0$. Άρα *το εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων είναι μηδέν αν και μόνο αν τα διανύσματα είναι κάθετα*. Επομένως, το εσωτερικό γινόμενο αποτελεί μια βολική μέθοδο για να διαπιστώνουμε αν δύο διανύσματα είναι κάθετα. Συχνά λέμε ότι δύο κάθετα διανύσματα είναι ***ορθογώνια***. Τα διανύσματα της συνήθους βάσης $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ και **k** είναι ανά δύο ορθογώνια και έχουν μήκος 1· ένα τέτοιο σύστημα καλείται ***ορθοκανονικό***. Θα υιοθετήσουμε τη σύμβαση ότι το μηδενικό διάνυσμα είναι ορθογώνιο σε όλα τα διανύσματα.

**Παράδειγμα 6** Τα διανύσματα $\mathbf{i}_\theta = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j}$ και $\mathbf{j}_\theta = -(\sin\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j}$ είναι ορθογώνια διότι

$$\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{j}_\theta = -\cos\theta \sin\theta + \sin\theta\cos\theta = 0.$$

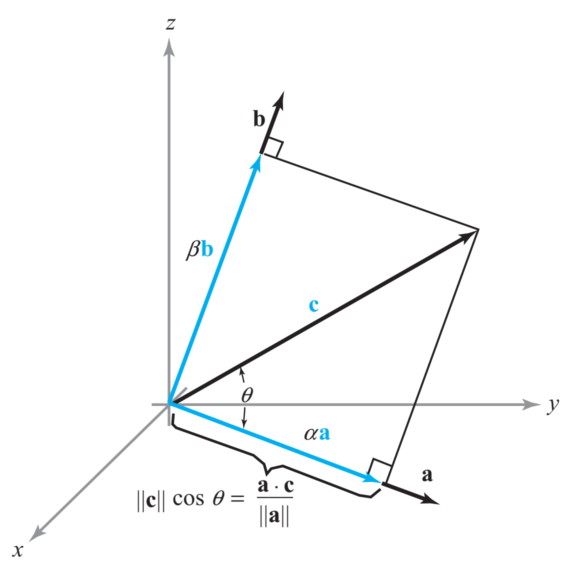
Το $\mathbf{i}_\theta$ είναι η περιστροφή του $\mathbf{i}$ κατά $\theta°$ κατά την αντιωρολόγια φορά, ενώ το $\mathbf{j}_\theta$ είναι η περιστροφή του $\mathbf{j}$ κατά $\theta°$ κατά την αντιωρολόγια φορά (βλ. Σχήμα 1.2.8).




Σχήμα 1.2.8 Τα διανύσματα $\mathbf{i}_\theta$ και $\mathbf{j}_\theta$ είναι ορθογώνια και έχουν μοναδιαίο μήκος, άρα είναι ορθοκανονικά.

▲

**Παράδειγμα 7** Έστω $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ δύο μη μηδενικά ορθογώνια διανύσματα. Αν $\mathbf{c}$ είναι ένα διάνυσμα στο επίπεδο που παράγουν τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\alpha$ και $\beta$ τέτοιοι ώστε $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. Χρησιμοποιήστε το εσωτερικό γινόμενο για να προσδιορίσετε τα $\alpha$ και $\beta$ (βλ. Σχήμα 1.2.9).




Σχήμα 1.2.9 Η γεωμετρία για την εύρεση των $\alpha$ και $\beta$, όπου $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$.

**Λύση** Το εσωτερικό γινόμενο των $\mathbf{a}$ και $\mathbf{c}$ είναι

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}.$$

Επειδή τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι ορθογώνια, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, επομένως,

$$\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{\|\mathbf{a}\|^2}.$$

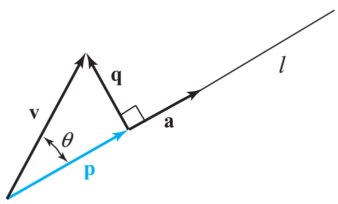
Με αντίστοιχο τρόπο,

$$\beta = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\|\mathbf{b}\|^2}.$$

▲

## Ορθογώνια προβολή

Στο παραπάνω παράδειγμα, το διάνυσμα $\alpha\mathbf{a}$ καλείται ***προβολή του* c *επί του* a**, ενώ το $\beta\mathbf{b}$ είναι η ***προβολή του επί του* b**. Ας διατυπώσουμε αυτή την ιδέα πιο γενικά. Αν $\mathbf{v}$ είναι ένα διάνυσμα και $l$ η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει τη διεύθυνση ενός διανύσματος $\mathbf{a}$, τότε η ***ορθογώνια προβολή του* v *επί του* a** είναι το διάνυσμα $\mathbf{p}$ με πέρας το σημείο που προκύπτει αν φέρουμε μια ευθεία κάθετη στην $l$ από το πέρας του $\mathbf{v}$, όπως στο Σχήμα 1.2.10.




Σχήμα 1.2.10 Το $\mathbf{p}$ είναι η ορθογώνια προβολή του $\mathbf{v}$ επί του $\mathbf{a}$.

Όπως φαίνεται στο σχήμα, το $\mathbf{p}$ είναι πολλαπλάσιο του $\mathbf{a}$, ενώ το $\mathbf{v}$ είναι το άθροισμα του $\mathbf{p}$ και ενός διανύσματος $\mathbf{q}$ κάθετου στο $\mathbf{a}$. Επομένως,

$$\mathbf{v} = c\mathbf{a} + \mathbf{q},$$

όπου $\mathbf{p} = c\mathbf{a}$ και $\mathbf{a}\cdot\mathbf{q} = 0$. Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο του $\mathbf{a}$ και με τα δύο μέλη της $\mathbf{v} = c\mathbf{a} + \mathbf{q}$, βρίσκουμε ότι $\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = c\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$, άρα $c = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})/(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})$ και έπεται ότι

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{a}\|^2}\,\mathbf{a}.$$

Το μήκος του $\mathbf{p}$ είναι

$$\|\mathbf{p}\| = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{a}\|^2}\,\|\mathbf{a}\| = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{a}\|} = \|\mathbf{v}\|\cos\theta.$$

**Ορθογώνια προβολή** Η ***ορθογώνια προβολή*** του $\mathbf{v}$ επί του $\mathbf{a}$ είναι το διάνυσμα

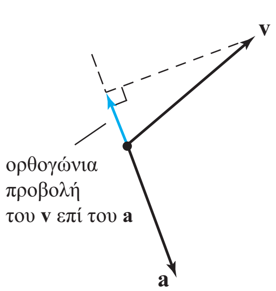
$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{a}\|^2}\,\mathbf{a}.$$

**Παράδειγμα 8** Βρείτε την ορθογώνια προβολή του $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ επί του $\mathbf{i}-2\mathbf{j}$.

**Λύση** Για $\mathbf{a} = \mathbf{i}-2\mathbf{j}$ και $\mathbf{v} = \mathbf{i}+\mathbf{j}$, η ορθογώνια προβολή του $\mathbf{v}$ επί του $\mathbf{a}$ είναι

$$\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\,\mathbf{a} = \frac{1-2}{1+4}(\mathbf{i}-2\mathbf{j}) = -\frac{1}{5}(\mathbf{i}-2\mathbf{j})$$

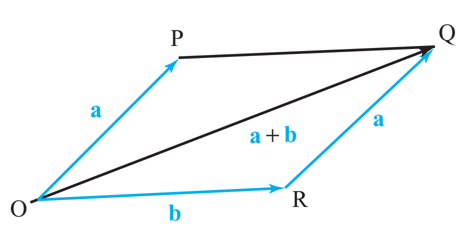
(βλ. Σχήμα 1.2.11). ▲




Σχήμα 1.2.11 Η ορθογώνια προβολή του $\mathbf{v}$ επί του $\mathbf{a}$ ισούται με $-\frac{1}{5}\mathbf{a}$.

## Η τριγωνική ανισότητα

Μια χρήσιμη συνέπεια της ανισότητας Cauchy-Schwarz, που ονομάζεται ***τριγωνική ανισότητα***, συνδέει τα μήκη των διανυσμάτων $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ και του αθροίσματός τους $\mathbf{a}+\mathbf{b}$. Γεωμετρικά, η τριγωνική ανισότητα λέει ότι το μήκος οποιασδήποτε ενός τριγώνου δεν είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των μηκών των δύο άλλων πλευρών (βλ. Σχήμα 1.2.12).




Σχήμα 1.2.12 Σχηματική αναπαράσταση του γεγονότος ότι $\|\mathrm{OQ}\| \le \|\mathrm{OR}\| + \|\mathrm{RQ}\|$ ή, με χρήση διανυσματικού συμβολισμού, $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \le \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$, που είναι η τριγωνική ανισότητα.

**Θεώρημα 2 Τριγωνική ανισότητα** Για διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ στον χώρο,

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|.$$

**Απόδειξη** Μολονότι το συγκεκριμένο αποτέλεσμα μπορεί να είναι γεωμετρικά προφανές, είναι χρήσιμο να το αποδείξουμε χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz, καθώς το επιχείρημα μπορεί να γενικευτεί για $n$-διάστατα διανύσματα. Παίρνουμε το τετράγωνο του αριστερού μέλους:

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz, έχουμε

$$\|\mathbf{a}\|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2 \leq \|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{b}\|^2 = (\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)^2.$$

Επομένως,

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 \leq (\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)^2$$

και παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα. ■

**Παράδειγμα 9**

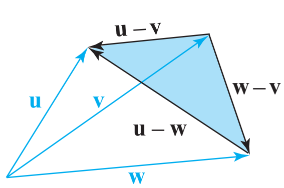
(α) Επαληθεύστε την τριγωνική ανισότητα για τα $\mathbf{a} = \mathbf{i}+\mathbf{j}$ και $\mathbf{b} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

(β) Αποδείξτε ότι $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}-\mathbf{w}\| + \|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|$ για οποιαδήποτε διανύσματα $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$. Αναπαραστήστε γραφικά αυτή την ανισότητα χρησιμοποιώντας το ίδιο σημείο εφαρμογής για τα $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$.

**Λύση**

(α) Έχουμε $\mathbf{a}+\mathbf{b} = 3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, άρα $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$. Από την άλλη πλευρά, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{2}$ και $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{6}$, άρα η τριγωνική ανισότητα λέει ότι $\sqrt{14} \leq \sqrt{2}+\sqrt{6}$. Οι αριθμοί το επιβεβαιώνουν: $\sqrt{14} \approx 3{,}74$, ενώ $\sqrt{2}+\sqrt{6} \approx 1{,}41 + 2{,}45 = 3{,}86$.

(β) Έχουμε $\mathbf{u}-\mathbf{v} = (\mathbf{u}-\mathbf{w}) + (\mathbf{w}-\mathbf{v})$· το αποτέλεσμα έπεται από την τριγωνική ανισότητα αν αντικαταστήσουμε το $\mathbf{a}$ με το $\mathbf{u}-\mathbf{w}$ και το $\mathbf{b}$ με το $\mathbf{w}-\mathbf{v}$. Γεωμετρικά, η ανισότητα αφορά το σκιασμένο τρίγωνο στο Σχήμα 1.2.13. ▲



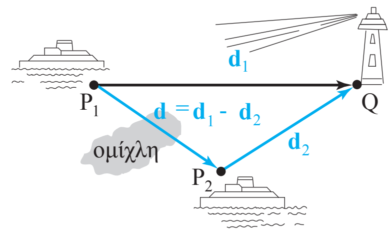

Σχήμα 1.2.13 Γραφική αναπαράσταση της ανισότητας $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}-\mathbf{w}\| + \|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|$.

## Εφαρμογές των διανυσμάτων στη φυσική

Ένα απλό παράδειγμα φυσικής ποσότητας που αναπαριστάται με διάνυσμα είναι η μετατόπιση. Υποθέτουμε ότι, σε κάποιο τμήμα της επιφάνειας της Γης αρκετά μικρό ώστε να μπορεί να θεωρηθεί επίπεδο, εισάγουμε συντεταγμένες έτσι ώστε ο άξονας $x$ να έχει κατεύθυνση προς την ανατολή, ο άξονας $y$ προς τον βορρά, και η μονάδα μήκους να είναι το χιλιόμετρο. Αν βρισκόμαστε σε ένα σημείο P και επιθυμούμε να μεταβούμε σε ένα σημείο Q, το ***διάνυσμα μετατόπισης*** $\mathbf{d} = \overrightarrow{PQ}$ που ενώνει το P με το Q μάς λέει προς ποια κατεύθυνση πρέπει να κινηθούμε και ποια είναι η απόσταση που πρέπει να διανύσουμε. Αν $x$ και $y$ είναι οι συνιστώσες αυτού του διανύσματος, η μετατόπιση από το P στο Q είναι «$x$ χιλιόμετρα ανατολικά, $y$ χιλιόμετρα βόρεια.»

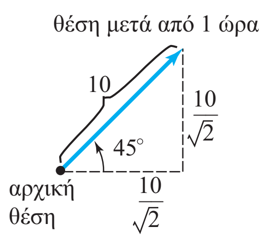
**Παράδειγμα 10** Υποθέτουμε ότι δύο καπετάνιοι που δεν μπορούν να δουν ο ένας τον άλλον, αλλά μπορούν να επικοινωνήσουν μέσω ασυρμάτου, θέλουν να προσδιορίσουν τη σχετική θέση των πλοίων τους. Εξηγήστε πώς μπορούν να το κάνουν, αν καθένας τους μπορεί να προσδιορίσει το διάνυσμα μετατόπισης από το πλοίο του στον ίδιο φάρο.

**Λύση** Έστω $\mathrm{P}_1$ και $\mathrm{P}_2$ οι θέσεις των πλοίων και έστω Q η θέση του φάρου. Η μετατόπιση από το $i$-οστό πλοίο στον φάρο είναι το διάνυσμα $\mathbf{d}_i$ που ενώνει το $\mathrm{P}_i$ με το Q. Η μετατόπιση από το πρώτο στο δεύτερο πλοίο είναι το διάνυσμα $\mathbf{d}$ που ενώνει το $\mathrm{P}_1$ με το $\mathrm{P}_2$. Έχουμε $\mathbf{d}+\mathbf{d}_2=\mathbf{d}_1$ (Σχήμα 1.2.14), επομένως $\mathbf{d}=\mathbf{d}_1-\mathbf{d}_2$. Δηλαδή η μετατόπιση από το ένα πλοίο στο άλλο είναι η διαφορά των μετατοπίσεων από κάθε πλοίο στον φάρο.




Σχήμα 1.2.14 Διανυσματικές μέθοδοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση της θέσης ενός αντικειμένου.

▲

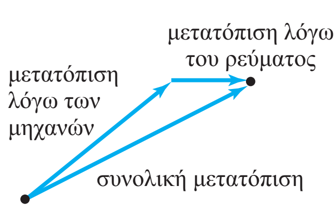



Σχήμα 1.2.15 Αν ένα αντικείμενο κινείται βορειοανατολικά με 10 km/h, το διάνυσμα ταχύτητάς του έχει συνιστώσες $(10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2}) = 10(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, όπου $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα με βορειοανατολική κατεύθυνση.

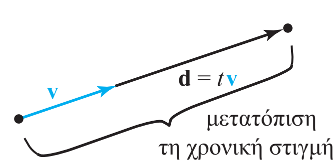
Μπορούμε να αναπαραστήσουμε ως διάνυσμα και την ταχύτητα ενός κινούμενου αντικειμένου. Προς το παρόν θα ασχοληθούμε μόνο με αντικείμενα που κινούνται με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος ευθειών. Υποθέτουμε, για παράδειγμα, ότι ένα ατμόπλοιο διασχίζει μια λίμνη με 10 χιλιόμετρα την ώρα (km/h) έχοντας βορειοανατολική κατεύθυνση. Μετά από 1 ώρα ταξιδιού, η μετατόπιση είναι $(10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2}) \approx (7{,}07, 7{,}07)$ (βλ. Σχήμα 1.2.15).

Το διάνυσμα με συνιστώσες $(10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2})$ καλείται *διάνυσμα ταχύτητας* του ατμόπλοιου. Εν γένει, αν ένα αντικείμενο κινείται με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος μιας ευθείας, το ***διάνυσμα ταχύτητάς*** *του είναι το διάνυσμα μετατόπισης από τη θέση του την εκάστοτε χρονική στιγμή στη θέση του 1 μονάδα χρόνου αργότερα.* Αν στη λίμνη εμφανιστεί ένα ρεύμα που κινείται ανατολικά με 2 km/h και το ατμόπλοιο διατηρήσει την ίδια κατεύθυνση με τις μηχανές του να δουλεύουν με τον ίδιο ρυθμό, η μετατόπισή του μετά από 1 ώρα θα έχει συνιστώσες $(10/\sqrt{2}+2, 10/\sqrt{2})$ (βλ. Σχήμα 1.2.16). Άρα το νέο διάνυσμα ταχύτητας έχει συνιστώσες $(10/\sqrt{2}+2, 10/\sqrt{2})$. Παρατηρούμε ότι πρόκειται για το άθροισμα του αρχικού διανύσματος ταχύτητας $(10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2})$ του ατμόπλοιου και του διανύσματος ταχύτητας $(2, 0)$ του ρεύματος.

> **Μετατόπιση και ταχύτητα** Αν ένα αντικείμενο έχει (σταθερό) διάνυσμα ταχύτητας $\mathbf{v}$, το διάνυσμα μετατόπισης του αντικείμενου ύστερα από $t$ μονάδες χρόνου είναι $\mathbf{d}=t\mathbf{v}$. Επομένως, τη χρονική στιγμή $t=1$, το διάνυσμα μετατόπισης ισούται με το διάνυσμα ταχύτητας. Βλ. Σχήμα 1.2.17.




Σχήμα 1.2.16 Η συνολική μετατόπιση είναι το άθροισμα των μετατοπίσεων λόγω των μηχανών και του ρεύματος.




Σχήμα 1.2.17 Μετατόπιση = χρόνος × ταχύτητα.

**Παράδειγμα 11** Ένα πουλί πετάει σε ευθεία γραμμή με διάνυσμα ταχύτητας $10\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$ (σε χιλιόμετρα ανά ώρα). Έστω ότι $(x, y)$ είναι οι συντεταγμένες του στο έδαφος και $z$ το ύψος του πάνω από το έδαφος.

(α) Αν μια ορισμένη χρονική στιγμή το πουλί βρίσκεται στη θέση $(1, 2, 3)$, ποια είναι η θέση του 1 ώρα αργότερα; 1 λεπτό αργότερα;

(β) Πόσα δευτερόλεπτα χρειάζεται το πουλί για να ανέβει 10 μέτρα;

**Λύση** (α) Το διάνυσμα μετατόπισης από το $(1, 2, 3)$ μετά από 1 ώρα είναι $10\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$, άρα η νέα θέση είναι $(1, 2, 3) + (10, 6, 1) = (11, 8, 4)$. Μετά από 1 λεπτό, το διάνυσμα μετατόπισης από το $(1, 2, 3)$ είναι $\frac{1}{60}(10\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \frac{1}{6}\mathbf{i} + \frac{1}{10}\mathbf{j} + \frac{1}{60}\mathbf{k}$, και επομένως η νέα θέση είναι $(1, 2, 3) + (\frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{60}) = (\frac{7}{6}, \frac{21}{10}, \frac{181}{60})$.

(β) Μετά από $t$ δευτερόλεπτα ($= t/3600$ ώρες), το διάνυσμα μετατόπισης από το $(1, 2, 3)$ είναι $(t/3600)(10\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}) = (t/360)\mathbf{i} + (t/600)\mathbf{j} + (t/3600)\mathbf{k}$. Η αύξηση του ύψους είναι η συνιστώσα $z$, συγκεκριμένα, $t/3600$. Αυτό θα ισούται με 10 m ($= \frac{1}{100}$km) όταν $t/3600 = \frac{1}{100}$, δηλαδή όταν $t = 36$s. ▲

**Παράδειγμα 12** Οι φυσικές δυνάμεις έχουν μέτρο και κατεύθυνση, επομένως μπορούν να αναπαρασταθούν με διανύσματα. Αν σε ένα αντικείμενο ασκούνται ταυτόχρονα περισσότερες από μία δυνάμεις, η συνολική δύναμη αναπαριστάται με το άθροισμα των διανυσμάτων των επιμέρους δυνάμεων. Έστω ότι σε ένα αντικείμενο ασκούνται οι δυνάμεις $\mathbf{i} + \mathbf{k}$ και $\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Ποια τρίτη δύναμη $\mathbf{F}$ πρέπει να ασκήσουμε για να αντισταθμίσουμε τις άλλες δύο — δηλαδή να κάνουμε τη συνολική δύναμη ίση με μηδέν;

**Λύση** Η δύναμη $\mathbf{F}$ θα πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε να έχουμε $(\mathbf{i} + \mathbf{k}) + (\mathbf{j} + \mathbf{k}) + \mathbf{F} = \mathbf{0}$, δηλαδή $\mathbf{F} = -(\mathbf{i} + \mathbf{k}) - (\mathbf{j} + \mathbf{k}) = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. (Υπενθυμίζουμε ότι $\mathbf{0}$ είναι το *μηδενικό διάνυσμα*, το διάνυσμα του οποίου όλες οι συνιστώσες είναι μηδέν.) ▲

## Ασκήσεις

**1.** Υπολογίστε το $(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

**2.** Υπολογίστε το $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, όπου $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ και $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$.

**3.** Βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα $7\mathbf{j} + 19\mathbf{k}$ και $-2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ (στρογγυλοποιώντας στην πλησιέστερη μοίρα).

**4.** Υπολογίστε το $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, όπου $\mathbf{u} = \sqrt{3}\mathbf{i} - 315\mathbf{j} + 22\mathbf{k}$ και $\mathbf{v} = \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$.

**5.** Είναι το $\|8\mathbf{i} - 12\mathbf{k}\| \cdot \|6\mathbf{j} + \mathbf{k}\| - |(8\mathbf{i} - 12\mathbf{k}) \cdot (6\mathbf{j} + \mathbf{k})|$ ίσο με μηδέν; Εξηγήστε.

*Στις Ασκήσεις 6 έως 11, υπολογίστε τα $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ και $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ για τα δεδομένα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$.*

**6.** $\mathbf{u} = 15\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \pi\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$

**7.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{j} - \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{j} + \mathbf{i}$

**8.** $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

**9.** $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

**10.** $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{j}$

**11.** $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

**12.** Έστω $\mathbf{v} = (2, 3)$. Υποθέστε ότι το $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ είναι κάθετο στο $\mathbf{v}$ και ότι $\|\mathbf{w}\| = 5$. Αυτές οι υποθέσεις προσδιορίζουν ένα $\mathbf{w}$ ή το αντίθετό του. Βρείτε ένα τέτοιο $\mathbf{w}$.

**13.** Βρείτε $b$ και $c$ τέτοια ώστε το $(5, b, c)$ να είναι ορθογώνιο με αμφότερα τα $(1, 2, 3)$ και $(1, -2, 1)$.

**14.** Έστω $\mathbf{v}_1 = (0, 3, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 2, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 3)$. Αυτά τα τρία διανύσματα που έχουν τις ουρές τους στην αρχή των αξόνων καθορίζουν ένα παραλληλεπίπεδο $P$.

(α) Σχεδιάστε το $P$.

(β) Προσδιορίστε το μήκος της κύριας διαγωνίου (από την αρχή των αξόνων ως τη διαγωνίως απέναντι κορυφή).

**15.** Ποια γεωμετρική σχέση υπάρχει μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$ αν $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = -\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|$;

**16.** Κανονικοποιήστε τα διανύσματα των Ασκήσεων 6 έως 8. (Ο Οδηγός μελέτης περιέχει μόνο τη λύση που αντιστοιχεί στην Άσκηση 7.)

**17.** Βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα των Ασκήσεων 9 έως 11. Αν είναι απαραίτητο, εκφράστε τις απαντήσεις σας χρησιμοποιώντας την $\cos^{-1}$.

**18.** Βρείτε όλες τις τιμές του $x$ για τις οποίες τα $(x, 1, x)$ και $(x, -6, 1)$ είναι ορθογώνια.

**19.** Βρείτε όλες τις τιμές του $x$ για τις οποίες τα $(7, x, -10)$ και $(3, x, x)$ είναι ορθογώνια.

**20.** Βρείτε την προβολή του $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ επί του $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

**21.** Βρείτε την προβολή του $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ επί του $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

**22.** Ποιοι περιορισμοί πρέπει να επιβληθούν στον πραγματικό αριθμό $b$ ώστε το διάνυσμα $2\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ να είναι ορθογώνιο (α) με το $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ και (β) με το $\mathbf{k}$;

**23.** Τα διανύσματα $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$ είναι πλευρές ενός ισόπλευρου τριγώνου με μήκος πλευρών 1. Υπολογίστε το $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$.

**24.** Έστω $\mathbf{b} = (3, 1, 1)$ και έστω $P$ το επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και δίνεται από την $x + y + 2z = 0$.

(α) Βρείτε μια ορθογώνια βάση για το $P$. Δηλαδή, βρείτε δύο μη μηδενικά ορθογώνια διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in P$.

(β) Βρείτε την ορθογώνια προβολή του $\mathbf{b}$ επί του $P$.

**25.** Βρείτε δύο μη παράλληλα διανύσματα που είναι αμφότερα ορθογώνια με το $(1, 1, 1)$.

**26.** Βρείτε την ευθεία που διέρχεται από το $(3, 1, -2)$ και τέμνει κάθετα την ευθεία $x = -1 + t$, $y = -2 + t$, $z = -1 + t$. [Υποδειξη: Αν $(x_0, y_0, z_0)$ είναι το σημείο τομής, βρείτε τις συντεταγμένες του.]

**27.** Χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο, αποδείξτε το αντίστροφο του πυθαγόρειου θεωρήματος. Δηλαδή, δείξτε ότι αν τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ικανοποιούν την $a^2 + b^2 = c^2$, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

**28.** Έστω $\alpha, \beta, \gamma$ οι γωνίες που σχηματίζει το $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ με τους άξονες $x$, $y$ και $z$, αντίστοιχα. Δείξτε ότι $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

**29.** Ένα πλοίο που βρίσκεται στη θέση $(1, 0)$ ενός ναυτικού χάρτη (με τον βορρά στη θετική κατεύθυνση $y$) βλέπει έναν βράχο στη θέση $(2, 4)$. Ποιο είναι το διάνυσμα που συνδέει το πλοίο με τον βράχο; Ποια είναι η γωνία $\theta$ που σχηματίζει αυτό το διάνυσμα με τη βόρεια κατεύθυνση; (Πρόκειται για τη λεγόμενη ***διόπτευση*** του βράχου από το πλοίο.)

**30.** Υποθέστε ότι το πλοίο της Άσκησης 29 έχει κατεύθυνση προς τον βορρά και ταξιδεύει με ταχύτητα 4 κόμβων ως προς το νερό. Υπάρχει ένα ρεύμα που κινείται ανατολικά με ταχύτητα 1 κόμβου. Οι μονάδες του χάρτη είναι τα ναυτικά μίλια: 1 κόμβος = 1 ναυτικό μίλι ανά ώρα.

(α) Αν δεν υπήρχε ρεύμα, ποιο είναι το διάνυσμα $\mathbf{u}$ που θα αναπαριστούσε την ταχύτητα του πλοίου ως προς τον πυθμένα της θάλασσας;

(β) Αν το πλοίο παρασυρόταν απλώς από το ρεύμα, ποιο είναι το διάνυσμα $\mathbf{v}$ που θα αναπαριστούσε την ταχύτητά του ως προς τον πυθμένα της θάλασσας;

(γ) Ποιο είναι το διάνυσμα $\mathbf{w}$ που αναπαριστά τη συνολική ταχύτητα του πλοίου;

(δ) Πού θα βρίσκεται το πλοίο μετά από 1 ώρα;

(ε) Θα πρέπει να αλλάξει πορεία ο καπετάνιος;

(στ) Και αν ο βράχος ήταν παγόβουνο;

**31.** Ένα αεροπλάνο βρίσκεται στη θέση $(3, 4, 5)$ το μεσημέρι και ταξιδεύει με ταχύτητα $400\mathbf{i} + 500\mathbf{j} - \mathbf{k}$ χιλιομέτρων την ώρα. Ο πιλότος εντοπίζει ένα αεροδρόμιο στη θέση $(23, 29, 0)$.

(α) Τι ώρα θα περάσει το αεροπλάνο ακριβώς πάνω από το αεροδρόμιο; (Υποθέστε ότι το αεροπλάνο πετάει πάνω από επίπεδο έδαφος και ότι το διάνυσμα $\mathbf{k}$ έχει κατεύθυνση προς τα πάνω.)

(β) Σε τι ύψος θα βρίσκεται το αεροπλάνο όταν θα περάσει πάνω από το αεροδρόμιο;

**32.** Η ταχύτητα $\mathbf{v}_1$ του ανέμου είναι 40 μίλια την ώρα (mi/h) με κατεύθυνση από την ανατολή προς τη δύση, ενώ ένα αεροπλάνο ταξιδεύει με ταχύτητα $\mathbf{v}_2$ ίση με 100 mi/h και κατεύθυνση προς τον βορρά. Η ταχύτητα του αεροπλάνου ως προς το έδαφος είναι το διανυσματικό άθροισμα $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

(α) Βρείτε το $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

(β) Σχεδιάστε ένα σχήμα υπό κλίμακα.

**33.** Μια δύναμη 50 N σχηματίζει γωνία $50^\circ$ με το οριζόντιο επίπεδο και έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά. Προσδιορίστε την οριζόντια και την κατακόρυφη συνιστώσα της. Σχεδιάστε ένα σχήμα που να περιέχει όλα τα αποτελέσματα.

**34.** Δύο άτομα τραβούν οριζοντίως δύο σχοινιά που είναι δεμένα σε έναν στύλο. Η γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους τα σχοινιά είναι $60^\circ$. Το άτομο A τραβάει με δύναμη 150 N, ενώ το άτομο B τραβάει με δύναμη 110 N.

(α) Η συνολική δύναμη είναι το διανυσματικό άθροισμα των δύο δυνάμεων. Σχεδιάστε ένα σχήμα υπό κλίμακα, όπου να απεικονίζονται οι τρεις δυνάμεις.

(β) Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρία, βρείτε τις σχέσεις που δίνουν τις συνιστώσες των διανυσμάτων των δύο δυνάμεων σε κάποιο κατάλληλα επιλεγμένο σύστημα συντεταγμένων. Εκτελέστε την αλγεβρική πρόσθεση και βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η συνολική δύναμη με το A.

**35.** Μια μάζα ενός κιλού (1 kg) που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων κρέμεται από δύο σχοινιά που είναι δεμένα στα σημεία $(1,1,1)$ και $(-1,-1,1)$. Αν η δύναμη της βαρύτητας έχει την κατεύθυνση του διανύσματος $-\mathbf{k}$, ποιο είναι το διάνυσμα που περιγράφει τη δύναμη κατά μήκος κάθε σχοινιού; [Υποδειξη: Χρησιμοποιήστε τη συμμετρία του προβλήματος. Μια μάζα 1 kg έχει βάρος 9,8 newton (N).]

**36.** Υποθέστε ότι σε ένα αντικείμενο που κινείται κατά την κατεύθυνση $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ ασκείται μια δύναμη που δίνεται από το διάνυσμα $2\mathbf{i}+\mathbf{j}$. Εκφράστε αυτή τη δύναμη ως άθροισμα μιας δύναμης κατά την κατεύθυνση της κίνησης και μιας δύναμης κάθετης στην κατεύθυνση της κίνησης.

**37.** Μια δύναμη 6 N σχηματίζει γωνία $\pi/4$ rad με τον άξονα $y$, έχοντας κατεύθυνση προς τα δεξιά. Η δύναμη αντιτίθεται στην κίνηση ενός αντικειμένου που κινείται κατά μήκος της ευθείας που συνδέει το $(1,\ 2)$ με το $(5,4)$.

(α) Βρείτε έναν τύπο για το διάνυσμα δύναμης $\mathbf{F}$.

(β) Βρείτε τη γωνία $\theta$ που σχηματίζει η κατεύθυνση της μετατόπισης $\mathbf{D}=(5-1)\mathbf{i}+(4-2)\mathbf{j}$ με την κατεύθυνση της δύναμης $\mathbf{F}$.

(γ) Το ***εκτελούμενο έργο*** είναι $\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}$, ισοδύναμα, $\|\mathbf{F}\|\|\mathbf{D}\|\cos\theta$. Υπολογίστε το έργο και με τους δύο τύπους και συγκρίνετε τα αποτελέσματα.

**38.** Δείξτε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των μηκών των τεσσάρων πλευρών ενός παραλληλογράμμου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των μηκών των δύο διαγωνίων.

**39.** Χρησιμοποιώντας διανύσματα, δείξτε ότι οι διαγώνιοι ενός ορθογωνίου είναι κάθετες αν και μόνο αν το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

## 1.3 Πίνακες, ορίζουσες και εξωτερικό γινόμενο

Στην Ενότητα 1.2 ορίσαμε ένα γινόμενο διανυσμάτων που ήταν πραγματικός αριθμός. Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε ένα γινόμενο διανυσμάτων που είναι διάνυσμα· δηλαδή θα δείξουμε πώς, δεδομένων δύο διανυσμάτων $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, μπορούμε να παραγάγουμε ένα τρίτο διάνυσμα $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, το οποίο καλείται *εξωτερικό γινόμενο* των $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$. Αυτό το νέο διάνυσμα θα έχει την ευχάριστη γεωμετρική ιδιότητα να είναι κάθετο στο επίπεδο που παράγουν (ορίζουν) τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$. Επειδή ο ορισμός του εξωτερικού γινομένου βασίζεται στις έννοιες του πίνακα και της ορίζουσας, θα αναπτύξουμε αρχικά αυτές τις έννοιες. Μόλις ολοκληρώσουμε την παρουσίασή τους, θα μπορέσουμε να μελετήσουμε τις γεωμετρικές συνέπειες της μαθηματικής μας κατασκευής.

### Πίνακες $2\times 2$

Ορίζουμε έναν ***πίνακα*** $2\times 2$ ως τη συστοιχία

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

όπου $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{21}$ και $a_{22}$ είναι τέσσερις πραγματικοί αριθμοί. Για παράδειγμα, οι

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$$

είναι πίνακες $2\times 2$. Η ***ορίζουσα***

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ενός τέτοιου πίνακα είναι ο πραγματικός αριθμός που ορίζεται από την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1}$$

**Παράδειγμα 1**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0 \cdot \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \cdot \qquad \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 42 = -2.$$

## Πίνακες $3 \times 3$

Ένας ***πίνακας*** $3 \times 3$ είναι η συστοιχία

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

όπου, πάλι, τα $a_{ij}$ είναι πραγματικοί αριθμοί· με $a_{ij}$ συμβολίζουμε το στοιχείο του πίνακα που βρίσκεται στην $i$-οστή γραμμή και $j$-οστή στήλη. Ορίζουμε την ***ορίζουσα*** ενός πίνακα $3 \times 3$ με βάση τον κανόνα

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Χωρίς κάποιον μνημονικό κανόνα, θα ήταν δύσκολο να θυμόμαστε τον τύπο (2). Ο κανόνας που χρειάζεται να μάθουμε είναι ότι κινούμαστε κατά μήκος της πρώτης γραμμής, πολλαπλασιάζοντας το $a_{1j}$ με την ορίζουσα του πίνακα $2 \times 2$ που προκύπτει αν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και την $j$-οστή στήλη, και στη συνέχεια αθροίσουμε αυτά τα γινόμενα, προσέχοντας να βάλουμε ένα μείον μπροστά από τον όρο $a_{12}$. Για παράδειγμα, η ορίζουσα με την οποία πολλαπλασιάζεται ο μεσαίος όρος στον τύπο (2), συγκεκριμένα η

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

προκύπτει με διαγραφή της πρώτης γραμμής και της δεύτερης στήλης του δεδομένου πίνακα $3 \times 3$:

$$\begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

**Παράδειγμα 2**

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0.$$

## Ιδιότητες των οριζουσών

Μια σημαντική ιδιότητα των οριζουσών είναι ότι αν αντιμεταθέσουμε δύο γραμμές ή δύο στήλες αλλάζει το πρόσημο. Για ορίζουσες $2 \times 2$, αυτό έπεται από τον ορισμό. Συγκεκριμένα, για την αντιμετάθεση γραμμών έχουμε

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = -(a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}) = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix},$$

ενώ για την αντιμετάθεση στηλών,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

Αφήνουμε στον αναγνώστη να επαληθεύσει αυτή την ιδιότητα για την περίπτωση των οριζουσών $3 \times 3$.

Μια δεύτερη θεμελιώδης ιδιότητα των οριζουσών είναι ότι *μπορούμε να εξαγάγουμε κοινούς παράγοντες από οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη*. Για ορίζουσες $2 \times 2$, αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix}.$$

Με αντίστοιχο τρόπο, για ορίζουσες $3 \times 3$ έχουμε

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \alpha a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \alpha a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

κ.ο.κ. Τα παραπάνω προκύπτουν από τους ορισμούς. Ειδικότερα, αν κάποια γραμμή ή στήλη αποτελείται από μηδενικά, η τιμή της ορίζουσας είναι μηδέν.

Μια τρίτη θεμελιώδης ιδιότητα των οριζουσών είναι η εξής: *Αν μεταβάλουμε μια γραμμή (ή στήλη) προσθέτοντας κάποια άλλη γραμμή (ή, αντίστοιχα, στήλη) σε αυτήν, η τιμή της ορίζουσας παραμένει αμετάβλητη.* Για την περίπτωση $2 \times 2$, αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + a_1 & b_2 + a_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_2 \\ b_1 + b_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 + a_2 \\ b_1 & b_1 + b_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Για την περίπτωση $3 \times 3$, αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_2 & a_3 \\ b_1 + b_2 & b_2 & b_3 \\ c_1 + c_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

κ.ο.κ. Και αυτή η ιδιότητα αποδεικνύεται με χρήση του ορισμού της ορίζουσας.

**Παράδειγμα 3** Υποθέτουμε ότι

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c}, \qquad \text{δηλαδή } \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = \alpha(b_1, b_2, b_3) + \beta(c_1, c_2, c_3).$$

Δείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

**Λύση** Θα το αποδείξουμε για την περίπτωση όπου $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Η περίπτωση $\alpha = 0 = \beta$ είναι τετριμμένη, ενώ η περίπτωση όπου ακριβώς ένα από τα $\alpha, \beta$ είναι μηδέν είναι απλή τροποποίηση της περίπτωσης για την οποία θα κάνουμε την απόδειξη. Με βάση τις θεμελιώδεις ιδιότητες των οριζουσών, η ζητούμενη ορίζουσα είναι

$$\begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(εξαγωγή του $-1/\alpha$ ως κοινού παράγοντα από τη δεύτερη γραμμή)

$$= \left(-\frac{1}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right)\begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ -\beta c_1 & -\beta c_2 & -\beta c_3 \end{vmatrix}$$

(εξαγωγή του $-1/\beta$ ως κοινού παράγοντα από την τρίτη γραμμή)

$$= \frac{1}{\alpha\beta}\begin{vmatrix} \beta c_1 & \beta c_2 & \beta c_3 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ -\beta c_1 & -\beta c_2 & -\beta c_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(πρόσθεση της δεύτερης γραμμή στην πρώτη γραμμή)}$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ -\beta c_1 & -\beta c_2 & -\beta c_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(πρόσθεση της τρίτης γραμμής στην πρώτη γραμμή)}$$

$$= 0.$$

▲

Με αυτές τις ιδιότητες συνδέεται στενά το γεγονός ότι *μπορούμε να αναπτύξουμε μια ορίζουσα* $3 \times 3$ *ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη* χρησιμοποιώντας για τα πρόσημα τον ακόλουθο πίνακα:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Για παράδειγμα, μπορείτε να επαληθεύσετε ότι μπορούμε να αναπτύξουμε «κατά ελάσσονες» ως προς τη μεσαία γραμμή:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Ας υπολογίσουμε τη δεύτερη ορίζουσα του Παραδείγματος 2 χρησιμοποιώντας αυτόν τον τύπο:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = (-4)(-6) + (5)(12) + (-6)(6) = 0.$$

## Ιστορικό σημείωμα

Φαίνεται πως οι ορίζουσες επινοήθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν για πρώτη φορά από τον Leibniz το 1693 για την επίλυση γραμμικών εξισώσεων. Οι Maclaurin και Cramer ανέπτυξαν τις ιδιότητές τους μεταξύ των ετών 1729 και 1750· ειδικότερα, έδειξαν ότι η λύση του συστήματος εξισώσεων

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

είναι

$$x_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

όπου

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

πράγμα που σήμερα ονομάζεται ***κανόνας του Cramer***. Μολονότι αυτή η μέθοδος δεν είναι ιδιαίτερα αποδοτική από αριθμητικής άποψης, παίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία πινάκων. Αργότερα, οι Vandermonde (1772) και Cauchy (1812) αντιμετωπίζοντας τις ορίζουσες σαν ένα ξεχωριστό θέμα άξιο ειδικής προσοχής ανέπτυξαν την περιοχή πιο συστηματικά. Σε αυτό συνεισέφεραν οι Laplace, Jacobi και άλλοι. Οι τύποι υπολογισμού του όγκου των παραλληλεπιπέδων με βάση τις ορίζουσες οφείλονται στον Lagrange (1775). Θα τους μελετήσουμε στη συνέχεια αυτής της ενότητας. Μολονότι κατά τη διάρκεια του δέκατου ένατου αιώνα οι μαθηματικοί μελετούσαν και τους πίνακες και τις ορίζουσες, τα δύο αντικείμενα θεωρούνταν διαφορετικοί κλάδοι. Για μια πλήρη επισκόπηση της ιστορίας μέχρι το 1900 βλ. T. Muir, *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development* («Η θεωρία των οριζουσών κατά χρονολογική σειρά ανάπτυξής της») (ανατύπωση από Dover, New York, 1960).

## Εξωτερικά γινόμενα

Έχοντας διατυπώσει τις απαραίτητες ιδιότητες των οριζουσών και έχοντας αναφέρει την ιστορία τους, είμαστε πλέον έτοιμοι να προχωρήσουμε στο εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

**Ορισμός** Το εξωτερικό γινόμενο Έστω $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ και $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ δύο διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$. Το ***εξωτερικό γινόμενο*** ή ***διανυσματικό γινόμενο*** των $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, το οποίο συμβολίζεται με $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, ορίζεται ως το διάνυσμα

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k},$$

ή, συμβολικά,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Μολονότι ορίσαμε τις ορίζουσες μόνο για πίνακες *πραγματικών* αριθμών, η παραπάνω τυπική έκφραση που περιέχει και *διανύσματα* είναι ένας χρήσιμος μνημονικός κανόνας για το εξωτερικό γινόμενο.

**Παράδειγμα 4** Βρείτε το $(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

**Λύση**

$$(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}.$$

▲

Ορισμένες αλγεβρικές ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου έπονται από τον ορισμό. Αν τα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$ είναι διανύσματα και τα $\alpha$, $\beta$ και $\gamma$ πραγματικοί αριθμοί, τότε

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$

(ii) $\mathbf{a} \times (\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) = \beta(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \gamma(\mathbf{a} \times \mathbf{c})$ και $(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

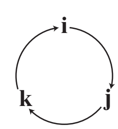
Προσέξτε ότι $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{a})$, λόγω της ιδιότητας (i). Επομένως, $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Ειδικότερα,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Επιπλέον,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j},$$

το οποίο μπορούμε να θυμόμαστε μεταθέτοντας κυκλικά τα $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ως εξής:




Για να δώσουμε μια γεωμετρική ερμηνεία του εξωτερικού γινομένου, θα εισαγάγουμε αρχικά το τριπλό γινόμενο. Δεδομένων τριών διανυσμάτων $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$, ο πραγματικός αριθμός

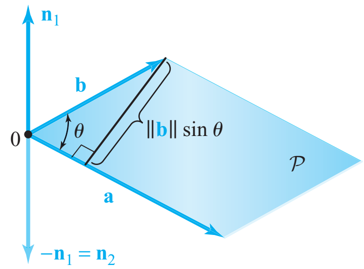
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

καλείται ***τριπλό γινόμενο*** των $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$ (με αυτή τη σειρά). Για να βρούμε έναν τύπο για το τριπλό γινόμενο, θέτουμε $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ και $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$, οπότε

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) \cdot (c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3.\end{aligned}$$

Αυτό είναι το ανάπτυγμα κατά ελάσσονες της τρίτης γραμμής της ορίζουσας, άρα

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$




Σχήμα 1.3.1 Τα $\mathbf{n}_1$ και $\mathbf{n}_2$ είναι τα δύο δυνατά διανύσματα που είναι ορθογώνια με αμφότερα τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ και έχουν νόρμα $\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\,|\sin\theta|$.

Αν το $\mathbf{c}$ είναι ένα διάνυσμα που ανήκει στο επίπεδο που παράγουν τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, τότε η τρίτη γραμμή της ορίζουσας που δίνει το $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ είναι γραμμικός συνδυασμός της πρώτης και της δεύτερης γραμμής, οπότε $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$. Με άλλα λόγια, *το διάνυσμα* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *είναι ορθογώνιο με κάθε διάνυσμα που ανήκει στο επίπεδο που παράγουν τα* $\mathbf{a}$ *και* $\mathbf{b}$, *ειδικότερα με αμφότερα τα* $\mathbf{a}$ *και* $\mathbf{b}$.

Θα υπολογίσουμε τώρα το μήκος του $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - b_1a_3)^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)^2.\end{aligned}$$

Αν αναπτύξουμε τους όρους της τελευταίας έκφρασης και τους ομαδοποιήσουμε, παίρνουμε

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2,$$

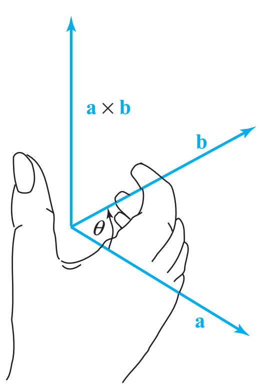
το οποίο ισούται με

$$\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 \cos^2\theta = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 \sin^2\theta,$$

όπου $\theta$ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, $0 \le \theta \le \pi$. Παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες και χρησιμοποιώντας την $\sqrt{k^2} = |k|$, βρίσκουμε ότι $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\||\sin\theta|$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, συμπεραίνουμε ότι το $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ είναι ένα *διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο* $\mathcal{P}$ *που παράγουν τα* $\mathbf{a}$ *και* $\mathbf{b}$, *με μήκος* $\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\||\sin\theta|$. Στο Σχήμα 1.3.1 βλέπουμε ότι αυτό το μήκος ισούται επίσης με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου (με βάση $\|\mathbf{a}\|$ και ύψος $\|\mathbf{b}\sin\theta\|$) που παράγουν τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$. Ωστόσο, υπάρχουν δύο δυνατά διανύσματα που ικανοποιούν αυτές τις συνθήκες, αφού μπορούμε να επιλέξουμε με δύο τρόπους την κάθετη κατεύθυνση στο $\mathcal{P}$. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα στο Σχήμα 1.3.1, όπου παρουσιάζονται οι δύο επιλογές διανυσμάτων $\mathbf{n}_1$ και $-\mathbf{n}_1$ που είναι κάθετα στο $\mathcal{P}$, με $\|\mathbf{n}_1\| = \|-\mathbf{n}_1\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\||\sin\theta|$.

Ποιο διάνυσμα αναπαριστά το $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, το $\mathbf{n}_1$ ή το $-\mathbf{n}_1$; Η απάντηση είναι το $\mathbf{n}_1$. Για να το επιβεβαιώσουμε, μπορούμε να δοκιμάσουμε μερικές περιπτώσεις, όπως $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$. Εν γένει, η κατεύθυνση του $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ προσδιορίζεται με τον «κανόνα του δεξιού χεριού»: Παίρνουμε την παλάμη του *δεξιού μας χεριού* και την τοποθετούμε έτσι ώστε τα δάχτυλα να είναι κυρτωμένα και να δείχνουν από το $\mathbf{a}$ προς το $\mathbf{b}$ μέσω της *οξείας* γωνίας $\theta$, όπως στο Σχήμα 1.3.2. Ο αντίχειράς μας θα δείχνει κατά την κατεύθυνση του $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.




Σχήμα 1.3.2 Ο κανόνας του δεξιού χεριού για τον προσδιορισμό της κατεύθυνσης του $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (που είναι η μία από τις δύο δυνατές).

**Το εξωτερικό γινόμενο** *Γεωμετρικός ορισμός:* Το $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ είναι το διάνυσμα για το οποίο ισχύουν τα εξής:

(1) $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \sin\theta$, το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που παράγουν τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ ($\theta$ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, $0 \le \theta \le \pi$). (Βλ. Σχήμα 1.3.3.)

(2) Το $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ είναι κάθετο στα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, και η τριάδα $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ ακολουθεί τον κανόνα του δεξιού χεριού.

*Τύπος για τις συνιστώσες:*

$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}.$$

*Αλγεβρικοί κανόνες:*

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ αν και μόνο αν τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι παράλληλα ή το $\mathbf{a}$ ή το $\mathbf{b}$ είναι μηδέν.
2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.
3. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.
4. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.
5. $(\alpha\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

*Πίνακας πολλαπλασιασμού:*

| | | Δεύτερος παράγοντας | | |
|---|---|---|---|---|
| | $\times$ | $\mathbf{i}$ | $\mathbf{j}$ | $\mathbf{k}$ |
| Πρώτος παράγοντας | $\mathbf{i}$ | $\mathbf{0}$ | $\mathbf{k}$ | $-\mathbf{j}$ |
| | $\mathbf{j}$ | $-\mathbf{k}$ | $\mathbf{0}$ | $\mathbf{i}$ |
| | $\mathbf{k}$ | $\mathbf{j}$ | $-\mathbf{i}$ | $\mathbf{0}$ |

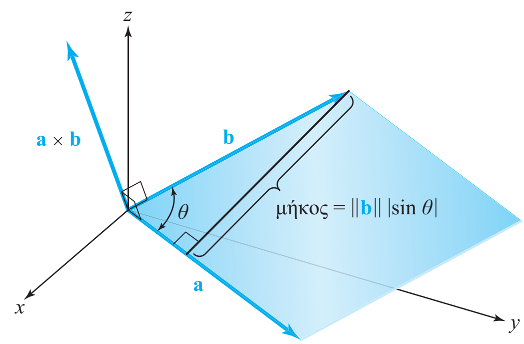
**Παράδειγμα 5** Βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που παράγουν τα διανύσματα $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ και $\mathbf{b} = -\mathbf{i} - \mathbf{k}$.

**Λύση** Υπολογίζουμε το εξωτερικό γινόμενο των $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ εφαρμόζοντας τον τύπο των συνιστωσών ή της ορίζουσας, για $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, b_1 = -1, b_2 = 0, b_3 = -1$:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= [(2)(-1) - (3)(0)]\mathbf{i} + [(3)(-1) - (1)(-1)]\mathbf{j} + [(1)(0) - (2)(-1)]\mathbf{k} \\ &= -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Άρα το εμβαδόν είναι

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{3}. \quad \blacktriangle$$




Σχήμα 1.3.3 Το μήκος του $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ είναι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.

**Παράδειγμα 6** Βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα ορθογώνιο με τα διανύσματα $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ και $\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

**Λύση** Ένα διάνυσμα κάθετο σε αμφότερα τα $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ και $\mathbf{j}+\mathbf{k}$ είναι το εξωτερικό τους γινόμενο, συγκεκριμένα, το διάνυσμα

$$(\mathbf{i}+\mathbf{j}) \times (\mathbf{j}+\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}.$$

Επειδή $\|\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}\| = \sqrt{3}$, το διάνυσμα

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στα $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ και $\mathbf{j}+\mathbf{k}$. ▲

**Παράδειγμα 7** Βρείτε μια ταυτότητα που να συνδέει το εσωτερικό με το εξωτερικό γινόμενο απαλείφοντας το $\theta$ από τους τύπους

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \sin\theta \qquad \text{και} \qquad \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta.$$

**Λύση** Αφού τα $\sin\theta$ και $\cos\theta$ πολλαπλασιάζονται με την ίδια έκφραση, μπορούμε να πάρουμε το τετράγωνο των δύο τύπων και να προσθέσουμε τα αποτελέσματα:

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2,$$

άρα

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2.$$

Αυτή η ταυτότητα είναι ενδιαφέρουσα διότι συνδέει το εσωτερικό με το εξωτερικό γινόμενο. ▲

## Γεωμετρία των οριζουσών

Χρησιμοποιώντας το εξωτερικό γινόμενο, μπορούμε να δώσουμε μια βασική γεωμετρική ερμηνεία στις ορίζουσες $2 \times 2$ και $3 \times 3$. Έστω $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ και $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ δύο διανύσματα στο επίπεδο. Αν $\theta$ είναι η γωνία την οποία σχηματίζουν τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, είδαμε ότι $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\||\sin\theta|$ είναι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με προσκείμενες πλευρές τα **a** και **b**. Το εξωτερικό γινόμενο με τη μορφή ορίζουσας είναι

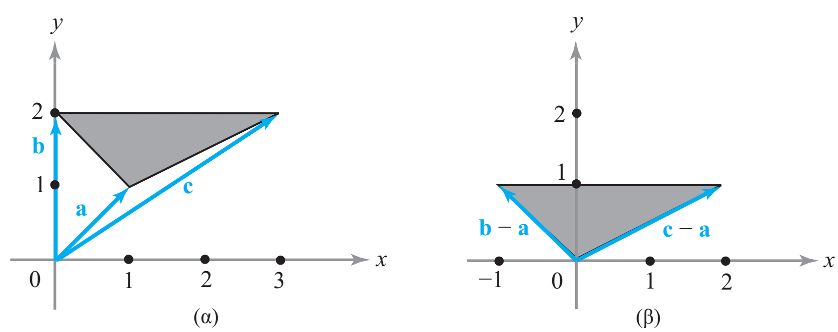
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & a_2 & 0\\ b_1 & b_2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\mathbf{k}.$$

Επομένως, το εμβαδόν $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|$ είναι η απόλυτη τιμή της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1.$$

**Γεωμετρία των οριζουσών 2×2** Η απόλυτη τιμή της ορίζουσας $\left|\begin{smallmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{smallmatrix}\right|$ είναι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με προσκείμενες πλευρές τα διανύσματα $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}$ και $\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}$. Το πρόσημο της ορίζουσας είναι $+$ όταν, μετρημένη κατά την αντιωρολόγια φορά, η γωνία από το **a** στο **b** είναι μικρότερη από $\pi$.

**Παράδειγμα 8** Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές τα σημεία $(1,1)$, $(0,\ 2)$ και $(3,2)$ (βλ. Σχήμα 1.3.4).




Σχήμα 1.3.4 (α) Βρείτε το εμβαδόν $A$ του σκιασμένου τριγώνου εκφράζοντας τις πλευρές ως διαφορές διανυσμάτων (β) ώστε να πάρετε $A=\|(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})\|/2$.

**Λύση** Έστω $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{j}$ και $\mathbf{c}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}$. Είναι προφανές ότι το τρίγωνο με κορυφές τα πέρατα των διανυσμάτων **a**, **b** και **c** έχει το ίδιο εμβαδόν με το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία **0**, $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ και $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ (Σχήμα 1.3.4). Πράγματι, το δεύτερο τρίγωνο προκύπτει με απλή μετατόπιση του πρώτου. Επειδή το εμβαδόν αυτού του μετατοπισμένου τριγώνου είναι το ήμισυ του εμβαδού του παραλληλογράμμου με προσκείμενες πλευρές τα $\mathbf{b}-\mathbf{a}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}$ και $\mathbf{c}-\mathbf{a}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}$, το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα $(1,1)$, $(0,2)$ και $(3,2)$ είναι η απόλυτη τιμή του

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-\frac{3}{2},$$

δηλαδή $3/2$. ▲

Οι ορίζουσες των πινάκων $3\times 3$ μπορούν να ερμηνευθούν ως όγκοι, κατ' αντιστοιχία με την ερμηνεία των οριζουσών $2\times 2$ ως εμβαδών.

**Γεωμετρία των οριζουσών $3 \times 3$** Η απόλυτη τιμή της ορίζουσας

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με προσκείμενες πλευρές τα διανύσματα

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \qquad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}.$$

Για να αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό, παρατηρούμε (βλ. Σχήμα 1.3.5) ότι το μήκος του εξωτερικού γινομένου, δηλαδή το $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$, είναι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με προσκείμενες πλευρές τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$. Επιπλέον, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\| \cos\psi$, όπου $\psi$ είναι η γωνία που σχηματίζει το $\mathbf{c}$ με το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο που παράγουν τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$. Επειδή ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με προσκείμενες πλευρές τα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$ είναι το γινόμενο του εμβαδού της βάσης $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ επί το ύψος $\|\mathbf{c}\|| \cos\psi|$, ο όγκος είναι $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c})|$. Προηγουμένως είδαμε ότι $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = D$, άρα ο όγκος ισούται με την απόλυτη τιμή της $D$.

**Παράδειγμα 9** Βρείτε τον όγκο του παραλληλεπιπέδου το οποίο παράγουν τα τρία διανύσματα $\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ και $5\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$.

**Λύση** Ο όγκος είναι η απόλυτη τιμή της

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

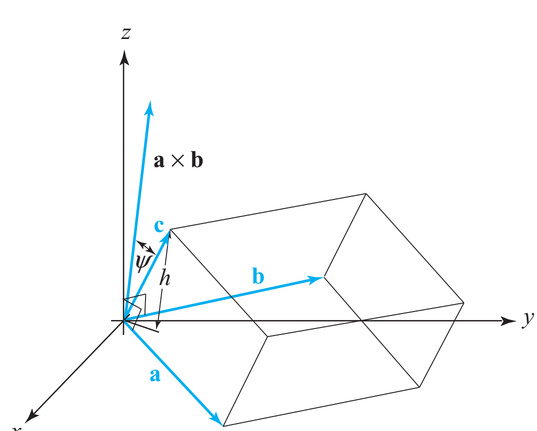
Αν αναπτύξουμε αυτή την ορίζουσα κατά ελάσσονες ως προς τη δεύτερη στήλη, ο μόνος μη μηδενικός όρος είναι ο

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}(1) = -11,$$

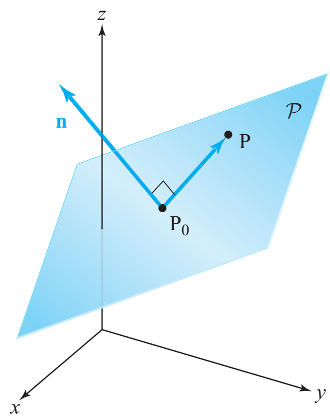
άρα ο όγκος ισούται με 11. ▲

## Εξισώσεις επιπέδων

Έστω $\mathcal{P}$ ένα επίπεδο στον χώρο, $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ένα σημείο αυτού του επιπέδου, και έστω $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ ένα διάνυσμα κάθετο σε αυτό το επίπεδο (βλ Σχήμα 1.3.6). Έστω




Σχήμα 1.3.5 Ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που παράγουν τα **a**, **b**, **c** είναι η απόλυτη τιμή της ορίζουσας του πίνακα $3 \times 3$ με γραμμές τα **a**, **b**, **c**.




Σχήμα 1.3.6 Τα σημεία P του επιπέδου που διέρχεται από το $P_0$ και είναι κάθετο στο **n** ικανοποιούν την εξίσωση $\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n} = 0$.

$P = (x, y, z)$ ένα σημείο του $\mathbb{R}^3$. Το P ανήκει στο επίπεδο $\mathcal{P}$ αν και μόνο αν το διάνυσμα $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$ είναι κάθετο στο **n**, δηλαδή $\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n} = 0$, ή, ισοδύναμα,

$$(A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}) \cdot [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}] = 0.$$

Επομένως,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

**Εξίσωση επιπέδου στον χώρο** Η εξίσωση του επιπέδου $\mathcal{P}$ που διέρχεται από το $(x_0, y_0, z_0)$ και έχει κάθετο διάνυσμα το $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ είναι

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0\cdot$$

δηλαδή $(x, y, z) \in \mathcal{P}$ αν και μόνο αν

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

όπου $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Οι τέσσερις αριθμοί $A, B, C$ και $D$ δεν καθορίζονται μονοσήμαντα από το επίπεδο $\mathcal{P}$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι το $(x, y, z)$ ικανοποιεί την εξίσωση $Ax + By + Cz + D = 0$ αν και μόνο αν ικανοποιεί επίσης τη σχέση

$$(\lambda A)x + (\lambda B)y + (\lambda C)z + (\lambda D) = 0$$

για οποιαδήποτε σταθερά $\lambda \neq 0$. Επιπλέον, αν τα $A, B, C, D$ και $A', B', C', D'$ ορίζουν το ίδιο επίπεδο $\mathcal{P}$, τότε $A = \lambda A'$, $B = \lambda B'$, $C = \lambda C'$, $D = \lambda D'$ για κάποιον πραγματικό αριθμό $\lambda$. Συνεπώς, τα $A, B, C, D$ ***προσδιορίζονται από το $\mathcal{P}$ μονοσήμαντα αν αγνοήσουμε πολλαπλασιασμό με κάποιον πραγματικό αριθμό***.

**Παράδειγμα 10** Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ και περιέχει το σημείο $(1, 0, 0)$.

**Λύση** Με βάση τη γενική μορφή $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, το επίπεδο είναι το $1(x - 1) + 1(y - 0) + 1(z - 0) = 0$, δηλαδή το $x + y + z = 1$. ▲

**Παράδειγμα 11** Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που περιέχει τα τρία σημεία $(1,1,1)$, $(2,0,0)$ και $(1,1,0)$.

**Λύση** *Μέθοδος 1.* Αυτή είναι μια μέθοδος «ωμής βίας», την οποία μπορεί να χρησιμοποιήσει κανείς αν έχει ξεχάσει τις διανυσματικές μεθόδους. Οποιοδήποτε επίπεδο έχει εξίσωση της μορφής $Ax+By+Cz+D=0$. Επειδή τα σημεία $(1,1,1)$, $(2,0,0)$ και $(1,1,0)$ ανήκουν στο επίπεδο, έχουμε

$$\begin{aligned} A+B+C+D&=0,\\ 2A\qquad\quad +D&=0,\\ A+B\qquad +D&=0. \end{aligned}$$

Με τη μέθοδος της απαλοιφής, το παραπάνω σύστημα ανάγεται στο

$$\begin{aligned} 2A+D&=0 \quad &&(\text{δεύτερη εξίσωση})\\ 2B+D&=0 \quad &&(2\times\text{τρίτη}-\text{δεύτερη}),\\ C&=0 \quad &&(\text{πρώτη}-\text{τρίτη}). \end{aligned}$$

Επειδή οι αριθμοί $A, B, C$ και $D$ μπορούν να πολλαπλασιαστούν με οποιονδήποτε μη μηδενικό πραγματικό αριθμό, μπορούμε να επιλέξουμε την τιμή ενός εξ αυτών, φερ' ειπείν $A=1$, και οι τιμές των υπολοίπων ορίζονται μονοσήμαντα βάσει αυτής. Παίρνουμε $A=1$, $D=-2$, $B=1$, $C=0$. Άρα μια εξίσωση του επιπέδου που περιέχει τα δεδομένα σημεία είναι η $x+y-2=0$.

*Μέθοδος 2.* Έστω $\mathrm{P}=(1,1,1)$, $\mathrm{Q}=(2,0,0)$, $\mathrm{R}=(1,1,0)$. Κάθε διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο πρέπει να είναι ορθογώνιο με τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{RP}}$, τα οποία είναι παράλληλα στο επίπεδο, διότι τα άκρα τους ανήκουν στο επίπεδο. Επομένως, το $\mathbf{n}=\overrightarrow{\mathrm{QP}}\times\overrightarrow{\mathrm{RP}}$ είναι κάθετο στο επίπεδο. Υπολογίζοντας το εξωτερικό γινόμενο, έχουμε

$$\mathbf{n}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\mathbf{i}+\mathbf{j}.$$

Επειδή το σημείο $(2,0,0)$ ανήκει στο επίπεδο, συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση του επιπέδου είναι $(x-2)+(y-0)+0\cdot(z-0)=0$, δηλαδή $x+y-2=0$. ▲

Δύο επίπεδα καλούνται ***παράλληλα*** όταν τα κάθετα διανύσματά τους είναι παράλληλα. Επομένως, τα επίπεδα $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ και $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ είναι παράλληλα όταν τα $\mathbf{n}_1=A_1\mathbf{i}+B_1\mathbf{j}+C_1\mathbf{k}$ και $\mathbf{n}_2=A_2\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+C_2\mathbf{k}$ είναι παράλληλα, δηλαδή $\mathbf{n}_1=\sigma\mathbf{n}_2$ για κάποια σταθερά $\sigma$. Για παράδειγμα, τα επίπεδα

$$x-2y+z=0 \qquad \text{και} \qquad -2x+4y-2z=10$$

είναι παράλληλα, αλλά τα επίπεδα

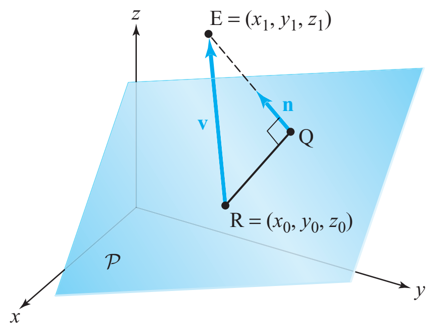
$$x-2y+z=0 \qquad \text{και} \qquad 2x-2y+z=10$$

δεν είναι παράλληλα.

## Απόσταση σημείου από επίπεδο

Θα υπολογίσουμε τώρα την απόσταση ενός σημείου $\mathrm{E}=(x_1,y_1,z_1)$ από το επίπεδο $\mathcal{P}$ το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=Ax+By+Cz+D=0$. Για να το κάνουμε, θα θεωρήσουμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα

$$\mathbf{n}=\frac{A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$




Σχήμα 1.3.7 Η γεωμετρία για τον προσδιορισμό της απόστασης του σημείου E από το επίπεδο $\mathcal{P}$.

που είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο. Φέρνουμε μια κάθετη από το E στο επίπεδο και κατασκευάζουμε το τρίγωνο REQ του Σχήματος 1.3.7. Η απόσταση $d = \|\overrightarrow{\mathrm{EQ}}\|$ είναι το μήκος της προβολής του $\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathrm{RE}}$ (του διανύσματος που ξεκινά από το R και καταλήγει στο E) επί του $\mathbf{n}$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\text{Απόσταση} = |\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}| &= |[(x_1 - x_0)\mathbf{i} + (y_1 - y_0)\mathbf{j} + (z_1 - z_0)\mathbf{k}]\cdot\mathbf{n}| \\ &= \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.\end{aligned}$$

Αν το επίπεδο δίνεται στη μορφή $Ax + By + Cz + D = 0$, τότε για οποιοδήποτε σημείο $(x_0, y_0, z_0)$ του επιπέδου, $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. Με αντικατάσταση στον προηγούμενο τύπο παίρνουμε το εξής:

**Απόσταση σημείου από επίπεδο** Η απόσταση του σημείου $(x_1, y_1, z_1)$ από το επίπεδο $Ax + By + Cz + D = 0$ είναι

$$\text{Απόσταση} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

**Παράδειγμα 12** Βρείτε την απόσταση του $\mathrm{Q} = (2, 0, -1)$ από το επίπεδο $3x - 2y + 8z + 1 = 0$.

**Λύση** Στον τύπο του παραπάνω πλαισίου αντικαθιστούμε τις τιμές $x_1 = 2y_1 = 0$, $z_1 = -1$ (το σημείο) και $A = 3$, $B = -2$, $C = 8$, $D = 1$ (το επίπεδο) και παίρνουμε

$$\text{Απόσταση} = \frac{|3\cdot 2 + (-2)\cdot 0 + 8(-1) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 8^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{77}} = \frac{1}{\sqrt{77}}.$$

▲

## Ιστορικό σημείωμα

### Η προέλευση των διανυσμάτων, του βαθμωτού, του εσωτερικού και του εξωτερικού γινομένου

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, ΚΥΒΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ. Από τις βαβυλωνιακές πήλινες πινακίδες γνωρίζουμε ότι ο σπουδαίος αυτός πολιτισμός διέθετε τον τετραγωνικό τύπο, πράγμα που επέτρεπε στους Βαβυλωνίους να λύνουν (λεκτικά) τετραγωνικές εξισώσεις. Επειδή η έννοια των αρνητικών αριθμών έπρεπε να περιμένει μέχρι τον δέκατο έκτο αιώνα για να έρθει στο φως του ήλιου, οι Βαβυλώνιοι δεν ασχολούνταν με τις αρνητικές (ή τις φανταστικές) λύσεις.

Με την Αναγέννηση και την εκ νέου ανακάλυψη της αρχαίας γνώσης, άρχισαν να απασχολούν τους Ιταλούς μαθηματικούς οι λύσεις των κυβικών εξισώσεων $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, όπου τα $a, b$ και $c$ είναι θετικοί αριθμοί.

Γύρω στο 1500, ο Scipione del Ferro, καθηγητής στη Μπολόνια (το αρχαιότερο πανεπιστήμιο της Ευρώπης), κατάφερε να λύσει τις κυβικές εξισώσεις της μορφής $x^3 + b\,x = c$, αλλά κράτησε την ανακάλυψή του μυστική. Πριν από τον θάνατό του, άφησε τον τύπο του στον διάδοχό του, τον Antonio Fior, ο οποίος κράτησε και αυτός για κάποιον καιρό τον τύπο για τον εαυτό του. Ο τύπος παρέμεινε μυστικός μέχρι την εμφάνισή ενός λαμπρού, αυτοδίδακτου μαθηματικού ονόματι Niccolo Fontana, γνωστού επίσης ως Tartaglia (ο τραυλός). Ο Tartaglia ισχυρίστηκε ότι μπορούσε να λύσει την κυβική εξίσωση. Ο Fior, αισθανόμενος ότι έπρεπε να προστατεύσει το πρωτείο του del Ferro, απάντησε προκαλώντας τον Tartaglia σε δημόσια αναμέτρηση.

Σύμφωνα με τις πηγές, ο Tartaglia κατάφερε να λύσει και τις τριάντα κυβικές εξισώσεις που του έθεσε ο Fior. Μάλιστα, μερικοί μελετητές πιστεύουν ότι ο Tartaglia ανακάλυψε τον τύπο για τις λύσεις της $x^3 + c\,x = d$ μερικές μόνο μέρες πριν από την αναμέτρηση.

Ο σπουδαιότερος μαθηματικός του δέκατου έκτου αιώνα, ο Gerolamo Cardano (1501–1576) —ένας λόγιος της Αναγέννησης, μαθηματικός, φυσικός και μάντης— μας έδωσε την πρώτη δημοσιευμένη λύση της γενικής κυβικής εξίσωσης. Μολονότι γεννήθηκε φτωχός, ο Cardano (όπως και ο Tartaglia) απέκτησε, με προσπάθεια και χάρις στο φυσικό του ταλέντο, μεγάλη φήμη. Ο Cardano είναι ο συγγραφέας του πρώτου βιβλίου πάνω στα τυχερά παιχνίδια (που σηματοδοτεί την αρχή της σύγχρονης θεωρίας πιθανοτήτων) και επίσης του *Ars Magna* («Η μεγάλη τέχνη»), το οποίο σηματοδοτεί την αρχή της σύγχρονης άλγεβρας. Σε αυτό το βιβλίο ο Cardano δημοσίευσε τη λύση της *γενικής* κυβικής εξίσωσης $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Πώς τη βρήκε;

Ενόσω δούλευε πάνω στο βιβλίο του για την άλγεβρα, και γνωρίζοντας ότι ο Tartaglia είχε καταφέρει να λύσει κάποιες μορφές της κυβικής εξίσωσης, ο Cardano, το 1539, έγραψε στον Tartaglia ζητώντας του να συναντηθούν. Χρειάστηκε να τον καλοπιάσει, αλλά τελικά ο Tartaglia συμφώνησε. Σε αυτή τη συνάντηση, αποσπώντας την υπόσχεση ότι θα παραμείνει μυστική (και γνωρίζουμε πώς καταλήγουν συνήθως αυτές οι υποσχέσεις), ο Tartaglia αποκάλυψε τη λύση του, από την οποία ο Cardano κατάφερε να συναγάγει τη λύση της γενικής εξίσωσης, την οποία παρουσίασε στο *Ars Magna*. Αισθανόμενος προδομένος, ο Tartaglia εξαπέλυσε δριμεία επίθεση στον Cardano, με αποτέλεσμα μια μικρή σαπουνόπερα.

Αυτό που είναι σημαντικό για εμάς αυτή τη στιγμή είναι ότι, ως συνέπεια της μεθόδου λύσης, συνέβη κάτι πολύ παράξενο. Ας θεωρήσουμε την κυβική εξίσωση $x^3 - 15x = 4$. Η μόνη θετική της ρίζα είναι το $4$. Ωστόσο, ο τύπος των Tartaglia–Cardano για τη λύση δίνει το

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \tag{3}$$

ως θετική ρίζα. Άρα αυτός ο αριθμός πρέπει να ισούται με $4$. Αυτό όμως *δεν* μπορεί να *έχει νόημα*, διότι μέσα στην κυβική ρίζα παίρνουμε την τετραγωνική ρίζα ενός αρνητικού αριθμού — κάτι που εκείνη την εποχή ήταν απολύτως αδιανόητο. Αυτό ήταν πραγματικό σοκ. Πάνω από 100 χρόνια αργότερα, το 1702, όταν ο Leibniz, που συνανακάλυψε τον απειροστικό λογισμό, έδειξε στον μεγάλο Δανό επιστήμονα Christiaan Huygens τον τύπο

$$\sqrt{6} = \sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}}, \tag{4}$$

ο Huygens έμεινε άναυδος και παρατήρησε ότι αυτή η ισότητα «υπερβαίνει τα όρια της ανθρώπινης νόησης.» [Προσπαθήστε (όχι αυστηρά) να επαληθεύσετε μόνοι σας τους τύπους (3) και (4).]

Είτε είχε νόημα είτε όχι, ο τύπος των Tartaglia και Cardano ανάγκασε τους μαθηματικούς να έρθουν αντιμέτωποι με τις τετραγωνικές ρίζες των αρνητικών αριθμών (ή τους *φανταστικούς αριθμούς*, όπως ονομάζονται σήμερα).

Η ΩΡΙΜΑΝΣΗ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ. Για πάνω από δύο αιώνες, αριθμοί όπως ο $i = \sqrt{-1}$ αντιμετωπίζονταν με μεγάλη καχυποψία. Η τετραγωνική ρίζα οποιουδήποτε αρνητικού αριθμού μπορεί να γραφτεί συναρτήσει του $i$. Για παράδειγμα, $\sqrt{-a} = \sqrt{(a)(-1)} = \sqrt{a}\,\sqrt{-1}$. Στα μέσα του δέκατου όγδοου αιώνα, ο Ελβετός μαθηματικός Leonhard Euler συνέδεσε τους καθολικούς συμπαντικούς αριθμούς $e$ και $\pi$ με τον φανταστικό αριθμό $i$. Ό,τι και να ήταν ή να σήμαινε το $i$, έπεται κατ' ανάγκη ότι

$$e^{\pi i} = -1,$$

δηλαδή το $e$ «υψωμένο στη δύναμη $\pi i$ ισούται με $-1$». Επομένως, οι συμπαντικοί αυτοί αριθμοί, αντανακλώντας πιθανώς κάποιο βαθύτερο μυστήριο, συνδέονται μεταξύ τους με έναν πολύ απλό τύπο.

Στις αρχές του δέκατου ένατου αιώνα, ο Γερμανός μαθηματικός Karl Friedrich Gauss κατάφερε να αποδείξει το *θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας*, σύμφωνα με το οποίο κάθε πολυώνυμο $n$-οστού βαθμού έχει $n$ ρίζες (μερικές από τις οποίες ή όλες μπορεί να είναι φανταστικές· δηλαδή οι ρίζες είναι της μορφής $a + bi$, όπου, όπως προηγουμένως, $i = \sqrt{-1}$ και τα $a$ και $b$ είναι πραγματικοί αριθμοί).

Στα μέσα του δέκατου ένατου αιώνα, ο Γάλλος μαθηματικός Augustin-Louis Cauchy και ο Γερμανός μαθηματικός Bernhard Riemann ανέπτυξαν τον διαφορικό λογισμό για συναρτήσεις μίας μιγαδικής μεταβλητής. Ένα παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η $F(z) = z^n$, όπου $z = a + bi$. Σε αυτή την περίπτωση, εξακολουθεί να ισχύει ο συνηθισμένος τύπος για την παράγωγο $F'(z) = nz^{n-1}$. Ωστόσο, εισάγοντας τους φανταστικούς αριθμούς, ο Cauchy κατάφερε να υπολογίσει «πραγματικά ολοκληρώματα» που δεν μπορούσαν να υπολογιστούν μέχρι τότε. Για παράδειγμα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

και ότι

$$\int_0^\pi \log \sin x \, dx = -\pi \log 2.$$

Επρόκειτο για εντυπωσιακά αποτελέσματα.

Συνοψίζοντας, η επίλυση της κυβικής εξίσωσης, το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας και ο υπολογισμός πραγματικών ολοκληρωμάτων απέδειξαν πόσο χρήσιμη ήταν η χρήση των φανταστικών αριθμών $a + bi$, μολονότι δεν αποτελούσαν (τουλάχιστον όχι ακόμα) *στέρεο έδαφος*. Υπήρχαν πράγματι ή ήταν απλώς αποκυήματα της *φαντασίας* μας και άρα πραγματικά *φανταστικοί*;

Ο ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΤΟΥ HAMILTON. Πολλοί μαθηματικοί μετά τον Cardano συνεισέφεραν σημαντικά στην περιοχή των φανταστικών (ή μιγαδικών) αριθμών, συμπεριλαμβανομένων των Argand, Wessel και Gauss —οι οποίοι τους αναπαρέστησαν όλοι γεωμετρικά. Ωστόσο, ο σύγχρονος, αυστηρός ορισμός των μιγαδικών αριθμών οφείλεται στον μεγάλο Ιρλανδό μαθηματικό William Rowan Hamilton (βλ. Σχήμα 1.3.8). Μετά τον Νεύτωνα, ο οποίος εισήγαγε την ιδέα του διανύσματος επινοώντας την έννοια της δύναμης, ο Hamilton ήταν, πέραν πάσης αμφιβολίας, η πιο σημαντική και ξεχωριστή μορφή στην ανάπτυξη του διανυσματικού λογισμού. Οι όροι *διάνυσμα* και *βαθμωτή ποσότητα* που χρησιμοποιούμε σήμερα οφείλονται στον Hamilton.

Σχήμα 1.3.8 Sir William Rowan Hamilton (1805–1865).

Ο William Rowan Hamilton γεννήθηκε στο Δουβλίνο της Ιρλανδίας τα μεσάνυχτα της 3ης Αυγούστου 1805. Το 1823 μπήκε στο Trinity College του Δουβλίνου. Η πανεπιστημιακή του σταδιοδρομία ήταν δίχως αμφιβολία εκπληκτική. Στο τρίτο έτος, το Trinity College τού πρόσφερε την καθηγητική θέση Andrew's Chair of Astronomy, ενώ το κράτος τον έχρισε Βασιλικό Αστρονόμο της Ιρλανδίας. Αυτές οι διακρίσεις τού απονεμήθηκαν για τη θεωρητική πρόβλεψη που έκανε (το 1824) για δύο εντελώς νέα και απρόσμενα οπτικά φαινόμενα, την εσωτερική και εξωτερική κωνική διάθλαση.

Το 1827 είχε ήδη αναπτύξει ενδιαφέρον για τους φανταστικούς αριθμούς. Έγραψε ότι «το σύμβολο $\sqrt{-1}$ είναι παράλογο και συμβολίζει μια αδύνατη εξαγωγή…» Έθεσε ως στόχο να βασίσει την ιδέα των μιγαδικών αριθμών σε στέρεα λογικά θεμέλια. Η λύση που έδωσε ήταν να ορίσει τον μιγαδικό αριθμό $a + bi$ ως το σημείο $(a, b)$ του επιπέδου $\mathbb{R}^2$, σχεδόν ακριβώς όπως κάνουμε σήμερα. Επομένως, ο φανταστικός αριθμός $bi$ για τον Hamilton ήταν απλώς το σημείο $(0, b)$ του άξονα $y$. Η διαφορά μεταξύ μιγαδικών αριθμών και καρτεσιανού επιπέδου ήταν ότι ο Hamilton υιοθέτησε τον συνήθη τύπο του πολλαπλασιασμού για τους μιγαδικούς αριθμούς:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

και όρισε έναν νέο πολλαπλασιασμό στο μιγαδικό επίπεδο:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Έτσι, το $i = \sqrt{-1}$ εξαφανίζεται μετατρεπόμενο στο σημείο $(0, 1)$, και μαζί του εξαφανίζεται και το μυστήριο και η σύγχυση σχετικά με τους μιγαδικούς αριθμούς.

ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΙ ΣΤΑ ΤΕΤΡΑΔΟΝΙΑ. Σύμφωνα με την ερμηνεία του Hamilton, οι *μιγαδικοί αριθμοί δεν είναι τίποτα περισσότερο από την επέκταση των πραγματικών αριθμών σε μια νέα διάσταση, στις δύο διαστάσεις*. Ο Hamilton όμως, που έκανε πολύ σημαντική δουλειά και στη μηχανική, γνώριζε καλά ότι οι δύο διαστάσεις είναι πολύ περιοριστικές για τη χωρική ανάλυση που απαιτείται για την κατανόηση της φυσικής του τριδιάστατου κόσμου. Γι' αυτό, ο Hamilton επιχείρησε να βρει ένα τριαδικό σύστημα, δηλαδή έναν αποδεκτό[1] τρόπο πολλαπλασιασμού των σημείων $(a, b, c)$ του $\mathbb{R}^3$, ή, ας πούμε, των διανυσμάτων $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$.

Το 1843, ο Hamilton συνειδητοποίησε ότι η αναζήτησή του ήταν μάταιη. Τότε όμως, στις 16 Οκτωβρίου 1843, ο Hamilton ανακάλυψε ότι αυτό που δεν μπορούσε να καταφέρει για τον $\mathbb{R}^3$ μπορούσε να το καταφέρει για τον $\mathbb{R}^4$· ανακάλυψε τα *τετραδόνια*, ένα εντελώς νέο αριθμητικό σύστημα.

Ο Hamilton[2] συνειδητοποίησε ότι ο πολλαπλασιασμός που αναζητούσε μπορούσε να οριστεί για τις τετράδες $(a, b, c, d)$, τις οποίες συμβόλισε ως

$$a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}.$$

Το $a$ καλούνταν *βαθμωτό μέρος* και το $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ *διανυσματικό μέρος*. Στην πραγματικότητα, η συγκεκριμένη τετράδα, κατ' αντιστοιχία με τους μιγαδικούς αριθμούς, σήμαινε το σημείο $(a, b, c, d)$ του $\mathbb{R}^4$. Ο πίνακας πολλαπλασιασμού που όρισε ήταν ο εξής:

$$\begin{gathered}\mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}\\ \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik}\\ \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}\\ \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1.\end{gathered}$$

Ο Hamilton συνέχισε να πιστεύει *με πάθος* στα τετραδόνιά του μέχρι το τέλος της ζωής του. Δυστυχώς, οι ιστορικές εξελίξεις κινήθηκαν προς άλλη κατεύθυνση.

Το πρώτο βήμα απομάκρυνσης από τα τετραδόνια έκανε μάλιστα κάποιος που πίστευε ακράδαντα στη σημασία των τετραδονίων, συγκεκριμένα ο Peter Guthrie Tait, ο οποίος γεννήθηκε το 1831 κοντά στο Εδιμβούργο της Σκωτίας. Το 1860, ο Tait ανέλαβε την έδρα Φυσικής Φιλοσοφίας στο Πανεπιστήμιο του Εδιμβούργου, όπου παρέμεινε μέχρι τον θάνατό του το 1901. Το 1867, έγραψε το *Elementary Treatises on Quaternions* («Στοιχειώδεις πραγματείες περί τετραδονίων»), ένα κείμενο στο οποίο τονίζονταν οι φυσικές εφαρμογές. Το τρίτο κεφάλαιο ήταν το πιο σημαντικό. Σε αυτό, ο Tait εξέτασε το τετραδονιακό γινόμενο των δύο διανυσμάτων

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{w} = a'\mathbf{i} + b'\mathbf{j} + c'\mathbf{k}.$$

Το γινόμενο $\mathbf{vw}$, όπως το είχε ορίσει ο Hamilton, είναι

$$\begin{aligned}&(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})(a'\mathbf{i} + b'\mathbf{j} + c'\mathbf{k})\\ &\quad = -(aa' + bb' + cc') + (bc' - cb')\mathbf{i} + (ac' - ca')\mathbf{j} + (ab' - ba')\mathbf{k}\end{aligned}$$

ή, με σύγχρονο συμβολισμό,

$$\mathbf{vw} = -(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times \mathbf{w},$$

όπου $\cdot$ είναι το σημερινό εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων και $\times$ το εξωτερικό γινόμενο. Ο Tait ανακάλυψε τους τύπους

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| \cos\theta \qquad \text{και} \qquad \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| \sin\theta,$$

[1] Για τον Hamilton, «αποδεκτός» σήμαινε να ισχύει ο προσεταιριστικός νόμος του πολλαπλασιασμού.
[2] *North British Review*, **14** (1858), σελ. 57.

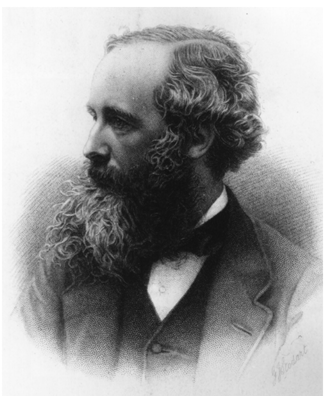
όπου $\theta$ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$. Επιπλέον, απέδειξε ότι το $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ ήταν ορθογώνιο με τα $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$, δίνοντας έτσι μια *γεωμετρική* ερμηνεία στο τετραδονιακό γινόμενο δύο διανυσμάτων.

Αυτό σήμανε την αρχή της απομάκρυνσης από τη μελέτη των τετραδονίων και την επιστροφή στα διανύσματα του Νεύτωνα. Το τετραδονιακό γινόμενο αντικαταστάθηκε τελικά από δύο ξεχωριστά γινόμενα, το εσωτερικό και το εξωτερικό γινόμενο.

Παρεμπιπτόντως, μπορεί να αναρωτιέστε γιατί ο Hamilton δεν ανακάλυψε πρώτα το εξωτερικό γινόμενο, αφού είναι ένα γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$. Ο λόγος είναι ότι δεν είχε μια θεμελιώδη ιδιότητα που απαιτούσε — συγκεκριμένα, δεν ήταν προσεταιριστικό:[3]

$$0 = (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{k} \neq \mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) = -\mathbf{k}.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Euler ανακάλυψε το εξωτερικό γινόμενο στη μορφή του με συνιστώσες το 1750, ενώ τρία χρόνια νωρίτερα από τον Hamilton, ο Olinde Rodrigues είχε ανακαλύψει επίσης μια μορφή του τετραδονιακού πολλαπλασιασμού.



Σχήμα 1.3.9 James Clerk Maxwell (1831–1879).

Η ΑΠΟΜΑΚΡΥΝΣΗ ΑΠΟ ΤΑ ΤΕΤΡΑΔΟΝΙΑ. Οι επιστήμονες που φέρουν την τελική ευθύνη για τον θάνατο τον τετραδονίων ήταν ο James Clerk Maxwell (βλ. Σχήμα 1.3.9), ο Oliver Heaviside και ο Josiah Willard Gibbs, εκ των θεμελιωτών της στατιστικής μηχανικής. Τη δεκαετία του 1860, ο Maxwell διατύπωσε τις μνημειώδεις εξισώσεις του για τον ηλεκτρισμό και τον μαγνητισμό. Ο Maxwell δεν χρησιμοποίησε διανυσματικό συμβολισμό (δεν υπήρχε) και έγραψε τις εξισώσεις του σε μια μορφή που σήμερα θα αποκαλούσαμε «μορφή με συνιστώσες». Γύρω στο 1870, ο Tait άρχισε να αλληλογραφεί με τον Maxwell, κεντρίζοντας το ενδιαφέρον του για τα τετραδόνια.

Το 1873, ο Maxwell δημοσίευσε το επικό του έργο *Treatise on Electricity and Magnetism* («Πραγματεία περί ηλεκτρισμού και μαγνητισμού»). Σε αυτό (όπως θα κάνουμε στο Κεφάλαιο 8), ο Maxwell διατύπωσε τις εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου χρησιμοποιώντας τετραδόνια, παρακινώντας έτσι τους φυσικούς και τους μαθηματικούς να ασχοληθούν προσεκτικότερα μαζί τους. Από αυτό το χειρόγραφο πολλοί έχουν συμπεράνει ότι ο Maxwell ήταν υποστηρικτής της «τετραδονιακής προσέγγισης» για τη φυσική. Η αλήθεια είναι, όμως, ότι ο Maxwell ήταν απρόθυμος να χρησιμοποιήσει τα τετραδόνια. Μάλιστα, ήταν ο ίδιος ο Maxwell αυτός που ξεκίνησε τη διαδικασία διαχωρισμού του *διανυσματικού* μέρους του γινομένου δύο τετραδονίων (του εξωτερικού γινομένου) από το *βαθμωτό* μέρος (το εσωτερικό γινόμενο).

Είναι γνωστό ότι ο Maxwell προβληματιζόταν με το γεγονός ότι το βαθμωτό μέρος του «τετραγώνου» ενός διανύσματος ($\mathbf{v}\mathbf{v}$) ήταν πάντα αρνητικό ($-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$), το οποίο στην περίπτωση ενός διανύσματος ταχύτητας μπορούσε να ερμηνευτεί σαν αρνητική κινητική ενέργεια — μια απαράδεκτη ιδέα!

Αυτοί που έκαναν το τελικό βήμα της απομάκρυνσης από τα τετραδόνια ήταν οι Heaviside και Gibbs. Ο Heaviside, ένας ανεξάρτητος ερευνητής με ενδιαφέρον για τον ηλεκτρισμό και τον μαγνητισμό, και ο Gibbs, καθηγητής μαθηματικής φυσικής στο Yale, σχεδόν ταυτόχρονα —και ανεξάρτητα— δημιούργησαν το σύγχρονο σύστημα διανυσματικής ανάλυσης, που έχουμε μόλις αρχίσει να μελετάμε.

Το 1879, ο Gibbs δίδαξε στο Yale ένα μάθημα διανυσματικής ανάλυσης με εφαρμογές στον ηλεκτρισμό και τον μαγνητισμό. Κίνητρο αυτής της πραγματείας ήταν αναμφίβολα η έλευση των εξισώσεων του Maxwell, τις οποίες θα μελετήσουμε στο Κεφάλαιο 8. Το 1884, δημοσίευσε το

[3]Είναι ενδιαφέρον ότι αν δεν μας ενδιαφέρει η προσεταιριστικότητα, υπάρχει και ένα διανυσματικό γινόμενο με τις περισσότερες από τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου στον $\mathbb{R}^7$. Το γινόμενο αυτό ορίζει ένα άλλο αριθμητικό σύστημα που καλείται *οκταδόνια*, το οποίο υπάρχει στον $\mathbb{R}^8$. Ο λόγος της ανυπαρξίας εξωτερικού γινόμενο σε άλλες διαστάσεις ξεφεύγει από το πλαίσιο αυτού του βιβλίου. Για περισσότερες πληροφορίες, βλ. *American Mathematical Monthly*, **74** (1967), σελ. 188–194, και **90** (1983), σελ. 697, καθώς επίσης και J. Baez, «The Octonians,» *Bulletin of the American Mathematical Society*, **39** (2002), σελ. 145–206. Αποδεικνύεται ότι συστήματα σαν τα τετραδόνια και τα οκταδόνια εμφανίζονται μόνο στη διάσταση 1 (οι πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R}$), στη διάσταση 2 (οι μιγαδικοί αριθμοί), στη διάσταση 4 (τα τετραδόνια) και στη διάσταση 8 (τα οκταδόνια). Από την άλλη πλευρά, ο «σωστός» τρόπος επέκτασης του εξωτερικού γινομένου είναι η εισαγωγή της έννοιας των *διαφορικών μορφών*, η οποία υπάρχει σε *οποιαδήποτε* διάσταση. Θα μελετήσουμε την κατασκευή τους στην Ενότητα 8.5.

*Elements of Vector Analysis* («Στοιχεία διανυσματικής ανάλυσης»), ένα βιβλίο όπου αναπτύσσονται πλήρως όλες οι ιδιότητες του εσωτερικού και του εξωτερικού γινομένου. Γνωρίζοντας ότι πολλά από όσα έγραψε ο Gibbs οφείλονταν στην πραγματικότητα στον Tait, οι σύγχρονοι του Gibbs δεν θεώρησαν το βιβλίο του ιδιαίτερα πρωτότυπο. Ωστόσο, αποτελεί μία από τις πηγές γέννησης της σύγχρονης διανυσματικής ανάλυσης.

Η θαυμάσια δουλειά του Maxwell αποτέλεσε ουσιαστικά κίνητρο και για τον Heaviside. Το σπουδαίο έργο του *Electromagnetic Theory* («Ηλεκτρομαγνητική θεωρία») δημοσιεύτηκε σε τρεις τόμους. Ο 1ος τόμος (1893) περιείχε την πρώτη εκτενή παρουσίαση της σύγχρονης διανυσματικής ανάλυσης.

Όλοι οφείλουμε πολλά στο βιβλίο *Vector Analysis: A Textbook for the Use of Students of Mathematics and Physics Founded upon the Lectures of J. Willard Gibbs* («Διανυσματική ανάλυση: Εγχειρίδιο για φοιτητές μαθηματικών και φυσικής βασισμένο στις διαλέξεις του J. Willard Gibbs») του E. B. Wilson που εκδόθηκε το 1901. Ο Wilson ήταν απρόθυμος να ακολουθήσει τη μέθοδο του Gibbs, διότι μόλις είχε ολοκληρώσει στο Harvard ένα μάθημα διάρκειας ενός ολόκληρου έτους πάνω στα τετραδόνια υπό τον J. M. Pierce, έναν υπερασπιστή των τετραδονιακών μεθόδων. Ένας κοσμήτορας, όμως, τον ανάγκασε να προσθέσει το συγκεκριμένο μάθημα στο πρόγραμμά του, πράγμα που έκανε το 1899. Ο εκδότης του Yale Bicentennial Series ζήτησε αργότερα από τον Wilson να γράψει ένα βιβλίο βασισμένο στις διαλέξεις του Gibbs. Για μια φωτογραφία του Gibbs και πρόσθετα ιστορικά σχόλια για την απόκλιση και τον στροβιλισμό, βλ. το Ιστορικό σημείωμα της Ενότητας 4.4.

## Ασκήσεις

**1.** Επαληθεύστε ότι αν αντιμεταθέσουμε τις δύο πρώτες γραμμές της ορίζουσας $3 \times 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

το πρόσημο της ορίζουσας αλλάζει.

**2.** Υπολογίστε τις ορίζουσες

(α) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(β) $\begin{vmatrix} 36 & 18 & 17 \\ 45 & 24 & 20 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

(γ) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix}$

(δ) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{vmatrix}$

**3.** Υπολογίστε το $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, όπου $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

**4.** Υπολογίστε το $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, όπου τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι όπως στην Άσκηση 3 και $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

**5.** Βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ της Άσκησης 3.

**6.** Ένα τρίγωνο έχει κορυφές $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ και $(0, -2, 3)$. Βρείτε το εμβαδόν του.

**7.** Ποιος είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με πλευρές $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $5\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$ και $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$;

**8.** Ποιος είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με πλευρές $\mathbf{i}$, $3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ και $4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$;

*Στις Ασκήσεις 9 έως 12, περιγράψτε όλα τα μοναδιαία διανύσματα που είναι ορθογώνια και με τα δύο δεδομένα διανύσματα.*

**9.** $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

**10.** $-5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $7\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$

**11.** $-5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $7\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$

**12.** $2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $-4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

**13.** Υπολογίστε τα $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ και $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, όπου $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

**14.** Επαναλάβετε την Άσκηση 13 για $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

**15.** Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που

(α) είναι κάθετο στο $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ και διέρχεται από το $(1, 0, 0)$.

(β) είναι κάθετο στο $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ και διέρχεται από το $(1, 1, 1)$.

(γ) είναι κάθετο στην ευθεία $\mathbf{l}(t) = (5, 0, 2)t + (3, -1, 1)$ και διέρχεται από το $(5, -1, 0)$.

(δ) είναι κάθετο στην ευθεία $\mathbf{l}(t) = (-1, -2, 3)t + (0, 7, 1)$ και διέρχεται από το $(2, 4, -1)$.

**16.** Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που διέρχεται από

(α) τα $(0,0,0)$, $(2,0,-1)$ και $(0,4,-3)$.

(β) τα $(1,2,0)$, $(0,1,-2)$ και $(4,0,1)$.

(γ) τα $(2,-1,3)$, $(0,0,5)$ και $(5,7,-1)$.

**17.** Δείξτε ότι τα σημεία $(0,-2,-1)$, $(1,4,0)$, $(2,10,1)$ δεν ορίζουν μοναδικό επίπεδο.

**18.** Έστω $P$ το επίπεδο που ορίζεται από την εξίσωση $x+y+z=1$. Ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στο $P$;

(α) $(0,0,0)$

(β) $(1,1,-1)$

(γ) $(-3,8,-4)$

(δ) $(1,2,-3)$

**19.** (α) Δείξτε ότι δύο παράλληλα επίπεδα είτε ταυτίζονται είτε δεν τέμνονται ποτέ.

(β) Πώς τέμνονται δύο μη παράλληλα επίπεδα;

**20.** Βρείτε την τομή των επιπέδων $x+2y+z=0$ και $x-3y-z=0$.

**21.** Βρείτε την τομή των επιπέδων $x+(y-1)+z=0$ και $-x+(y+1)-z=0$.

**22.** Βρείτε την τομή των δύο επιπέδων με εξισώσεις $3(x-1)+2y+(z+1)=0$ και $(x-1)+4y-(z+1)=0$.

**23.** (α) Αποδείξτε τις δύο ταυτότητες

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}$$

και

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$$

του τριπλού διανυσματικού γινομένου.

(β) Αποδείξτε ότι $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}=\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ αν και μόνο αν $(\mathbf{u}\times\mathbf{w})\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

(γ) Αποδείξτε επίσης ότι $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}+(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\times\mathbf{u}+(\mathbf{w}\times\mathbf{u})\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$ (που ονομάζεται ***ταυτότητα Jacobi***).

**24.** (α) Αποδείξτε, χωρίς να καταφύγετε στη γεωμετρία, ότι

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})&=\mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{u})=\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=-\mathbf{u}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{v})\\&=-\mathbf{w}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{u})=-\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{w}).\end{aligned}$$

(β) Χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α) και την Άσκηση 23(α), αποδείξτε ότι

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}'\times\mathbf{v}')&=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}')(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}')-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}')(\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v})\\&=\begin{vmatrix}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}' & \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}'\\ \mathbf{u}'\cdot\mathbf{v} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}'\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

**25.** Επαληθεύστε τον κανόνα του Cramer.

**26.** Ποια είναι η γεωμετρική σχέση μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$ αν $\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|=\frac{1}{2}\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|$;

**27.** Έστω $\mathbf{v}=(1,1,0)$ και $\mathbf{w}=(0,2,-1)$. Χρησιμοποιώντας τους αλγεβρικούς κανόνες και τον πίνακα πολλαπλασιασμού της σελίδας 37, υπολογίστε το $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ χωρίς να χρησιμοποιήσετε ορίζουσες.

**28.** Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που διέρχεται από το σημείο $(2,-1,3)$ και είναι κάθετο στην ευθεία $\mathbf{v}=(1,-2,2)+t(3,-2,4)$.

**29.** Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που διέρχεται από το σημείο $(1,2,-3)$ και είναι κάθετο στην ευθεία $\mathbf{v}=(0,-2,1)+t(1,-2,3)$.

**30.** Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(1,-2,-3)$ και είναι κάθετη στο επίπεδο $3x-y-2z+4=0$.

**31.** Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που περιέχει τις δύο (παράλληλες) ευθείες

$$\mathbf{v}_1=(0,1,-2)+t(2,3,-1)$$

και

$$\mathbf{v}_2=(2,-1,0)+t(2,3,-1).$$

**32.** Βρείτε μια παραμετρικοποίηση της ευθείας που είναι κάθετη στο $(2,-1,1)$, παράλληλη στο επίπεδο $2x+y-4z=1$ και διέρχεται από το σημείο $(1,0,-3)$.

**33.** Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που περιέχει το σημείο $(1,0,1)$ και την ευθεία $\mathbf{l}(t)=(1,2,-1)+t(1,0,5)$.

**34.** Βρείτε την απόσταση του σημείου $(2,1,-1)$ από το επίπεδο $x-2y+2z+5=0$.

**35.** Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που περιέχει την ευθεία $\mathbf{v}=(-1,1,2)+t(3,2,4)$ και είναι κάθετο στο επίπεδο $2x+y-3z+4=0$.

**36.** Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που διέρχεται από τα $(3,2,-1)$ και $(1,-1,2)$ και είναι παράλληλο στην ευθεία $\mathbf{v}=(1,-1,0)+t(3,2,-2)$.

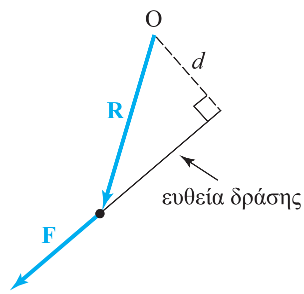
**37.** Επαναλάβετε τις Ασκήσεις 25 και 26 της Ενότητας 1.1 χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο και όσα γνωρίζετε για τα κάθετα διανύσματα ενός επιπέδου.

**38.** Δεδομένων δύο διανυσμάτων $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, ορίζουν οι εξισώσεις $\mathbf{x}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}$ και $\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}=\|\mathbf{a}\|$ ένα μοναδικό διάνυσμα $\mathbf{x}$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας γεωμετρικά και αναλυτικά.

**39.** Βρείτε την απόσταση του επιπέδου $12x+13y+5z+2=0$ από το σημείο $(1,1,-5)$.

**40.** Βρείτε την απόσταση του σημείου $(6,1,0)$ από το επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετο στο $\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

**41.** (α) Στη μηχανική, ως ***ροπή*** $M$ *μιας δύναμης* $\mathbf{F}$ *ως προς ένα σημείο* O ορίζεται το μέτρο της $\mathbf{F}$ επί την κάθετη απόσταση $d$ του O από την ευθεία δράσης της $\mathbf{F}$. Η ***διανυσματική ροπή*** $\mathbf{M}$ είναι το διάνυσμα με μέτρο $M$ και κατεύθυνση κάθετη στο επίπεδο των O και $\mathbf{F}$, όπως καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Δείξτε ότι $\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$, όπου $\mathbf{R}$ είναι οποιοδήποτε διάνυσμα που ξεκινά από το O και καταλήγει στην ευθεία δράσης της $\mathbf{F}$. (Βλ. Σχήμα 1.3.10.)




Σχήμα **1.3.10** Ροπή δύναμης.

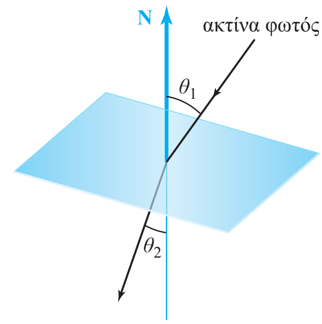
(β) Βρείτε τη ροπή του διανύσματος δύναμης $\mathbf{F} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ N ως προς την αρχή των αξόνων αν η ευθεία δράσης είναι η $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$.

**42.** Δείξτε ότι το επίπεδο που διέρχεται από τα τρία σημεία $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ και $C = (c_1, c_2, c_3)$ αποτελείται από τα σημεία $\mathrm{P} = (x, y, z)$ που δίνονται από την

$$\begin{vmatrix} a_1 - x & a_2 - y & a_3 - z \\ b_1 - x & b_2 - y & b_3 - z \\ c_1 - x & c_2 - y & c_3 - z \end{vmatrix} = 0.$$

(Υπόδειξη: Γράψτε την ορίζουσα ως τριπλό γινόμενο.)

**43.** Δύο μέσα με δείκτες διάθλασης $n_1$ και $n_2$ διαχωρίζονται από μια επίπεδη επιφάνεια κάθετη στο μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{N}$. Έστω $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ μοναδιαία διανύσματα επί της προσπίπτουσας και της διαθλώμενης ακτίνας, αντίστοιχα, που έχουν την κατεύθυνση των ακτίνων φωτός. Δείξτε ότι $n_1(\mathbf{N} \times \mathbf{a}) = n_2(\mathbf{N} \times \mathbf{b})$ χρησιμοποιώντας τον *νόμο του Snell* $\sin\theta_1 / \sin\theta_2 = n_2/n_1$, όπου $\theta_1$ και $\theta_2$ είναι οι γωνίες πρόσπτωσης και διάθλασης, αντίστοιχα. (Βλ. Σχήμα 1.3.11.)




Σχήμα **1.3.11** Νόμος του Snell.

**44.** Δικαιολογήστε τα βήματα στον παρακάτω υπολογισμό:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -11 \end{vmatrix} = 33 - 36 = -3.$$

**45.** Δείξτε ότι αν προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο της πρώτης γραμμής ενός πίνακα στη δεύτερη γραμμή, η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \lambda a_1 & b_2 + \lambda b_1 & c_2 + \lambda c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

[Εν γένει, αν προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο οποιασδήποτε γραμμής (στήλης) ενός πίνακα σε μια άλλη γραμμή (στήλη), η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται.]

**46.** Έστω ότι τα $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ είναι ορθογώνια μοναδιαία διανύσματα. Έστω ότι $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Δείξτε ότι $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ και $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$.

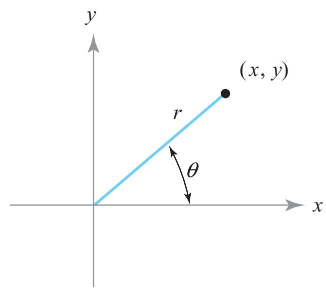
## 1.4 Κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες

Ένα σημείο του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ αναπαρίσταται συνήθως μέσω των ορθογώνιων συντεταγμένων $(x, y)$. Όπως όμως πιθανότατα γνωρίζετε από τον στοιχειώδη απειροστικό λογισμό, οι πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο μπορεί να είναι εξαιρετικά χρήσιμες. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.4.1, οι συντεταγμένες $(r, \theta)$ συνδέονται με τις $(x, y)$ μέσω των εξισώσεων

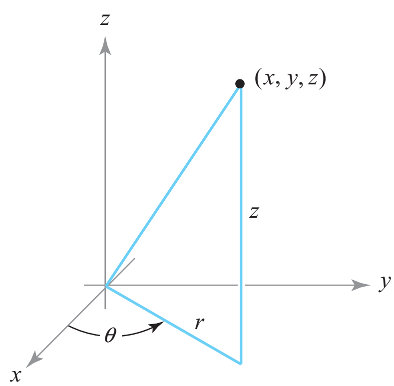
$$x = r\cos\theta \qquad \text{και} \qquad y = r\sin\theta,$$

όπου συνήθως θεωρούμε ότι $r \geq 0$ και $0 \leq \theta < 2\pi$.

Αν δεν είστε εξοικειωμένοι με τις πολικές συντεταγμένες, σας συμβουλεύουμε να μελετήσετε τη σχετική ενότητα ενός βιβλίου απειροστικού λογισμού. Παρακάτω θα περιγράψουμε δύο τρόπους αναπαράστασης σημείων στον χώρο, διαφορετικούς από τη χρήση




Σχήμα 1.4.1 Οι πολικές συντεταγμένες του $(x, y)$ είναι $(r, \theta)$.




Σχήμα 1.4.2 Αναπαράσταση ενός σημείου $(x, y, z)$ με τις κυλινδρικές συντεταγμένες του $r$, $\theta$ και $z$.

καρτεσιανών συντεταγμένων $(x, y, z)$. Αυτά τα εναλλακτικά συστήματα συντεταγμένων ενδείκνυνται για συγκεκριμένους τύπους προβλημάτων, όπως για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων με αλλαγή μεταβλητών.

## Ιστορικό σημείωμα

Το 1671, ο Ισαάκ Νεύτωνας έγραψε ένα χειρόγραφο με τίτλο *The Method of Fluxions and Infinite Series* («Η μέθοδος των ροών και των απειροσειρών»), το οποίο περιέχει πολλές χρήσεις της αναλυτικής γεωμετρίας για την περιγραφή των λύσεων εξισώσεων. Ειδικότερα, μεταξύ άλλων συστημάτων συντεταγμένων, εισάγεται το σύστημα πολικών συντεταγμένων.

Το 1691, ο Jacob Bernoulli δημοσίευσε ένα άρθρο στο οποίο χρησιμοποιούσε επίσης πολικές συντεταγμένες. Επειδή το χειρόγραφο του Νεύτωνα δεν δημοσιεύτηκε παρά μετά τον θάνατό του το 1727, συνήθως θεωρείται ότι τις πολικές συντεταγμένες ανακάλυψε ο Bernoulli.

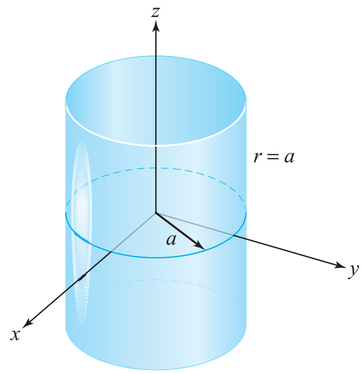
## Κυλινδρικές συντεταγμένες

**Ορισμός** Οι ***κυλινδρικές συντεταγμένες*** $(r, \theta, z)$ ενός σημείου $(x, y, z)$ ορίζονται από τις εξισώσεις (βλ. Σχήμα 1.4.2)

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z. \tag{1}$$

Για να εκφράσουμε τα $r$, $\theta$ και $z$ συναρτήσει των $x$, $y$ και $z$ και να διασφαλίσουμε ότι η $\theta$ είναι μεταξύ $0$ και $2\pi$, γράφουμε

$$r = \sqrt{x^2+y^2}\,, \qquad \theta = \begin{cases} \tan^{-1}(y/x) & \text{αν } x>0 \text{ και } y \geq 0 \\ \pi + \tan^{-1}(y/x) & \text{αν } x<0 \\ 2\pi + \tan^{-1}(y/x) & \text{αν } x>0 \text{ και } y<0, \end{cases} \qquad z = z,$$




Σχήμα 1.4.3 Το γράφημα των σημείων των οποίων οι κυλινδρικές συντεταγμένες ικανοποιούν την $r = a$ είναι ένας κύλινδρος.

όπου θεωρούμε ότι η $\tan^{-1}(y/x)$ κυμαίνεται μεταξύ των τιμών $-\pi/2$ και $\pi/2$. Η απαίτηση $0 \le \theta < 2\pi$ επιτρέπει τον μονοσήμαντο καθορισμό των $\theta$ και $r \ge 0$ για δεδομένα $x$ και $y$. Αν $x = 0$, τότε $\theta = \pi/2$ για $y > 0$ και $3\pi/2$ για $y < 0$. Αν $x = y = 0$, το $\theta$ δεν ορίζεται.

Με άλλα λόγια, για οποιοδήποτε σημείο $(x, y, z)$, αναπαριστούμε την πρώτη και τη δεύτερη συντεταγμένη μέσω των πολικών συντεταγμένων και αφήνουμε την τρίτη συντεταγμένη αμετάβλητη. Ο τύπος (1) δείχνει ότι, δεδομένης της τριάδας $(r, \theta, z)$, η τριάδα $(x, y, z)$ καθορίζεται πλήρως, και αντιστρόφως, αν περιορίσουμε το $\theta$ στο διάστημα $[0, 2\pi)$ (μερικές φορές βολεύει το διάστημα $(-\pi, \pi]$) και απαιτήσουμε $r > 0$.

Για να καταλάβετε γιατί χρησιμοποιούμε τον όρο *κυλινδρικές συντεταγμένες*, παρατηρήστε ότι αν ισχύουν οι συνθήκες $0 \le \theta < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$ και αν $r = a$ είναι κάποια θετική σταθερά, τότε ο γεωμετρικός τόπος αυτών των σημείων είναι ένας κύλινδρος ακτίνας $a$ (βλ. Σχήμα 1.4.3).

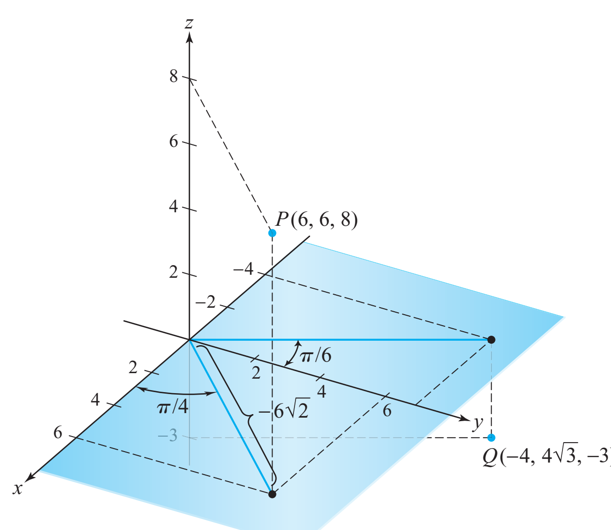
**Παράδειγμα 1**

(α) Βρείτε και σχεδιάστε τις κυλινδρικές συντεταγμένες του $(6, 6, 8)$.

(β) Αν ένα σημείο έχει κυλινδρικές συντεταγμένες $(8, 2\pi/3, -3)$, ποιες είναι οι καρτεσιανές του συντεταγμένες; Σχεδιάστε τις.

**Λύση**

Για το ερώτημα (α), έχουμε $r = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ και $\theta = \tan^{-1}(6/6) = \tan^{-1}(1) = \pi/4$. Άρα οι κυλινδρικές συντεταγμένες είναι $(6\sqrt{2}, \pi/4, 8)$. Είναι το σημείο P στο Σχήμα 1.4.4.




Σχήμα 1.4.4 Μερικά παραδείγματα μετατροπής μεταξύ καρτεσιανών και κυλινδρικών συντεταγμένων.

Για το ερώτημα (β), παρατηρούμε ότι $2\pi/3 = \pi/2 + \pi/6$ και υπολογίζουμε τα

$$x = r\cos\theta = 8\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{8}{2} = -4$$

και

$$y = r\sin\theta = 8\sin\frac{2\pi}{3} = 8\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

Άρα οι καρτεσιανές συντεταγμένες είναι $(-4, 4\sqrt{3}, -3)$ (το σημείο Q στο σχήμα). ▲

## Σφαιρικές συντεταγμένες

Οι κυλινδρικές συντεταγμένες δεν αποτελούν τη μόνη δυνατή γενίκευση των πολικών συντεταγμένων στις τρεις διαστάσεις. Υπενθυμίζουμε ότι στις δύο διαστάσεις το μέτρο του διανύσματος $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ (δηλαδή το $\sqrt{x^2+y^2}$) είναι το $r$ του συστήματος πολικών συντεταγμένων. Στις κυλινδρικές συντεταγμένες, το μήκος του διανύσματος $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, δηλαδή το

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

δεν είναι κάποια από τις συντεταγμένες του συστήματος — αντ' αυτού, χρησιμοποιήσαμε το μέτρο $r = \sqrt{x^2+y^2}$, τη γωνία $\theta$ και το «ύψος» $z$.

Θα τροποποιήσουμε τώρα το παραπάνω εισάγοντας το σύστημα *σφαιρικών συντεταγμένων*, όπου το $\rho$ *χρησιμοποιείται* ως συντεταγμένη. Οι σφαιρικές συντεταγμένες είναι συχνά χρήσιμες σε προβλήματα με σφαιρική συμμετρία (συμμετρία ως προς σημείο), ενώ οι κυλινδρικές συντεταγμένες μπορούν να χρησιμοποιηθούν όταν υπάρχει κυλινδρική συμμετρία (συμμετρία ως προς ευθεία).

Δεδομένου ενός σημείου $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, θέτουμε

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

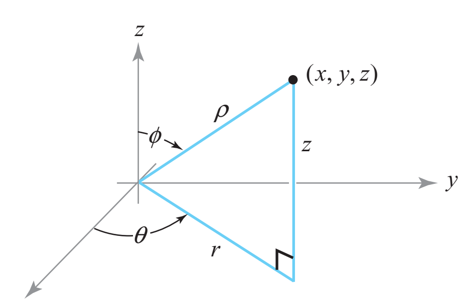
και αναπαριστούμε τα $x$ και $y$ με τις πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο $xy$:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \tag{2}$$

όπου τα $r = \sqrt{x^2+y^2}$ και $\theta$ δίνονται από τον τύπο (1) [βλ. την έκφραση για το $\theta$ που ακολουθεί τον τύπο (1)]. Η συντεταγμένη $z$ δίνεται από την

$$z = \rho\cos\phi,$$

όπου $\phi$ είναι η γωνία (επιλεγμένη ώστε να είναι από 0 έως $\pi$, συμπεριλαμβανομένων των άκρων) που σχηματίζει το διάνυσμα της ακτίνας $\mathbf{v} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ με τον θετικό άξονα $z$, στο επίπεδο που περιέχει το διάνυσμα $\mathbf{v}$ και τον άξονα $z$ (βλ. Σχήμα 1.4.5). Χρησιμοποιώντας




Σχήμα 1.4.5 Σφαιρικές συντεταγμένες $(\rho, \theta, \phi)$. Το γράφημα των σημείων που ικανοποιούν την $\rho = a$ είναι μία σφαίρα.

το εσωτερικό γινόμενο, μπορούμε να εκφράσουμε την $\phi$ ως εξής:

$$\cos\phi = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}}{\|\mathbf{v}\|}, \qquad \text{δηλαδή} \qquad \phi = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}}{\|\mathbf{v}\|}\right).$$

Παίρνουμε ως συντεταγμένες μας τις ποσότητες $\rho$, $\theta$, $\phi$. Επειδή

$$r = \rho\sin\phi,$$

μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (2) για να βρούμε τα $x$, $y$, $z$ συναρτήσει των σφαιρικών συντεταγμένων $\rho$, $\theta$, $\phi$.

**Ορισμός** Οι ***σφαιρικές συντεταγμένες*** του σημείου $(x, y, z)$ του χώρου είναι η τριάδα $(\rho, \theta, \phi)$ που ορίζεται ως εξής:

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \qquad z = \rho\cos\phi, \tag{3}$$

όπου

$$\rho \geq 0, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi, \qquad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

## Ιστορικό σημείωμα

Το 1773, ο Joseph Louis Lagrange δούλευε πάνω στην εφαρμογή της βαρυτικής θεωρίας του Νεύτωνα σε ελλειψοειδή εκ περιστροφής. Προσπαθώντας να υπολογίσει τη συνολική βαρυτική έλξη ενός τέτοιου ελλειψοειδούς, συνάντησε ένα ολοκλήρωμα που δεν μπορούσε να υπολογιστεί εύκολα. Με αφορμή αυτή την εφαρμογή, εισήγαγε τις σφαιρικές συντεταγμένες, οι οποίες του επέτρεψαν να υπολογίσει το ολοκλήρωμα. Θα εξετάσουμε την εφαρμογή της μεθόδου αλλαγής συντεταγμένων στα πολλαπλά ολοκληρώματα στην Ενότητα 6.2, και τις εφαρμογές της στη βαρύτητα στην Ενότητα 6.3, όπου θα δείξουμε πώς ο νόμος του αντίστροφου τετραγώνου της βαρύτητας επέτρεψε στον Νεύτωνα να θεωρήσει τις σφαιρικές μάζες σημειακές.

Οι σφαιρικές συντεταγμένες συνδέονται επίσης στενά με την πλοήγηση με βάση το γεωγραφικό πλάτος και μήκος. Για να καταλάβετε τη σύνδεση, παρατηρήστε αρχικά ότι μια σφαίρα ακτίνας $a$ με κέντρο την αρχή των αξόνων περιγράφεται σε σφαιρικές συντεταγμένες από μια πολύ απλή εξίσωση, συγκεκριμένα, την $\rho = a$. Αν θεωρήσουμε την ακτίνα $a$ σταθερή και πάρουμε ως άξονα $z$ τον άξονα της γης, οι σφαιρικές συντεταγμένες $\theta$ και $\phi$ είναι παρόμοιες με τις γεωγραφικές συντεταγμένες του γεωγραφικού μήκους και γεωγραφικού πλάτους. Υπάρχουν όμως κάποιες διαφορές: Το γεωγραφικό μήκος είναι $|\theta|$ και καλείται ανατολικό ή δυτικό, ανάλογα με το αν η $\theta$ μετράται θετικά ή αρνητικά ως προς τον μεσημβρινό του Greenwich· το γεωγραφικό πλάτος είναι $|\pi/2 - \phi|$ και καλείται βόρειο ή νότιο, ανάλογα με το αν η $\pi/2 - \phi$ είναι θετική ή αρνητική.

**Παράδειγμα 2**

(α) Βρείτε τις σφαιρικές συντεταγμένες του καρτεσιανού σημείου $(1, -1, 1)$ και σχεδιάστε τις.

(β) Βρείτε τις καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου με σφαιρικές συντεταγμένες $(3, \pi/6, \pi/4)$ και σχεδιάστε τις.

(γ) Έστω ένα σημείο με καρτεσιανές συντεταγμένες $(2, -3, 6)$. Βρείτε τις σφαιρικές συντεταγμένες του και σχεδιάστε τις.

(δ) Έστω ένα σημείο με σφαιρικές συντεταγμένες $(1, -\pi/2, \pi/4)$. Βρείτε τις καρτεσιανές συντεταγμένες του και σχεδιάστε τις.

**Λύση** (α) $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$,

$$\theta = 2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = 2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 0{,}955 \approx 54{,}74^\circ.$$

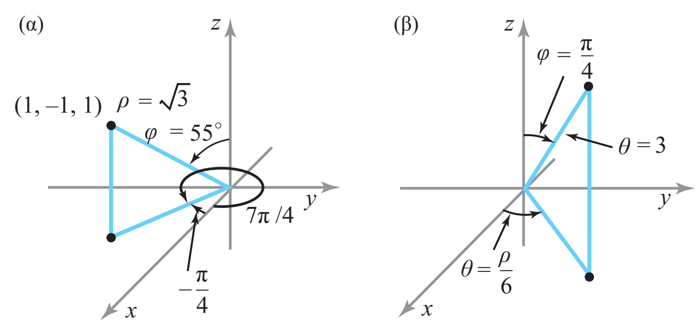
Βλ. Σχήμα 1.4.6(α) και τον τύπο για το $\theta$ που ακολουθεί τη σχέση (1).

(β) $x = \rho \sin\phi \cos\theta = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$,

$$y = \rho \sin\phi \sin\theta = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2\sqrt{2}},$$

$$z = \rho \cos\phi = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Βλ. Σχήμα 1.4.6(β).




Σχήμα 1.4.6 Εύρεση (α) των σφαιρικών συντεταγμένων του σημείου $(1, -1, 1)$ και (β) των καρτεσιανών συντεταγμένων του $(3, \pi/6, \pi/4)$.

(γ) $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$,

$$\theta = 2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = 2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{-3}{2}\right) \approx 5{,}3004 \text{ rad} \approx 303{,}69^\circ,$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{6}{7}\right) \approx 0{,}541 \approx 31{,}0^\circ.$$

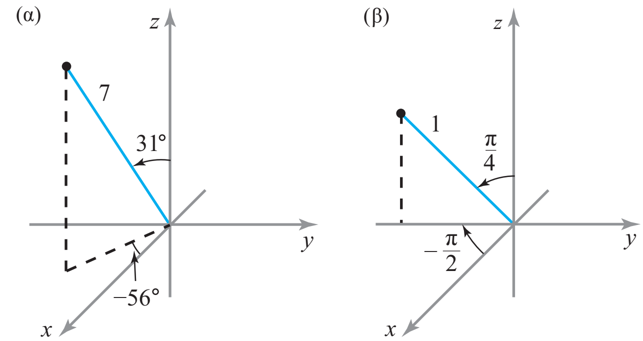
Βλ. Σχήμα 1.4.7(α).

(δ) $x = \rho \sin\phi \cos\theta = 1 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 0 = 0$,

$$y = \rho \sin\phi \sin\theta = 1 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-1) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z = \rho \cos\phi = 1 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Βλ. Σχήμα 1.4.7(β).




Σχήμα 1.4.7 Εύρεση (α) των σφαιρικών συντεταγμένων του σημείου $(2, -3, 6)$ και (β) των καρτεσιανών συντεταγμένων του $(1, -\pi/2, \pi/4)$. ▲

**Παράδειγμα 3** Εκφράστε (α) την επιφάνεια $xz = 1$ και (β) την επιφάνεια $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ σε σφαιρικές συντεταγμένες.

**Λύση** Σύμφωνα με τη σχέση (3), έχουμε $x = \rho \sin\phi\cos\theta$ και $z = \rho\cos\phi$, άρα η επιφάνεια $xz = 1$ του ερωτήματος (α) αποτελείται από όλα τα $(\rho, \theta, \phi)$ για τα οποία

$$\rho^2 \sin\phi\cos\theta\cos\phi = 1, \qquad \text{δηλαδή} \qquad \rho^2 \sin 2\phi\cos\theta = 2.$$

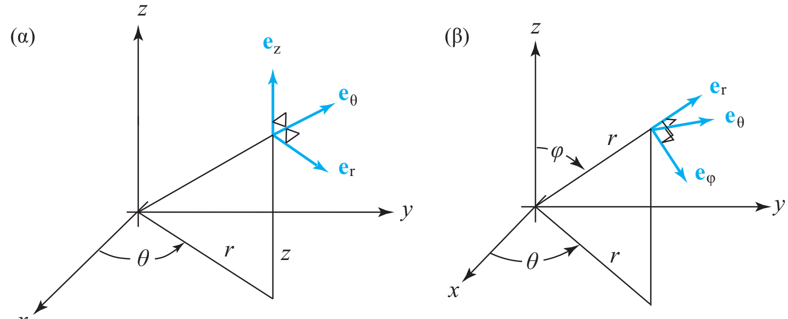
Για το ερώτημα (β), γράφουμε

$$x^2 + y^2 - z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2z^2 = \rho^2 - 2\rho^2\cos^2\phi,$$

άρα η επιφάνεια είναι η $\rho^2(1 - 2\cos^2\phi) = 1$, δηλαδή $-\rho^2\cos(2\phi) = 1$. ▲

Στις κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες αντιστοιχούν ορισμένα μοναδιαία διανύσματα που είναι τα αντίστοιχα των **i**, **j** και **k** στις ορθογώνιες συντεταγμένες. Παρουσιάζονται στο Σχήμα 1.4.8. Για παράδειγμα, το $\mathbf{e}_r$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι παράλληλο στο επίπεδο $xy$ και έχει ακτινική κατεύθυνση, οπότε $\mathbf{e}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j}$. Με αντίστοιχο τρόπο, στις σφαιρικές συντεταγμένες, το $\mathbf{e}_\phi$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι εφαπτόμενο στην καμπύλη που έχει τη μεταβλητή $\phi$ ως παράμετρο και τις μεταβλητές $\rho$ και $\theta$ κρατημένες σταθερές. Θα δούμε αυτά τα μοναδιαία διανύσματα αργότερα, όταν θα χρησιμοποιήσουμε τις κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες σε διανυσματικούς υπολογισμούς.

Σχήμα 1.4.8 (α) Τα ορθοκανονικά διανύσματα $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ και $\mathbf{e}_z$ που αντιστοιχούν στις κυλινδρικές συντεταγμένες. Το διάνυσμα $\mathbf{e}_r$ είναι παράλληλο στην ευθεία $r$. (β) Τα ορθοκανονικά διανύσματα $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\theta$ και $\mathbf{e}_\phi$ που αντιστοιχούν στις σφαιρικές συντεταγμένες.



## Ασκήσεις

1. Βρείτε τις σφαιρικές συντεταγμένες του καρτεσιανού σημείου $(\sqrt{2}, -\sqrt{6}, -2\sqrt{2})$.

2. Βρείτε τις σφαιρικές συντεταγμένες του καρτεσιανού σημείου $(\sqrt{6}, -\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.

3. (α) Τα παρακάτω σημεία δίνονται σε κυλινδρικές συντεταγμένες· εκφράστε καθένα από αυτά σε ορθογώνιες και σφαιρικές συντεταγμένες: $(1, 45°, 1)$, $(2, \pi/2, -4)$, $(0, 45°, 10)$, $(3, \pi/6, 4)$, $(1, \pi/6, 0)$ και $(2, 3\pi/4, -2)$. (Στον Οδηγό μελέτης δίνεται η λύση μόνο για το πρώτο σημείο.)

   (β) Μετατρέψτε τα παρακάτω σημεία από ορθογώνιες σε σφαιρικές και σε κυλινδρικές συντεταγμένες: $(2, 1, -2)$, $(0, 3, 4)$, $(\sqrt{2}, 1, 1)$, $(-2\sqrt{3}, -2, 3)$. (Στον Οδηγό μελέτης δίνεται η λύση μόνο για το πρώτο σημείο.)

4. Περιγράψτε τη γεωμετρική σημασία των παρακάτω απεικονίσεων σε κυλινδρικές συντεταγμένες:
   (α) $(r, \theta, z) \mapsto (r, \theta, -z)$
   (β) $(r, \theta, z) \mapsto (r, \theta + \pi, -z)$
   (γ) $(r, \theta, z) \mapsto (-r, \theta - \pi/4, z)$

5. Περιγράψτε τη γεωμετρική σημασία των παρακάτω απεικονίσεων σε σφαιρικές συντεταγμένες:
   (α) $(\rho, \theta, \phi) \mapsto (\rho, \theta + \pi, \phi)$
   (β) $(\rho, \theta, \phi) \mapsto (\rho, \theta, \pi - \phi)$
   (γ) $(\rho, \theta, \phi) \mapsto (2\rho, \theta + \pi/2, \phi)$

6. Σχεδιάστε τα παρακάτω στερεά:
   (α) $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, \pi]$, $z \in [-1, 1]$
   (β) $r \in [0, 2]$, $\theta \in [0, \pi/2]$, $z \in [0, 4]$
   (γ) $\rho \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, \pi/4]$
   (δ) $\rho \in [1, 2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, \pi/2]$

7. Σχεδιάστε τις παρακάτω επιφάνειες:
   (α) $z = r^2$
   (β) $\rho = 4 \csc \phi \sec \theta$
   (γ) $r = 4 \sin \theta$
   (δ) $\rho \sin \phi = 2$

8. (α) Περιγράψτε τις επιφάνειες $r =$ σταθερά, $\theta =$ σταθερά και $z =$ σταθερά στο σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων.

   (β) Περιγράψτε τις επιφάνειες $\rho =$ σταθερά, $\theta =$ σταθερά και $\phi =$ σταθερά στο σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων.

9. Δείξτε ότι για να αναπαραστήσουμε οποιοδήποτε σημείο του $\mathbb{R}^3$ σε σφαιρικές συντεταγμένες, χρειάζεται να πάρουμε μόνο τιμές του $\theta$ μεταξύ 0 και $2\pi$, τιμές του $\phi$ μεταξύ 0 και $\pi$, και $\rho \geq 0$. Είναι οι συντεταγμένες μοναδικές αν επιτρέψουμε $\rho \leq 0$;

10. Περιγράψτε τα παρακάτω στερεά χρησιμοποιώντας ανισότητες. Να αναφέρετε το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιήσατε.

    (α) Ένα κυλινδρικό κέλυφος μήκους 8 μονάδων, με εσωτερική διάμετρο 2 μονάδων και εξωτερική διάμετρο 3 μονάδων.

    (β) Ένα σφαιρικό κέλυφος με εσωτερική ακτίνα 4 μονάδων και εξωτερική ακτίνα 6 μονάδων.

    (γ) Ένα ημισφαίριο διαμέτρου 5 μονάδων.

    (δ) Έναν κύβο με μήκος πλευράς 2.

11. Έστω $S$ η σφαίρα ακτίνας $R$ με κέντρο την αρχή των αξόνων. Βρείτε την εξίσωση της $S$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

12. Χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες και τα ορθοκανονικά (ορθογώνια κανονικοποιημένα) διανύσματα $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ και $\mathbf{e}_z$ (βλ. Σχήμα 1.4.8),

    (α) εκφράστε καθένα από τα $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ και $\mathbf{e}_z$ συναρτήσει των $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ και $(x, y, z)$, και

    (β) υπολογίστε το $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{j}$ αναλυτικά, χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α), και γεωμετρικά.

13. Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες και τα ορθοκανονικά (ορθογώνια κανονικοποιημένα) διανύσματα $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\theta$ και $\mathbf{e}_\phi$ [βλ. Σχήμα 1.4.8(β)],

    (α) εκφράστε καθένα από τα $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\theta$ και $\mathbf{e}_\phi$ συναρτήσει των $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ και $(x, y, z)$, και

    (β) υπολογίστε τα $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{j}$ και $\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{j}$ αναλυτικά και γεωμετρικά.

14. Εκφράστε το επίπεδο $z = x$ (α) σε κυλινδρικές και (β) σε σφαιρικές συντεταγμένες.

15. Δείξτε ότι στις σφαιρικές συντεταγμένες:
    (α) $\rho$ είναι το μήκος του $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
    (β) $\phi = \cos^{-1}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}/\|\mathbf{v}\|)$, όπου $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
    (γ) $\theta = \cos^{-1}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{i}/\|\mathbf{u}\|)$, όπου $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

16. Δύο επιφάνειες περιγράφονται σε σφαιρικές συντεταγμένες από τις εξισώσεις $\rho = f(\theta, \phi)$ και $\rho = -2f(\theta, \phi)$, όπου $f(\theta, \phi)$ είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών. Πώς προκύπτει γεωμετρικά η δεύτερη επιφάνεια από την πρώτη;

17. Μια κυκλική μεμβράνη στον χώρο καλύπτει το χωρίο $x^2 + y^2 \leq a^2$. Η μέγιστη συνιστώσα $z$ των σημείων της μεμβράνης είναι $b$. Αν $(x, y, z)$ είναι ένα σημείο της μεμβράνης, δείξτε ότι το αντίστοιχο σημείο $(r, \theta, z)$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες ικανοποιεί τις συνθήκες $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $|z| \leq b$.

**18.** Μια δεξαμενή σχήματος ορθού κυκλικού κυλίνδρου ακτίνας 10 m και ύψους 16 m είναι μισογεμάτη και ακουμπάει στο έδαφος με τη πλαϊνή της πλευρά. Περιγράψτε τον χώρο που καταλαμβάνει ο αέρας εντός της δεξαμενής επιλέγοντας κατάλληλες κυλινδρικές συντεταγμένες.

**19.** Ένας μετρητής κραδασμών πρέπει να σχεδιαστεί έτσι ώστε να αντέχει στη θερμότητα που μεταδίδεται μέσω του σφαιρικού περιβλήματός του διαμέτρου $d$, το οποίο είναι θαμμένο σε βάθος $d/3$ μέσα στη Γη και το επάνω μέρος του οποίου θερμαίνεται από τον Ήλιο (θεωρήστε ότι η επιφάνεια της Γης είναι επίπεδη). Για την ανάλυση της αγωγής θερμότητας, το θαμμένο τμήμα του περιβλήματος απαιτείται να περιγραφεί σε σφαιρικές συντεταγμένες. Περιγράψτε το.

**20.** Μια κασέτα φίλτρου λαδιού είναι ένας πορώδης ορθός κυκλικός κύλινδρος εντός του οποίου το λάδι διαχέεται από τον άξονα προς την εξωτερική καμπύλη επιφάνεια. Περιγράψτε την κασέτα σε κυλινδρικές συντεταγμένες, αν η διάμετρος του φίλτρου είναι 4,5 ίντσες, το ύψος του 5,6 ίντσες, και το κέντρο της κασέτας διατρέχεται από μια τρύπα (από πάνω ως κάτω) ώστε να χωράει ένα μπουλόνι διαμέτρου $\frac{5}{8}$ ιντσών.

**21.** Περιγράψτε την επιφάνεια που δίνεται σε σφαιρικές συντεταγμένες από την $\rho = \cos 2\theta$.

**22.** (α) Βρείτε όλα τα σημεία $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ που έχουν την ίδια αναπαράσταση σε καρτεσιανές και σφαιρικές συντεταγμένες.

(β) Βρείτε όλα τα σημεία $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ που έχουν την ίδια αναπαράσταση σε καρτεσιανές και κυλινδρικές συντεταγμένες.

## 1.5 $n$-διάστατος ευκλείδειος χώρος

### Διανύσματα στον $n$-χώρο

Στις Ενότητες 1.1 και 1.2 μελετήσαμε τους χώρους $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ και τους δώσαμε γεωμετρικές ερμηνείες. Για παράδειγμα, μπορούμε να σκεφτόμαστε ένα σημείο $(x, y, z)$ του $\mathbb{R}^3$ σαν ένα γεωμετρικό αντικείμενο, συγκεκριμένα, το κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα ή διάνυσμα που ξεκινά από την αρχή των αξόνων και καταλήγει στο σημείο $(x, y, z)$. Επομένως, μπορούμε να σκεφτόμαστε τον $\mathbb{R}^3$ με οποιονδήποτε από τους παρακάτω δύο τρόπους:

(i) Αλγεβρικά, σαν ένα σύνολο τριάδων $(x, y, z)$, όπου $x$, $y$ και $z$ είναι πραγματικοί αριθμοί

(ii) Γεωμετρικά, σαν ένα σύνολο κατευθυνόμενων ευθύγραμμων τμημάτων

Αυτοί οι δύο τρόποι θεώρησης του $\mathbb{R}^3$ είναι ισοδύναμοι. Για τη γενίκευση είναι ευκολότερο να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό (i). Ειδικότερα, μπορούμε να ορίσουμε τον $\mathbb{R}^n$, όπου $n$ είναι ένας θετικός ακέραιος (πιθανόν μεγαλύτερος του 3), ως το σύνολο όλων των διατεταγμένων $n$-άδων $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, όπου τα $x_i$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Για παράδειγμα, $(1, \sqrt{5}, 2, \sqrt{3}) \in \mathbb{R}^4$.

Το σύνολο $\mathbb{R}^n$ που ορίζεται με αυτό τον τρόπο ονομάζεται ***ευκλείδειος $n$-χώρος***, και τα στοιχεία του, τα οποία γράφουμε ως $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ονομάζονται ***διανύσματα*** ή ***$n$-διανύσματα***. Για $n = 1, 2$ ή 3, παίρνουμε την ευθεία, το επίπεδο και τον τριδιάστατο χώρο, αντίστοιχα.

Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη του ευκλείδειου $n$-χώρου εισάγοντας κάποιες αλγεβρικές πράξεις. Είναι αντίστοιχες με αυτές που εισαγάγαμε στην Ενότητα 1.1 για τους $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$. Οι δύο πρώτες, η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός, ορίζονται ως εξής:

(i) $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$,

και

(ii) για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $\alpha$,

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Η γεωμετρική σημασία αυτών των πράξεων για τους $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ εξετάστηκε στην Ενότητα 1.1.

Τα $n$ διανύσματα

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

καλούνται ***διανύσματα της συνήθους βάσης*** του $\mathbb{R}^n$ και αποτελούν γενίκευση των τριών, ανά δύο ορθογώνιων μεταξύ τους, μοναδιαίων διανυσμάτων $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ του $\mathbb{R}^3$. Το διάνυσμα $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ μπορεί να γραφτεί ως $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$.

Για δύο διανύσματα $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ και $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ στον $\mathbb{R}^3$, ορίσαμε το *εσωτερικό γινόμενο* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ ως τον πραγματικό αριθμό $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Αυτός ο ορισμός επεκτείνεται εύκολα στον $\mathbb{R}^n$. Συγκεκριμένα, για $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, ορίζουμε το ***εσωτερικό γινόμενο*** των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ ως εξής: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$. Στον $\mathbb{R}^n$, για το εσωτερικό γινόμενο χρησιμοποιείται συχνά ο συμβολισμός $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ αντί του $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Συνεχίζοντας την αντιστοιχία με τον $\mathbb{R}^3$, ορίζουμε την έννοια του ***μήκους*** ή ***νόρμας*** ενός διανύσματος $\mathbf{x}$ μέσω της σχέσης

$$\text{Μήκος του } \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Αν $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ είναι δύο διανύσματα στο επίπεδο ($\mathbb{R}^2$) ή στον χώρο ($\mathbb{R}^3$), τότε γνωρίζουμε ότι η γωνία $\theta$ που σχηματίζουν δίνεται από τον τύπο

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}.$$

Το δεξιό μέλος αυτής της εξίσωσης ορίζεται στον $\mathbb{R}^n$ εξίσου καλά όπως στον $\mathbb{R}^2$ ή τον $\mathbb{R}^3$. Εξακολουθεί να αναπαριστά το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$. Η γωνία αυτή είναι γεωμετρικά καλά ορισμένη διότι τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ ανήκουν σε έναν διδιάστατο υποχώρο του $\mathbb{R}^n$ (στο επίπεδο που ορίζουν τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$), και σε αυτού του είδους τα επίπεδα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις συνήθεις γεωμετρικές μας έννοιες.

Θα μας φανεί χρήσιμο να γνωρίζουμε κάποιες αλγεβρικές ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου. Συνοψίζονται στο παρακάτω θεώρημα [συγκρίνετέ τις με τις ιδιότητες (i), (ii), (iii) και (iv) της Ενότητας 1.2].

**Θεώρημα 3** Για $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ και $\alpha, \beta$ πραγματικούς αριθμούς, έχουμε

(i) $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$.

(ii) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$.

(iii) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$.

(iv) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

**Απόδειξη** Και οι τέσσερις ισχυρισμοί αποδεικνύονται με απλές πράξεις. Για παράδειγμα, για να αποδείξουμε την ιδιότητα (i) γράφουμε

$$\begin{aligned}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} &= (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \ldots, \alpha x_n + \beta y_n) \cdot (z_1, z_2, \ldots, z_n) \\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1)z_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2)z_2 + \cdots + (\alpha x_n + \beta y_n)z_n \\ &= a x_1 z_1 + \beta y_1 z_1 + \alpha x_2 z_2 + \beta y_2 z_2 + \cdots + \alpha x_n z_n + \beta y_n z_n \\ &= \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}).\end{aligned}$$

Οι υπόλοιπες αποδείξεις είναι παρόμοιες. ■

Στην Ενότητα 1.2, αποδείξαμε μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα των εσωτερικών γινομένων, τη λεγόμενη ανισότητα Cauchy-Schwarz.[4] Για τον $\mathbb{R}^2$, στην απόδειξη χρειάστηκε να χρησιμοποιήσουμε τον νόμο των συνημιτόνων. Για τον $\mathbb{R}^n$, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την ίδια μέθοδο, περιορίζοντας την προσοχή μας σε ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^n$. Μπορούμε όμως να δώσουμε και μια άμεση, τελείως αλγεβρική απόδειξη.

**Θεώρημα 4 Ανισότητα Cauchy-Schwarz στον $\mathbb{R}^n$** Αν $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|.$$

**Απόδειξη** Έστω $a = \mathbf{y}\cdot\mathbf{y}$ και $b = -\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$. Αν $a = 0$, είναι προφανές ότι το θεώρημα ισχύει, διότι σε αυτή την περίπτωση $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ αμφότερα τα μέλη της ανισότητας είναι 0. Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a \neq 0$. Από το Θεώρημα 3 έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \leq (a\mathbf{x}+b\mathbf{y})\cdot(a\mathbf{x}+b\mathbf{y}) &= a^2\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + 2ab\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + b^2\mathbf{y}\cdot\mathbf{y} \\ &= (\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})^2\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} - (\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2. \end{aligned}$$

Διαιρώντας με $\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}$ παίρνουμε $0 \leq (\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}) - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2$, δηλαδή $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2$. Παίρνοντας την τετραγωνική ρίζα και των δύο μελών αυτής της ανισότητας καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα. ■

Υπάρχει μια χρήσιμη συνέπεια της ανισότητας Cauchy-Schwarz που αφορά τα μήκη. Η τριγωνική ανισότητα είναι γεωμετρικά ξεκάθαρη στον $\mathbb{R}^3$ και τη μελετήσαμε στην Ενότητα 1.2. Η *αναλυτική* απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας που δώσαμε στην Ενότητα 1.2 μπορεί να γίνει με τον ίδιο ακριβώς τρόπο στον $\mathbb{R}^n$· έτσι αποδεικνύεται το εξής:

**Πόρισμα Τριγωνική ανισότητα στον $\mathbb{R}^n$** Αν $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Αν γράψουμε το Θεώρημα 4 και το πόρισμά του αλγεβρικά, προκύπτουν οι εξής χρήσιμες ανισότητες:

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{1/2}.$$

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{1/2}.$$

[4]Μερικές φορές ονομάζεται ανισότητα Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz, ή απλώς ανισότητα CBS, διότι ανακαλύφθηκε ανεξάρτητα για ειδικές περιπτώσεις από τον Γάλλο μαθηματικό Cauchy, τον Ρώσο μαθηματικό Bunyakovskii και τον Γερμανό μαθηματικό Schwarz.

**Παράδειγμα 1** Έστω $\mathbf{x} = (1, 2, 0, -1)$ και $\mathbf{y} = (-1, 1, 1, 0)$. Επαληθεύστε το Θεώρημα 4 και το πόρισμά του στη συγκεκριμένη περίπτωση.

**Λύση**

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \\ \|\mathbf{y}\| &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{3} \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= 1(-1) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1)0 = 1 \\ \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (0, 3, 1, -1) \\ \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| &= \sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}. \end{aligned}$$

Έχουμε $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 1 \leq 4{,}24 \approx \sqrt{6}\sqrt{3} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$, οπότε το Θεώρημα 4 επαληθεύτηκε. Με αντίστοιχο τρόπο, μπορούμε να ελέγξουμε το πόρισμά του:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| &= \sqrt{11} \approx 3{,}32 \\ &\leq 4{,}18 = 2{,}45 + 1{,}73 \approx \sqrt{6} + \sqrt{3} = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|. \end{aligned}$$

▲

Κατ' αντιστοιχία με τον $\mathbb{R}^3$, μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της απόστασης στον $\mathbb{R}^n$. Συγκεκριμένα, αν $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ είναι σημεία του $\mathbb{R}^n$, η ***απόσταση μεταξύ των*** $\mathbf{x}$ ***και*** $\mathbf{y}$ ορίζεται ως $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, δηλαδή ως το μήκος του διανύσματος $\mathbf{x} - \mathbf{y}$. Δεν επιχειρούμε να ορίσουμε το εξωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$ παρά μόνο για $n = 3$.

## Γενικοί πίνακες

Γενικεύοντας τους πίνακες $2 \times 2$ και $3 \times 3$ (βλ. Ενότητα 1.3), μπορούμε να θεωρήσουμε πίνακες $m \times n$, οι οποίοι είναι συστοιχίες $mn$ αριθμών:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Θα γράφουμε τον $A$ και ως $[a_{ij}]$. Ορίζουμε την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με πραγματικό αριθμό κατά στοιχείο, ακριβώς όπως κάναμε για τα διανύσματα. Αν μας δίνονται δύο πίνακες $m \times n$ $A$ και $B$, μπορούμε να τους προσθέσουμε ώστε να πάρουμε έναν νέο πίνακα $m \times n$ $C = A + B$, του οποίου το $ij$-οστό στοιχείο $c_{ij}$ είναι το άθροισμα των $a_{ij}$ και $b_{ij}$. Είναι φανερό ότι $A + B = B + A$.

**Παράδειγμα 2**

(α) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

(β) $[1 \quad 2] + [0 \quad -1] = [1 \quad 1]$.

(γ) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

▲

Αν μας δίνεται ένας πραγματικός αριθμός $\lambda$ και ένας πίνακας $m \times n$ $A$, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τον $A$ με το $\lambda$ ώστε να πάρουμε έναν νέο πίνακα $m \times n$ $\lambda A = C$, του οποίου το $ij$-οστό στοιχείο $c_{ij}$ είναι το γινόμενο $\lambda a_{ij}$.

**Παράδειγμα 3**

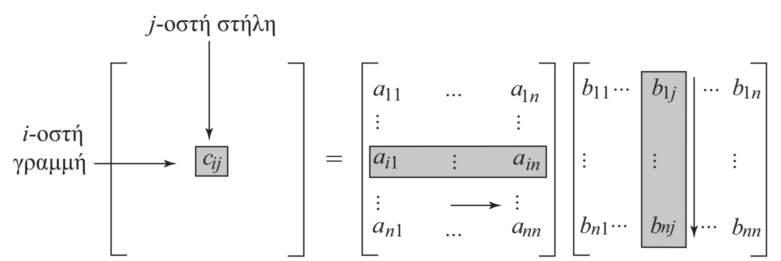
$$3\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 5\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -3 & 6\\ 0 & 3 & 15\\ 3 & 0 & 9\end{bmatrix}.$$

▲

Στη συνέχεια θα ορίσουμε τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Αν $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ είναι πίνακες $n \times n$, τότε τα στοιχεία του γινόμενου $AB = C$ δίνονται από την

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

που είναι το εσωτερικό γινόμενο της $i$-οστής γραμμής του $A$ και της $j$-οστής στήλης του $B$:




**Παράδειγμα 4** Αν

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

τότε

$$AB = \begin{bmatrix}0 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad BA = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Παρατηρήστε ότι $AB \neq BA$. ▲

Με αντίστοιχο τρόπο, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε έναν πίνακα $m \times n$ ($m$ γραμμές, $n$ στήλες) με έναν πίνακα $n \times p$ ($n$ γραμμές, $p$ στήλες) ώστε να πάρουμε έναν πίνακα $m \times p$ ($m$ γραμμές, $p$ στήλες) χρησιμοποιώντας τον ίδιο κανόνα. Προσέξτε ότι για να ορίζεται ο $AB$, το πλήθος των *στηλών* του $A$ πρέπει να ισούται με το πλήθος των *γραμμών* του $B$.

**Παράδειγμα 5** Αν

$$A = \begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

τότε

$$AB = \begin{bmatrix}3 & 1 & 5\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix},$$

ενώ ο $BA$ δεν ορίζεται. ▲

**Παράδειγμα 6** Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad B = [2 \quad 2 \quad 1 \quad 2],$$

τότε

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad BA = [13].$$

▲

Κάθε πίνακας $m \times n$ $A$ ορίζει μια απεικόνιση του $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$ που προκύπτει ως εξής: Έστω $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Θεωρούμε τον πίνακα-στήλη $n \times 1$ που αντιστοιχεί στο $\mathbf{x}$, τον οποίο θα συμβολίσουμε *προσωρινά* με $\mathbf{x}^T$

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

και πολλαπλασιάζουμε τον $A$ με τον $\mathbf{x}^T$ (θεωρώντας τον ως πίνακα $n \times 1$) ώστε να προκύψει ένας νέος πίνακας $m \times 1$

$$A\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \mathbf{y}^T,$$

ο οποίος αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$.[5] Επομένως, μολονότι μπορεί να προκαλείται σύγχυση, όταν τα $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ και $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ συμμετέχουν σε κάποιον πολλαπλασιασμό πινάκων θα τα γράφουμε ως πίνακες-στήλες:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Δηλαδή θα *ταυτίζουμε* αυτούς τους δύο τρόπους γραφής των διανυσμάτων. Γι' αυτό, θα σβήσουμε το $T$ από το $\mathbf{x}^T$ και θα θεωρούμε ότι τα $\mathbf{x}^T$ και $\mathbf{x}$ είναι το ίδιο πράγμα.

Άρα $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ σημαίνει «στην πραγματικότητα» το εξής: Γράφουμε το $\mathbf{x}$ ως πίνακα-στήλη, το πολλαπλασιάζουμε με τον $A$, και ορίζουμε ως $\mathbf{y}$ το διάνυσμα που έχει ως συνιστώσες τις συνιστώσες του πίνακα-στήλη που προκύπτει. Ο κανόνας $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ ορίζει επομένως μια απεικόνιση του $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$. Αυτή η απεικόνιση είναι γραμμική, δηλαδή ικανοποιεί τις

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$$
$$A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha(A\mathbf{x}), \qquad \text{αν ο } \alpha \text{ είναι πραγματικός αριθμός,}$$

όπως μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε. Στη γραμμική άλγεβρα μαθαίνουμε, αντιστρό-

[5] Για να χρησιμοποιήσουμε έναν πίνακα $A$ ώστε να πάρουμε μια απεικόνιση από τα διανύσματα $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ στα διανύσματα $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ σύμφωνα με την εξίσωση $A\mathbf{x}^T = \mathbf{y}^T$, γράφουμε τα διανύσματα στη μορφή στήλης $\mathbf{x}^T$ αντί στη μορφή γραμμής $(x_1, \dots, x_n)$. Αυτή η ξαφνική αλλαγή στη γραφή του $\mathbf{x}$ από τη μορφή γραμμής στη μορφή στήλης επιβάλλεται από τις συμβάσεις που διέπουν τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

φως, ότι κάθε γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$ μπορεί να αναπαρασταθεί με αυτό τον τρόπο μέσω ενός πίνακα $m \times n$.

Αν $A = [a_{ij}]$ είναι ένας πίνακας $m \times n$ και $\mathbf{e}_j$ είναι το $j$-οστό διάνυσμα της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^n$, τότε το $A\mathbf{e}_j$ είναι ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$ με συνιστώσες ίδιες με την $j$-οστή στήλη του $A$. Δηλαδή η $i$-οστή συνιστώσα του $A\mathbf{e}_j$ είναι το $a_{ij}$. Με σύμβολα, $(A\mathbf{e}_j)_i = a_{ij}$.

**Παράδειγμα 7** Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

τότε η $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ είναι η εξής απεικόνιση του $\mathbb{R}^3$ στον $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 + 3x_3 \\ -x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

▲

**Παράδειγμα 8** Αυτό το παράδειγμα περιγράφει τι συμβαίνει σε ένα συγκεκριμένο σημείο όταν απεικονίζεται μέσω ενός πίνακα $4 \times 3$:

$$A\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\text{η γραμμή του } A.$$

▲

## Ιδιότητες των πινάκων

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι ***αντιμεταθετικός***: Αν $A$ και $B$ είναι πίνακες $n \times n$, τότε εν γένει

$$AB \neq BA,$$

όπως φαίνεται στα Παραδείγματα 4, 5 και 6.

Λέμε ότι ένας πίνακας $n \times n$ είναι ***αντιστρέψιμος*** αν υπάρχει ένας πίνακας $n \times n$ $B$ τέτοιος ώστε

$$AB = BA = I_n,$$

όπου

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

είναι ο μοναδιαίος πίνακας $n \times n$: ο $I_n$ έχει την ιδιότητα ότι $I_nC = CI_n = C$ για οποιονδήποτε πίνακα $n \times n$ $C$. Συμβολίζουμε τον $B$ με $A^{-1}$ και καλούμε τον $A^{-1}$ ***αντίστροφο*** του $A$. Ο αντίστροφος, όταν υπάρχει, είναι μοναδικός.

**Παράδειγμα 9** Αν

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{τότε} \qquad A^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ -6 & 12 & 4 \end{bmatrix},$$

διότι $AA^{-1} = I_3 = A^{-1}A$, όπως μπορούμε να επιβεβαιώσουμε πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες. ▲

Οι μέθοδοι υπολογισμού των αντιστρόφων διδάσκονται στη γραμμική άλγεβρα· σε αυτό το βιβλίο δεν χρειαζόμαστε αυτές τις μεθόδους. Αν ο $A$ είναι αντιστρέψιμος, μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ως προς το διάνυσμα $\mathbf{x}$ πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $A^{-1}$ ώστε να πάρουμε[6] $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$.

Στην Ενότητα 1.3 ορίσαμε την ορίζουσα ενός πίνακα $3 \times 3$. Ο ορισμός μπορεί να γενικευθεί επαγωγικά για ορίζουσες $n \times n$. Ακολούθως δείχνουμε πώς γράφουμε την ορίζουσα ενός πίνακα $4 \times 4$ συναρτήσει οριζουσών πινάκων $3 \times 3$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

[βλ. τον τύπο (2) της Ενότητας 1.3· τα πρόσημα εναλλάσσονται: $+, -, +, -$].

Οι βασικές ιδιότητες των οριζουσών $3\times 3$ που είδαμε στην Ενότητα 1.3 εξακολουθούν να ισχύουν και για τις ορίζουσες $n\times n$. Ειδικότερα, επισημαίνουμε ότι αν $A$ είναι ένας πίνακας $n \times n$ και $B$ ένας πίνακας που προκύπτει με την πρόσθεση ενός βαθμωτού πολλαπλασίου μίας γραμμής (ή στήλης) του $A$ σε κάποια άλλη γραμμή (ή, αντίστοιχα, στήλη) του $A$, τότε η ορίζουσα του $A$ ισούται με την ορίζουσα του $B$ (βλ. Παράδειγμα 10).

Ένα βασικό θεώρημα της γραμμικής άλγεβρας λέει ότι ένας πίνακας $n \times n$ $A$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η ορίζουσα του $A$ δεν είναι μηδέν. Μια άλλη βασική ιδιότητα είναι ότι η ορίζουσα είναι πολλαπλασιαστική: $\det(AB) = (\det A)(\det B)$. Επειδή σε αυτό το βιβλίο δεν θα χρησιμοποιήσουμε πολλές λεπτομέρειες από τη γραμμική άλγεβρα, δεν θα αποδείξουμε αυτούς τους ισχυρισμούς.

**Παράδειγμα 10** Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε την $\det A$. Έχει ο $A$ αντίστροφο;

**Λύση** Προσθέτοντας το $(-1) \times$ πρώτη στήλη στην τρίτη στήλη, παίρνουμε

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

[6] Ο κανόνας του Cramer της Ενότητας 1.3 μας δίνει έναν τρόπο να αντιστρέφουμε πίνακες. Αριθμητικά αποδοτικότερες μέθοδοι που βασίζονται σε μεθόδους απαλοιφής διδάσκονται στη γραμμική άλγεβρα ή στην επιστήμη υπολογιστών.

Προσθέτοντας το $(-1) \times$ πρώτη στήλη στην τρίτη στήλη αυτής της ορίζουσας $3 \times 3$ παίρνουμε

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Επομένως, $\det A = -2 \neq 0$, άρα ο $A$ έχει αντίστροφο. ▲

Αν έχουμε τρεις πίνακες $A$, $B$ και $C$ για τους οποίους ορίζονται τα γινόμενα $AB$ και $BC$, τότε τα γινόμενα $(AB)C$ και $A(BC)$ ορίζονται και μάλιστα είναι ίσα (δηλαδή ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι *προσεταιριστικός*). Θα ονομάζουμε αυτό το γινόμενο *τριπλό γινόμενο* πινάκων και θα το συμβολίζουμε με $ABC$.

**Παράδειγμα 11** Αν

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

τότε

$$ABC = A(BC) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} [3] = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

▲

**Παράδειγμα 12**

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

▲

## Ιστορικό σημείωμα

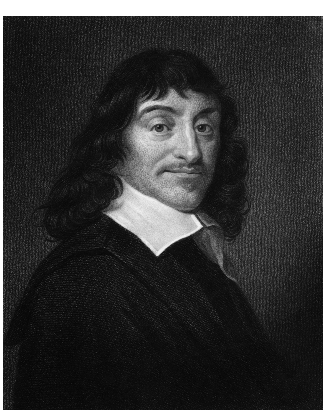
Ο θεμελιωτής της σύγχρονης γεωμετρίας (συντεταγμένων) ήταν ο René Descartes (Καρτέσιος) (βλ. Σχήμα 1.5.1), ένας μεγάλος φυσικός, φιλόσοφος και μαθηματικός, αλλά και θεμελιωτής της σύγχρονης βιολογίας.

Γεννημένος στην Touraine της Γαλλίας το 1596, ο Καρτέσιος είχε μια συναρπαστική ζωή. Αφού σπούδασε νομική, εγκαταστάθηκε στο Παρίσι, όπου ανέπτυξε ενδιαφέρον για τα μαθηματικά. Το 1628, μετακόμισε στην Ολλανδία, όπου έγραψε το μόνο μαθηματικό έργο του, το *La Geometrie* («Η γεωμετρία»), μία από τις ρίζες της σύγχρονης γεωμετρίας συντεταγμένων.

Ο Καρτέσιος υπήρξε σφοδρός επικριτής της γεωμετρίας των αρχαίων Ελλήνων, με τους τόσους πολλούς μη ορισμένους όρους και τις αποδείξεις που απαιτούσαν ολοένα και πιο καινούργιες και ευρηματικές προσεγγίσεις. Για τον Καρτέσιο, αυτή η γεωμετρία εξαρτιόταν τόσο στενά από τα γεωμετρικά σχήματα «που μπορεί να εξασκήσει τη νόηση μόνο καταπονώντας σφόδρα τη φαντασία.» Επιχείρησε να εκμεταλλευτεί, στη γεωμετρία, τη χρήση της άλγεβρας, η οποία είχε αναπτυχθεί πρόσφατα. Το αποτέλεσμα ήταν το *La Geometrie*, το οποίο κατέστησε εφικτή τη χρήση αναλυτικών ή υπολογιστικών μεθόδων στη γεωμετρία.

Υπενθυμίζουμε ότι οι Έλληνες ήταν, όπως ο Καρτέσιος, φιλόσοφοι, αλλά και μαθηματικοί και φυσικοί. Η απάντησή τους στο ερώτημα περί σημασίας του χώρου ήταν η «ευκλείδεια γεωμετρία». Ο Καρτέσιος πέτυχε επομένως να «αλγεβροποιήσει» το ελληνικό μοντέλο του χώρου.

Ο Gottfried Wilhelm Leibniz, συνθεμελιωτής (μαζί με τον Νεύτωνα) του απειροστικού λογισμού, ενδιαφερόταν επίσης για τη «χωρική ανάλυση», αλλά πίστευε ότι η άλγεβρα του Καρτέσιου δεν προχωρούσε αρκετά μακριά. Ο Leibniz ζήτησε την ανάπτυξη μιας άμεσης μεθόδου χωρικής ανάλυσης (*τοπολογίας*), πράγμα που θα μπορούσε να ερμηνευτεί ως κάλεσμα για την ανάπτυξη της διανυσματικής ανάλυσης.



Σχήμα 1.5.1 René Descartes (1596–1650).

Στις 8 Σεπτεμβρίου 1679, ο Leibniz σκιαγράφησε τις ιδέες του σε ένα γράμμα προς τον Christiaan Huygens:

> Εξακολουθώ να μην είμαι ικανοποιημένος με την άλγεβρα, διότι δεν προσφέρει ούτε τις συντομότερες μεθόδους ούτε τις ομορφότερες κατασκευές στη γεωμετρία. Γι' αυτό πιστεύω ότι, όσον αφορά τη γεωμετρία, εξακολουθούμε να χρειαζόμαστε ένα άλλο είδος ανάλυσης που να είναι σαφώς γεωμετρική ή γραμμική και να εκφράζει άμεσα τη θέση (τον τόπο) όπως η άλγεβρα εκφράζει άμεσα το μέτρο. Και πιστεύω πως έχω βρει τον τρόπο και πως μπορούμε να αναπαραστήσουμε σχήματα, ακόμα και μηχανές και κινήσεις με χαρακτήρες, όπως η άλγεβρα αναπαριστά αριθμούς ή μεγέθη. Σου στέλνω μια εργασία που θεωρώ σημαντική.

Σε αυτή την εργασία, ο Leibniz περιέγραψε λεπτομερέστερα τις ιδέες του.

## Ασκήσεις

**1.** Υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο των $\mathbf{x} = (1, -1, 0, 2) \in \mathbb{R}^4$ και $\mathbf{y} = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$.

**2.** Στον $\mathbb{R}^n$ δείξτε ότι

(α) $2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$ (Αυτός είναι γνωστός ως ***κανόνας του παραλληλογράμμου***.)

(β) $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$

(γ) $4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$ (Η λεγόμενη ***ταυτότητα πόλωσης***.)

Ερμηνεύστε αυτά τα αποτελέσματα γεωμετρικά με βάση το παραλληλόγραμμο που σχηματίζουν τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$.

*Επαληθεύστε την ανισότητα Cauchy-Schwarz και την τριγωνική ανισότητα για τα διανύσματα των Ασκήσεων 3 ώς 6.*

**3.** $\mathbf{x} = (2, 0, -1)$, $\mathbf{y} = (4, 0, -2)$

**4.** $\mathbf{x} = (1, 0, 2, 6)$, $\mathbf{y} = (3, 8, 4, 1)$

**5.** $\mathbf{x} = (1, -1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{y} = (3, 0, 0, 0, 2)$

**6.** $\mathbf{x} = (1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{y} = (-1, 0, 0, 1)$

**7.** Έστω $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Αν $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\|$, δείξτε ότι τα $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ και $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ είναι ορθογώνια.

**8.** Έστω $T$ ένα τρίγωνο που σχηματίζεται αν τοποθετήσουμε τρία σημεία σε έναν κύκλο, δύο από τα οποία βρίσκονται επάνω στη διάμετρο του κύκλου. Χρησιμοποιήστε το προηγούμενο πρόβλημα για να δείξετε ότι το $T$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

**9.** Υπολογίστε τα $AB$, $\det A$, $\det B$, $\det(AB)$ και $\det(A+B)$ για τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

**10.** Υπολογίστε τα $AB$, $\det A$, $\det B$, $\det(AB)$ και $\det(A+B)$ για τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**11.** Προσδιορίστε ποιοι από τους παρακάτω πίνακες είναι αντιστρέψιμοι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 19 \\ 2 & 3 & \pi \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**12.** Για τον πίνακα $A$ του προηγούμενου προβλήματος, βρείτε ένα μη μηδενικό $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

**13.** Χρησιμοποιώντας επαγωγή επί του $k$ αποδείξτε ότι αν $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\|\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k\| \le \|\mathbf{x}_1\| + \cdots + \|\mathbf{x}_k\|.$$

**14.** Χρησιμοποιώντας άλγεβρα, αποδείξτε την ***ταυτότητα του Lagrange***: Για πραγματικούς αριθμούς $x_1, \dots, x_n$ και $y_1, \dots, y_n$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - \sum_{i<j} (x_i y_j - x_j y_i)^2.$$

Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση, δώστε μια άλλη απόδειξη της ανισότητας Cauchy-Schwarz στον $\mathbb{R}^n$.

**15.** Αποδείξτε ότι αν $A$ είναι ένας πίνακας $n \times n$, τότε

(α) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$, και

(β) αν $B$ είναι ένας πίνακας που προκύπτει από τον $A$ με πολλαπλασιασμό οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης με έναν πραγματικό αριθμό $\lambda$, τότε $\det B = \lambda \det A$.

*Στις Ασκήσεις 16 έως 18, οι $A$, $B$ και $C$ είναι πίνακες $n \times n$.*

**16.** Ισχύει ότι $\det(A+B) = \det A + \det B$; Δώστε μια απόδειξη ή ένα αντιπαράδειγμα.

**17.** Ισχύει ότι $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$;

**18.** Θεωρώντας ότι ισχύει η ταυτότητα $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, αποδείξτε ότι $\det(ABC) = (\det A)(\det B)(\det C)$.

**19.** (Σε αυτή την άσκηση θεωρείται ότι γνωρίζετε να υπολογίζετε ολοκληρώματα συνεχών συναρτήσεων μίας μεταβλητής.) Προσέξτε ότι η απόδειξη της ανισότητας Cauchy-Schwarz (Θεώρημα 4) εξαρτάται μόνο από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου που απαριθμούνται στο Θεώρημα 1. Χρησιμοποιήστε αυτή την παρατήρηση για να αποδείξετε την ισχύ της παρακάτω ανισότητας για συνεχείς συναρτήσεις $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$\left| \int_0^1 f(x)g(x) \quad dx \right| \le \sqrt{\int_0^1 [f(x)]^2 \quad dx} \sqrt{\int_0^1 [g(x)]^2 \quad dx}.$$

Κάντε την απόδειξη

(α) επαληθεύοντας ότι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων από το $[0,1]$ στον $\mathbb{R}$ αποτελεί διανυσματικό χώρο· δηλαδή μπορούμε να φανταστούμε αφηρημένα τις συναρτήσεις $f, g$ σαν «διανύσματα» που μπορούν να προστεθούν το ένα στο άλλο και να πολλαπλασιαστούν με πραγματικούς αριθμούς.

(β) εισάγοντας το εσωτερικό γινόμενο συναρτήσεων

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

και επαληθεύοντας ότι ικανοποιεί τις συνθήκες (i) έως (iv) του Θεωρήματος 3.

**20.** Ορίστε τον ανάστροφο $A^T$ ενός πίνακα $n \times n$ $A$ ως εξής: το $ij$-οστό στοιχείο του $A^T$ είναι το $a_{ji}$, όπου $a_{ij}$ είναι το $ij$-οστό στοιχείο του $A$. Δείξτε ότι ο $A^T$ χαρακτηρίζεται από την ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ στον $\mathbb{R}^n$,

$$(A^T\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y}).$$

**21.** Επαληθεύστε ότι ο αντίστροφος του

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \text{είναι ο} \qquad \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

**22.** Χρησιμοποιώντας την απάντηση που δώσατε στην Άσκηση 21, δείξτε ότι η λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

είναι

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

**23.** Θεωρώντας ότι ισχύει η ταυτότητα $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, να επαληθεύσετε ότι $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$ και να συμπεράνετε ότι αν ο $A$ έχει αντίστροφο, τότε $\det A \neq 0$.

**24.** Βρείτε δύο πίνακες $2 \times 2$ $A$ και $B$ τέτοιους ώστε $AB = 0$ αλλά $BA \neq 0$.

## Επαναληπτικές ασκήσεις Κεφαλαίου 1

**1.** Έστω $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ και $\mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Υπολογίστε τα $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, $3\mathbf{v}$, $6\mathbf{v} + 8\mathbf{w}$, $-2\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Ερμηνεύστε γεωμετρικά τις πράξεις σχεδιάζοντας τα διανύσματα.

**2.** Να επαναλάβετε την Άσκηση 1 με $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ και $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - \mathbf{k}$.

**3.** (α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το $(-1, 2, -1)$ και έχει τη διεύθυνση του $\mathbf{j}$.

(β) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα $(0, 2, -1)$ και $(-3, 1, 0)$.

(γ) Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που είναι κάθετο στο διάνυσμα $(-2, 1, 2)$ και διέρχεται από το σημείο $(-1, 1, 3)$.

**4.** (α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το $(0, 1, 0)$ και έχει τη διεύθυνση του $3\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

(β) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα $(0, 1, 1)$ και $(0, 1, 0)$.

(γ) Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που είναι κάθετο στο διάνυσμα $(-1, 1, -1)$ και διέρχεται από το σημείο $(1, 1, 1)$.

**5.** Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που περιέχει τα σημεία $(2, 1, -1)$, $(3, 0, 2)$ και $(4, -3, 1)$.

**6.** Βρείτε μια εξίσωση για μια ευθεία που είναι παράλληλη στο επίπεδο $2x - 3y + 5z - 10 = 0$ και διέρχεται από το σημείο $(-1, 7, 4)$. (Υπάρχουν πολλές.)

**7.** Υπολογίστε το $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ για τα παρακάτω διανύσματα:

(α) $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{w} = \mathbf{k}$

(β) $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$

(γ) $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

**8.** Υπολογίστε το $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ για τα διανύσματα της Άσκησης 7. [Στον Οδηγό μελέτης δίνεται η λύση μόνο για το ερώτημα (β).]

**9.** Βρείτε το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν τα διανύσματα της Άσκησης 7. [Στον Οδηγό μελέτης δίνεται η λύση μόνο για το ερώτημα (β).]

**10.** Βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα διανύσματα της Άσκησης 7. [Στον Οδηγό μελέτης δίνεται η λύση μόνο για το ερώτημα (β).]

**11.** Χρησιμοποιώντας διανυσματικό συμβολισμό περιγράψτε το τρίγωνο του χώρου με κορυφές την αρχή των αξόνων και τα πέρατα των διανυσμάτων $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.

**12.** Δείξτε ότι τρία διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ανήκουν στο ίδιο επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων αν και μόνο αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma$, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

**13.** Για πραγματικούς αριθμούς $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, δείξτε ότι

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

**14.** Έστω $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ μοναδιαία διανύσματα που είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Αν $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}$, δείξτε ότι

$$\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}, \qquad \beta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}, \qquad \gamma = \mathbf{a} \cdot \mathbf{w}.$$

Ερμηνεύστε γεωμετρικά τα αποτελέσματα.

**15.** Βρείτε τα γινόμενα $AB$ και $BA$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

**16.** Βρείτε τα γινόμενα $AB$ και $BA$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

**17.** Έστω $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ δύο διανύσματα στο επίπεδο, $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, και έστω $\lambda$ ένας πραγματικός αριθμός. Δείξτε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b} + \lambda\mathbf{a}$ είναι το ίδιο με αυτό που ορίζουν τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$. Κάντε ένα σχήμα. Συσχετίστε το αποτέλεσμα με μια γνωστή ιδιότητα των οριζουσών.

**18.** Βρείτε τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που ορίζουν οι κορυφές $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 2, 0)$, $(3, 1, 2)$.

**19.** Δεδομένων δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ στον $\mathbb{R}^3$, δείξτε ότι το διάνυσμα $\mathbf{v} = \|\mathbf{a}\|\mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|\mathbf{a}$ διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.

**20.** Δείξτε ότι τα διανύσματα $\|\mathbf{b}\|\mathbf{a} + \|\mathbf{a}\|\mathbf{b}$ και $\|\mathbf{b}\|\mathbf{a} - \|\mathbf{a}\|\mathbf{b}$ είναι ορθογώνια.

**21.** Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, δείξτε ότι $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \ge \big|\|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{w}\|\big|$.

**22.** Χρησιμοποιώντας διανυσματικές μεθόδους, αποδείξτε ότι η απόσταση του σημείου $(x_1, y_1)$ από την ευθεία $ax + by = c$ είναι

$$\frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

**23.** Επαληθεύστε ότι η κατεύθυνση του $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού, επιλέγοντας ως $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ δύο από τα διανύσματα $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$.

**24.** (α) Έστω ότι $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}$ για κάθε $\mathbf{b}$. Δείξτε ότι $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$.

(β) Έστω ότι $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}$ για κάθε $\mathbf{b}$. Ισχύει ότι $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$;

**25.** (α) Χρησιμοποιώντας διανυσματικές μεθόδους, δείξτε ότι η απόσταση μεταξύ δύο μη παράλληλων ευθειών $l_1$ και $l_2$ δίνεται από την έκφραση

$$d = \frac{|(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)|}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|},$$

όπου $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ είναι οποιαδήποτε δύο σημεία των $l_1$ και $l_2$, αντίστοιχα, και $\mathbf{a}_1$ και $\mathbf{a}_2$ είναι οι κατευθύνσεις των $l_1$ και $l_2$. [Υποδειξη: Θεωρήστε το επίπεδο που διέρχεται από την $l_2$ και είναι παράλληλο στην $l_1$. Δείξτε ότι το διάνυσμα $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)/\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|$ είναι ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα αυτού του επιπέδου· στη συνέχεια να προβάλετε το $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ επί αυτής της κάθετης κατεύθυνσης.]

(β) Βρείτε την απόσταση μεταξύ της ευθείας $l_1$ που ορίζουν τα σημεία $(-1, -1, 1)$ και $(0, 0, 0)$ και της ευθείας $l_2$ που ορίζουν τα σημεία $(0, -2, 0)$ και $(2, 0, 5)$.

**26.** Δείξτε ότι δύο επίπεδα που δίνονται από τις εξισώσεις $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ και $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ είναι παράλληλα και ότι η μεταξύ τους απόσταση είναι

$$\frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

**27.** (α) Αποδείξτε ότι το εμβαδόν του τριγώνου του επιπέδου με κορυφές $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$ είναι η απόλυτη τιμή της

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

(β) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα $(1, 2)$, $(0, 1)$, $(-1, 1)$.

**28.** Μετατρέψτε τα παρακάτω σημεία από καρτεσιανές σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες και σχεδιάστε τα:

(α) $(0,3,4)$
(β) $(-\sqrt{2},1,0)$
(γ) $(0,0,0)$
(δ) $(-1,0,1)$
(ε) $(-2\sqrt{3},-2,3)$

**29.** Μετατρέψτε τα παρακάτω σημεία από κυλινδρικές σε καρτεσιανές και σφαιρικές συντεταγμένες και σχεδιάστε τα:

(α) $(1,\pi/4,1)$
(β) $(3,\pi/6,-4)$
(γ) $(0,\pi/4,1)$
(δ) $(2,-\pi/2,1)$
(ε) $(-2,-\pi/2,1)$

**30.** Μετατρέψτε τα παρακάτω σημεία από σφαιρικές σε καρτεσιανές και κυλινδρικές συντεταγμένες και σχεδιάστε τα:

(α) $(1,\pi/2,\pi)$
(β) $(2,-\pi/2,\pi/6)$
(γ) $(0,\pi/8,\pi/35)$
(δ) $(2,-\pi/2,-\pi)$
(ε) $(-1,\pi,\pi/6)$

**31.** Γράψτε την εξίσωση $z=x^2-y^2$ χρησιμοποιώντας κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.

**32.** Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες, δείξτε ότι

$$\phi=\cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{k}}{\|\mathbf{u}\|}\right),$$

όπου $\mathbf{u}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$. Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία.

**33.** Επαληθεύστε την ανισότητα Cauchy-Schwarz και την τριγωνική ανισότητα για

$$\mathbf{x}=(3,2,1,0) \qquad \text{και} \qquad \mathbf{y}=(1,1,1,2).$$

**34.** Πολλαπλασιάστε τους πίνακες

$$A=\begin{bmatrix}3&0&1\\2&0&1\\1&0&1\end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad B=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Ισχύει η σχέση $AB=BA$;

**35.** (α) Δείξτε ότι για δύο $n\times n$ πίνακες $A$ και $B$, και $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$,

$$(AB)\mathbf{x}=A(B\mathbf{x}).$$

(β) Τι συνεπάγεται η ισότητα του ερωτήματος (α) για τη σχέση μεταξύ της σύνθεσης των απεικονίσεων $\mathbf{x}\mapsto B\mathbf{x}$, $\mathbf{y}\mapsto A\mathbf{y}$ και τον πολλαπλασιασμό πινάκων;

**36.** Βρείτε τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα διανύσματα $(1,0,1)$, $(1,1,1)$ και $(-3,2,0)$.

**37.** (Για φοιτητές με γνώσεις γραμμικής άλγεβρας.) Επαληθεύστε ότι κάθε γραμμική απεικόνιση $T$ από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^n$ ορίζεται από έναν πίνακα $n\times n$.

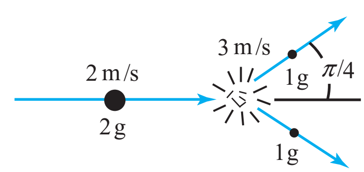
**38.** Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που περιέχει το $(3,-1,2)$ και την ευθεία με εξίσωση $\mathbf{v}=(2,-1,0)+t(2,3,0)$.

**39.** Το έργο $W$ που εκτελείται κατά τη μετακίνηση ενός αντικειμένου από το $(0,0)$ στο $(7,2)$ υπό την επίδραση μιας σταθερής δύναμης $\mathbf{F}$ είναι $W=\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}$, όπου $\mathbf{r}$ είναι το διάνυσμα με κεφαλή το $(7,2)$ και ουρά το $(0,0)$. Οι μονάδες είναι μέτρα και νιούτον.

(α) Υποθέστε ότι η δύναμη είναι $\mathbf{F}=10\cos\theta\mathbf{i}+10\sin\theta\mathbf{j}$. Βρείτε το $W$ συναρτήσει του $\theta$.

(β) Υποθέστε ότι η δύναμη $\mathbf{F}$ έχει μέτρο 6 νιούτον και σχηματίζει γωνία $\pi/6$ rad με το οριζόντιο επίπεδο, με κατεύθυνση προς τα δεξιά. Βρείτε το $W$ σε νιούτον επί μέτρα (τζάουλ).

**40.** Αν ένα σωματίδιο μάζας $m$ κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}$, η *ορμή* του είναι $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$. Σε ένα παιχνίδι με βόλους, ένας βόλος μάζας 2 γραμμαρίων (g) εκσφενδονίζεται με ταχύτητα 2 μέτρων το δευτερόλεπτο (m/s), χτυπάει δύο βόλους που έχουν μάζα 1 g ο καθένας και σταματάει. Ένας από τους βόλους εκτινάσσεται με ταχύτητα 3 m/s υπό γωνία 45° ως προς την κατεύθυνση πρόσπτωσης του μεγαλύτερου βόλου, όπως στο Σχήμα 1.R.1. Αν υποθέσουμε ότι η συνολική ορμή πριν και μετά τη σύγκρουση είναι η ίδια (σύμφωνα με τον νόμο διατήρησης της ορμής), υπό ποια γωνία και με τι ταχύτητα θα κινηθεί ο δεύτερος βόλος;




Σχήμα 1.E.1 Ορμή και βόλοι.

**41.** Δείξτε ότι για κάθε $x,y,z$,

$$\begin{vmatrix}x+2&y&z\\z&y+1&10\\5&5&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}y&x+2&z\\1&z-x-2&10-z\\5&5&2\end{vmatrix}.$$

**42.** Δείξτε ότι αν τα $x$, $y$ και $z$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους,

$$\begin{vmatrix}1&x&x^2\\1&y&y^2\\1&z&z^2\end{vmatrix}\neq 0.$$

**43.** Δείξτε ότι

$$\begin{vmatrix}66&628&246\\88&435&24\\2&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}68&627&247\\86&436&23\\2&-1&1\end{vmatrix}.$$

**44.** Δείξτε ότι η τιμή της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} n & n+1 & n+2 \\ n+3 & n+4 & n+5 \\ n+6 & n+7 & n+8 \end{vmatrix}$$

είναι ανεξάρτητη από το $n$. Ποια είναι αυτή η τιμή;

**45.** Οι παρακάτω ποσότητες είναι διανύσματα ή πραγματικοί αριθμοί;

(α) Ο τρέχων πληθυσμός της Santa Cruz της Καλιφόρνιας

(β) Η στροφορμή ενός ποδηλάτη που κάνει ποδήλατο

(γ) Η ταχύτητα του ανέμου που διέρχεται μέσα από έναν ανεμοδείκτη.

(δ) Η θερμοκρασία μιας πίτσας στον φούρνο

**46.** Βρείτε έναν πίνακα $4 \times 4$ $C$ τέτοιον ώστε για κάθε πίνακα $4 \times 4$ $A$ να ισχύει $CA = 3A$.

**47.** Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(α) Βρείτε τους $A^{-1}$, $B^{-1}$ και $(AB)^{-1}$.

(β) Δείξτε ότι $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$ αλλά $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

**48.** Έστω ότι ο $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος και έχει ακέραια στοιχεία. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούνται ώστε να έχει ακέραια στοιχεία ο $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}$;

**49.** Ο όγκος ενός τετραέδρου με συντρέχουσες ακμές $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ είναι $V = \frac{1}{6}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

(α) Εκφράστε τον όγκο ως ορίζουσα.

(β) Υπολογίστε τον $V$ όταν $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

*Στις Ασκήσεις 50 και 51 χρησιμοποιήστε τον εξής ορισμό: Έστω $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$ που ξεκινούν από το 0 και καταλήγουν στις μάζες $m_1, \ldots, m_n$. Το **κέντρο μάζας** είναι το διάνυσμα*

$$\mathbf{c} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

**50.** Ένα τετράεδρο έχει τη μία του κορυφή στο $(0, 0, 0)$ (σε καρτεσιανές συντεταγμένες) και οι τρεις συντρέχουσες ακμές στο σημείο $(0, 0, 0)$ συμπίπτουν με τα διανύσματα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

(α) Σχεδιάστε και ονοματίστε τις κεφαλές των διανυσμάτων $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

(β) Βρείτε το κέντρο μάζας καθεμιάς εκ των τεσσάρων τριγωνικών εδρών του τετραέδρου αν σε κάθε κορυφή τοποθετηθεί μια μοναδιαία μάζα.

**51.** Δείξτε ότι για οποιοδήποτε διάνυσμα $\mathbf{r}$, το κέντρο μάζας ενός συστήματος ικανοποιεί την

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \|\mathbf{r}_i - \mathbf{c}\|^2 + m\|\mathbf{r} - \mathbf{c}\|^2,$$

όπου $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ είναι η συνολική μάζα του συστήματος.

*Στις Ασκήσεις 52 έως 57, βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα που να έχει τη δεδομένη ιδιότητα.*

**52.** Είναι παράλληλο στην ευθεία $x = 3t + 1$, $y = 16t - 2$, $z = -(t + 2)$.

**53.** Είναι ορθογώνιο με το επίπεδο $x - 6y + z = 12$.

**54.** Είναι παράλληλο στα επίπεδα $8x + y + z = 1$ και $x - y - z = 0$.

**55.** Είναι ορθογώνιο με τα $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ και $\mathbf{k}$.

**56.** Είναι ορθογώνιο με την ευθεία $x = 2t - 1$, $y = -t - 1$, $z = t + 2$ και το διάνυσμα $\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

**57.** Σχηματίζει γωνία $30°$ με το $\mathbf{i}$ και ίσες γωνίες με τα $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$.