

# Περιεχόμενα

<b>Πρόλογος</b>	<b>ii</b>
<b>2 Παραγωγή</b>	<b>1</b>
2.7 Μερικά τεχνικά θεωρήματα παραγωγής . . . . .	1
<b>3 Παράγωγοι υψηλότερης τάξης και ακρότατα</b>	<b>16</b>
3.1 Η εξίσωση Korteweg–de Vries . . . . .	16
3.3 Max Planck και η αρχή της ελάχιστης δράσης . . . . .	18
3.4A Κριτήριο δεύτερης παραγώγου: ακρότατα υπό συνθήκη . . . . .	20
3.4B Απόδειξη του θεωρήματος πεπλεγμένων συναρτήσεων . . . . .	23
<b>4 Διανυσματικές συναρτήσεις</b>	<b>26</b>
4.1A Σημεία ισοροπίας στη μηχανική . . . . .	26
4.1B Περιστροφές και ο τύπος της ηλιοφάνειας . . . . .	31
4.1Γ Η αρχή της ελάχιστης δράσης . . . . .	43
4.1Δ Emmy Noether και η αρχή του Hamilton . . . . .	53
4.3 Οι τροχιές των πλανητών . . . . .	54
4.4 Ροές και η γεωμετρία της απόκλισης . . . . .	59
<b>5 Διπλά και τριπλά ολοκληρώματα</b>	<b>64</b>
5.2 Εναλλακτικός ορισμός του ολοκληρώματος . . . . .	64
5.6 Τεχνικά θεωρήματα ολοκλήρωσης . . . . .	69
<b>6 Ολοκληρώματα επί καμπυλών και επιφανειών</b>	<b>81</b>
6.2A Ένα απαιτητικό παράδειγμα . . . . .	82
6.2B Το γκαουσιανό ολοκλήρωμα . . . . .	85
<b>7 Ολοκληρώματα επί διαδρομών και επιφανειών</b>	<b>87</b>
7.4 Το πρόβλημα του Plateau . . . . .	87

<b>8 Τα ολοκληρωτικά θεωρήματα της διανυσματικής ανάλυσης</b>	<b>90</b>
8.2 Αλλαγή προσανατολισμού των αστροναυτών . . . . .	90
8.3 Ακριβή διαφορικά . . . . .	92
8.5 Συναρτήσεις του Green . . . . .	94
<b>Επιλεγμένες απαντήσεις και λύσεις για το επιπλέον περιεχόμενο</b>	<b>115</b>

# Πρόλογος

**Δομή του συμπληρώματος.** Το διαδικτυακό αυτό συμπλήρωμα προορίζεται να χρησιμοποιηθεί με την 6η έκδοση του βιβλίου *Διανυσματικός Λογισμός*. Περιέχει συμπληρωματικό υλικό το οποίο παρέχει περαιτέρω πληροφορίες για διάφορα θέματα του διανυσματικού λογισμού, μεταξύ των οποίων διάφορες εφαρμογές και τεχνικές αποδείξεις που έχουν παραλειφθεί από το κυρίως βιβλίο.

Το συμπλήρωμα αυτό απευθύνεται σε φοιτητές που επιθυμούν να εμβαθύνουν, συνήθως με ατομική μελέτη, στην ύλη του βιβλίου — τόσο στη θεωρία όσο και στις εφαρμογές.

**Διορθώσεις και ιστότοπος.** Στον ιστότοπο του βιβλίου

<http://www.whfreeman.com/MarsdenVC6e>

υπάρχει ένας κατάλογος με διορθώσεις και προτάσεις που αφορούν το βιβλίο και τον οδηγό για τους διδάσκοντες. Παρακαλούμε να μας στέλνετε τυχόν νέες διορθώσεις που εντοπίζετε.

**Επιπλέον ιστότοποι.** Υπάρχουν ασφαλώς πάρα πολλοί ιστότοποι που περιέχουν πληθώρα πληροφοριών. Ακολουθούν μερικοί ενδεικτικοί ιστότοποι που σχετίζονται με το περιεχόμενο του βιβλίου:

1. Για τη σφαιρική γεωμετρία του Σχήματος 8.2.13 του βιβλίου βλ.  
<http://torus.math.uiuc.edu/jms/java/dragosphere/> όπου υπάρχει ένα όμορφο JAVA applet για την παράλληλη μεταφορά πάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας.
2. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τον τύπο της ηλιοφάνειας (βλ. Ενότητα 4.1Γ του διαδικτυακού αυτού συμπληρώματος) βλ.  
<http://www.math.niu.edu/rusin/uses-math/position.sun/>.
3. Για την πορεία του Genesis που παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.1.11 βλ.  
<http://genesismission.jpl.nasa.gov/>.

4. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τον Νεύτωνα βλ. για παράδειγμα <http://scienceworld.wolfram.com/biography/Newton.html> και σχετικά με τον Feynmann βλ. <http://www.feynman.com/>.
5. Για τον υπολογισμό επιφανειακών ολοκληρωμάτων με χρήση του Mathematica Notebooks βλ. <http://www.math.umd.edu/jmr/241/surfint.htm>.

**Διαγώνισμα εξάσκησης.** Στον συνοδευτικό ιστότοπο του βιβλίου οι φοιτητές μπορούν να βρουν επίσης ένα πλήρες διαγώνισμα εξάσκησης, το οποίο καλύπτει θέματα από ολόκληρο το βιβλίο, μαζί με τις λύσεις. Αν θέλει κανείς να εξασκηθεί προτείνουμε να αφιερώσει 3 ώρες για να απαντήσει στα θέματα του διαγωνίσματος και στη συνέχεια να το βαθμολογήσει μόνος του, έχοντας υπόψη ότι συχνά υπάρχουν περισσότεροι από ένας τρόποι προσέγγισης ενός προβλήματος.

**Ευχαριστίες.** Όπως και για το κυρίως βιβλίο, τον οδηγό για τους φοιτητές και το εγχειρίδιο για τους διδάσκοντες, είμαστε ευγνώμονες στους αναγνώστες των προηγούμενων εκδόσεων του βιβλίου για τις πολύτιμες συμβουλές τους και την υπόδειξη σημείων του βιβλίου που μπορούν να βελτιωθούν. Για το διαδικτυακό αυτό συμπλήρωμα, ευχαριστούμε ιδιαίτερα τον Alan Weinstein για τη συνεργασία του κατά τη συγγραφή του συμπληρώματος σχετικά με τον τύπο της ηλιοφάνειας (βλ. συμπλήρωμα Κεφαλαίου 4) και για τις διάφορες άλλες ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις του. Ευχαριστούμε αρκετούς αναγνώστες για τα χρήσιμα σχόλιά τους πάνω σε αυτό το συμπλήρωμα, συμπεριλαμβανομένων των Brian Bradie, Dave Rusin και Paulo Sousa.

Στέλνουμε τους χαιρετισμούς μας σε όλους όσους χρησιμοποιούν αυτό το συμπλήρωμα και το βιβλίο με την ελπίδα ότι η μελέτη του διανυσματικού λογισμού θα τους είναι ευχάριστη και επωφελής (τόσο πνευματικά όσο και πρακτικά).

Anthony Tromba (tromba@math.ucsc.edu)  
Department of Mathematics  
University of California  
Santa Cruz, CA 95064

## 2

# Παραγωγή

Στην πρώτη έκδοση των *Principia*, ο Νεύτωνας παραδέχτηκε ότι ο Leibniz γνώριζε μια παρόμοια μέθοδο (των εφαπτομένων), αλλά στην τρίτη έκδοση του 1726, αφού είχε προηγηθεί σφοδρή διαμάχη μεταξύ των υποστηρικτών των δύο ανδρών σε σχέση με το ποιος είχε ανακαλύψει πρώτος τον απειροστικό λογισμό και το αν οι δύο ανακαλύψεις είχαν γίνει ανεξάρτητα η μία από την άλλη, ο Νεύτωνας διέγραψε την αναφορά στον απειροστικό λογισμό του Leibniz. Σήμερα είναι σχεδόν ξεκάθαρο ότι η ανακάλυψη του Νεύτωνα προηγήθηκε αυτής του Leibniz κατά περίπου δέκα χρόνια, αλλά ότι η ανακάλυψη του Leibniz έγινε ανεξάρτητα από αυτή του Νεύτωνα. Επιπλέον, ο Leibniz πιστώνεται την προτεραιότητα της δημοσίευσης, αφού τύπωσε μια περιγραφή του απειροστικού λογισμού του το 1684 στο *Acta Eruditorum*, ένα είδος μηνιαίου επιστημονικού περιοδικού που είχε ξεκινήσει να εκδίδεται δύο μόλις χρόνια νωρίτερα.

Carl B. Boyer  
*A History of Mathematics*

### 2.7 Μερικά τεχνικά θεωρήματα παραγωγής

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε λεπτομερέστερα το μαθηματικό υπόβαθρο του διαφορικού λογισμού και θα δώσουμε μερικές από τις αποδείξεις που παραλείφθηκαν από τις Ενότητες 2.2, 2.3 και 2.5

**Οριακά θεωρήματα.** Θα ξεκινήσουμε δίνοντας τις αποδείξεις των θεωρημάτων για

τα όρια που παρουσιάστηκαν στην Ενότητα 2.2 (η αρίθμηση των θεωρημάτων σε αυτή την ενότητα ταυτίζεται με αυτή του Κεφάλαιου 2). Αρχικά, υπενθυμίζουμε τον ορισμό του ορίου.<sup>1</sup>

**Ορισμός του ορίου.** Έστω  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , όπου  $A$  είναι ένα ανοιχτό σύνολο. Έστω ότι το  $\mathbf{x}_0$  ανήκει στο  $A$  ή είναι συνοριακό σημείο του  $A$  και έστω  $N$  μια γειτονιά του  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Λέμε ότι η  $f$  είναι **τελικά** στο  $N$  καθώς το  $\mathbf{x}$  **τείνει** στο  $\mathbf{x}_0$ , αν υπάρχει μια γειτονιά  $U$  του  $\mathbf{x}_0$  τέτοια ώστε για  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{x} \in U$  και  $\mathbf{x} \in A$  να έχουμε  $f(\mathbf{x}) \in N$ . Λέμε ότι η  $f(\mathbf{x})$  **τείνει** στο  $\mathbf{b}$  καθώς το  $\mathbf{x}$  **τείνει** στο  $\mathbf{x}_0$  ή, με σύμβολα,

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \quad \text{ή} \quad f(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{b} \quad \text{καθώς} \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0,$$

όταν, δεδομένης οποιασδήποτε γειτονιάς  $N$  του  $\mathbf{b}$ , η  $f$  είναι τελικά στο  $N$  καθώς το  $\mathbf{x}$  **τείνει** στο  $\mathbf{x}_0$ . Αν, καθώς το  $\mathbf{x}$  **τείνει** στο  $\mathbf{x}_0$ , οι τιμές  $f(\mathbf{x})$  δεν πλησιάζουν κανένα συγκεκριμένο διάνυσμα, λέμε ότι το  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$  **δεν υπάρχει**.

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι αυτός ο ορισμός είναι ισοδύναμος με τον  $\epsilon$ - $\delta$  ορισμό του ορίου. Στην Ενότητα 2.2 διατυπώσαμε το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 6.** Έστω  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Αν το  $\mathbf{x}_0$  ανήκει στο  $A$  ή είναι συνοριακό σημείο του  $A$ , τότε  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$  αν και μόνο αν για κάθε αριθμό  $\epsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε για κάθε  $\mathbf{x} \in A$  που ικανοποιεί την  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$  να έχουμε  $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \epsilon$ .

**Απόδειξη.** Υποθέτουμε αρχικά ότι  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ . Θεωρούμε τυχόν  $\epsilon > 0$  δεδομένο και θεωρούμε την  $\epsilon$  γειτονιά  $N = D_\epsilon(\mathbf{b})$ , την μπάλα ή δίσκο ακτίνας  $\epsilon$  με κέντρο το  $\mathbf{b}$ . Εξ ορισμού του ορίου, η  $f$  είναι τελικά στο  $D_\epsilon(\mathbf{b})$  καθώς το  $\mathbf{x}$  **τείνει** στο  $\mathbf{x}_0$ , πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχει μια γειτονιά  $U$  του  $\mathbf{x}_0$  τέτοια ώστε  $f(\mathbf{x}) \in D_\epsilon(\mathbf{b})$  αν  $\mathbf{x} \in U$ ,  $\mathbf{x} \in A$  και  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ . Αφού το  $U$  είναι ανοιχτό και  $\mathbf{x}_0 \in U$ , υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε  $D_\delta(\mathbf{x}_0) \subset U$ . Συνεπώς, για  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$  και  $\mathbf{x} \in A$  έπεται ότι  $\mathbf{x} \in D_\delta(\mathbf{x}_0) \subset U$ . Άρα  $f(\mathbf{x}) \in D_\epsilon(\mathbf{b})$ , που σημαίνει ότι  $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \epsilon$ . Αυτός είναι ο  $\epsilon$ - $\delta$  ισχυρισμός που θέλαμε να αποδείξουμε.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το αντίστροφο. Θεωρούμε ότι για κάθε  $\epsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε για  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$  και  $\mathbf{x} \in A$  να έχουμε  $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \epsilon$ . Έστω  $N$  μια γειτονιά του  $\mathbf{b}$ . Πρέπει να αποδείξουμε ότι η  $f$  είναι τελικά στο  $N$  καθώς  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ , δηλαδή πρέπει να βρούμε ένα ανοιχτό σύνολο  $U \subset \mathbb{R}^n$  τέτοιο ώστε για  $\mathbf{x} \in U$ ,  $\mathbf{x} \in A$  και  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$  να έχουμε  $f(\mathbf{x}) \in N$ . Αφού το  $N$  είναι ανοιχτό, υπάρχει  $\epsilon > 0$  τέτοιο ώστε  $D_\epsilon(\mathbf{b}) \subset N$ . Αν επιλέξουμε  $U = D_\delta(\mathbf{x}_0)$  (με βάση την παραδοχή που έχουμε κάνει), τότε για  $\mathbf{x} \in U$ ,  $\mathbf{x} \in A$  και  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$  έπεται ότι  $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \epsilon$ , δηλαδή  $f(\mathbf{x}) \in D_\epsilon(\mathbf{b}) \subset N$ .  $\square$

**Ιδιότητες των ορίων.** Το θεώρημα που ακολουθεί διατυπώθηκε και στην Ενότητα 2.2. Είμαστε πλέον σε θέση να το αποδείξουμε.

<sup>1</sup>Σε όσους ενδιαφέρονται για μια διαφορετική παιδαγωγική προσέγγιση στην έννοια του ορίου και της παραγώγου, προτείνουμε το Calculus Unlimited των J. Marsden και A. Weinstein. Διατίθεται ελεύθερα από τον ιστότοπο του Vector Calculus που αναφέρεται στον Πρόλογο.

**Θεώρημα 2. Μοναδικότητα των ορίων.** *Αν*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 \quad \text{και} \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2$$

τότε  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$ .

**Απόδειξη.** Διευκολύνει να χρησιμοποιήσουμε τη διατύπωση του Θεωρήματος 6 με βάση τα  $\varepsilon$ - $\delta$ . Υποθέτουμε ότι  $f(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{b}_1$  και  $f(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{b}_2$  καθώς  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ . Δεδομένου  $\varepsilon > 0$ , μπορούμε, εξ υποθέσεως, να βρούμε  $\delta_1 > 0$  τέτοιο ώστε για  $\mathbf{x} \in A$  και  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_1$  να έχουμε  $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_1\| < \varepsilon$ , και με αντίστοιχο τρόπο, μπορούμε να βρούμε  $\delta_2 > 0$  τέτοιο ώστε για  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_2$  να έχουμε  $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_2\| < \varepsilon$ . Έστω  $\delta$  ο μικρότερος από τους  $\delta_1$  και  $\delta_2$ . Επιλέγουμε  $\mathbf{x}$  τέτοιο ώστε  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$  και  $\mathbf{x} \in A$ . Υπάρχουν τέτοια  $\mathbf{x}$ , διότι το  $\mathbf{x}_0$  ανήκει στο  $A$  ή είναι συνοριακό σημείο του  $A$ . Επομένως, χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2\| &= \|(\mathbf{b}_1 - f(\mathbf{x})) + (f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_2)\| \\ &\leq \|\mathbf{b}_1 - f(\mathbf{x})\| + \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_2\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα για κάθε  $\varepsilon > 0$  έχουμε  $\|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2\| < 2\varepsilon$ . Επομένως  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$ , καθώς αν  $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{b}_2$  θα μπορούσαμε να πάρουμε  $\varepsilon = \|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2\|/2 > 0$  και θα είχαμε  $\|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2\| < \|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2\|$ , πράγμα αδύνατο.  $\square$

Το ακόλουθο θεώρημα διατυπώθηκε επίσης χωρίς απόδειξη στην Ενότητα 2.2.

**Θεώρημα 3. Ιδιότητες των ορίων.** *Έστω  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Αν το  $\mathbf{x}_0$  ανήκει στο  $A$  ή είναι συνοριακό σημείο του  $A$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  και  $c \in \mathbb{R}$ , τότε ισχύουν τα εξής:*

- (i) *Αν  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ , τότε  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} cf(\mathbf{x}) = c\mathbf{b}$ , όπου η  $cf: A \rightarrow \mathbb{R}^m$  ορίζεται από την  $\mathbf{x} \mapsto cf(\mathbf{x})$ .*
- (ii) *Αν  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1$  και  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2$ , τότε*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} (f + g)(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2,$$

*όπου η  $(f + g): A \rightarrow \mathbb{R}^m$  ορίζεται από την  $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ .*

- (iii) *Αν  $m = 1$ ,  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = b_1$  και  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = b_2$ , τότε*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} (fg)(\mathbf{x}) = b_1 b_2,$$

*όπου η  $(fg): A \rightarrow \mathbb{R}$  ορίζεται από την  $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ .*

- (iv) *Αν  $m = 1$ ,  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = b \neq 0$  και  $f(\mathbf{x}) \neq 0$  για κάθε  $\mathbf{x} \in A$ , τότε*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{1}{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{b},$$

*όπου η  $1/f: A \rightarrow \mathbb{R}$  ορίζεται από την  $\mathbf{x} \mapsto 1/f(\mathbf{x})$ .*

(v) Αν  $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$ , όπου  $f_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , είναι οι συνιστώσες συναρτήσεις της  $f$ , τότε  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$  αν και μόνο αν  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = b_i$  για κάθε  $i = 1, \dots, m$ .

**Απόδειξη.** Θα καταδείξουμε την τεχνική της απόδειξης αποδεικνύοντας τις ιδιότητες (i) και (ii). Οι αποδείξεις των υπόλοιπων ιδιοτήτων είναι ελαφρώς μόνο πιο σύνθετες και μπορεί να τις κάνει ο αναγνώστης. Σε κάθε περίπτωση, η χρήση της διατύπωσης με βάση τα  $\varepsilon$ - $\delta$  του Θεωρήματος 6 είναι μάλλον η πιο βολική προσέγγιση.

Για να αποδείξουμε την ιδιότητα (i), θεωρούμε τυχόν  $\varepsilon > 0$ , και πρέπει να βρούμε έναν αριθμό  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε η ανισότητα  $\|cf(\mathbf{x}) - c\mathbf{b}\| < \varepsilon$  να ισχύει αν  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ . Αν  $c = 0$ , μας κάνει οποιοδήποτε  $\delta$ , άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $c \neq 0$ . Έστω  $\varepsilon' = \varepsilon/|c|$ . Εξ ορισμού του ορίου, υπάρχει ένα  $\delta$  με την ιδιότητα ότι αν  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$  τότε  $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \varepsilon' = \varepsilon/|c|$ . Άρα αν  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$  τότε  $\|cf(\mathbf{x}) - c\mathbf{b}\| = |c|\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \varepsilon$ , οπότε η ιδιότητα (i) αποδείχθηκε.

Για να αποδείξουμε την ιδιότητα (ii), θεωρούμε και πάλι τυχόν  $\varepsilon > 0$  δεδομένο. Επιλέγουμε  $\delta_1 > 0$  τέτοιο ώστε για  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_1$  να έχουμε  $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_1\| < \varepsilon/2$ . Με αντίστοιχο τρόπο, επιλέγουμε  $\delta_2 > 0$  τέτοιο ώστε για  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_2$  να έχουμε  $\|g(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_2\| < \varepsilon/2$ . Αν  $\delta$  είναι ο μικρότερος από τους  $\delta_1$  και  $\delta_2$ , τότε για  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$  έχουμε

$$\|f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2\| \leq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_1\| + \|g(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_2\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Άρα αποδείξαμε ότι  $(f + g)(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$  καθώς  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ .  $\square$

**Παράδειγμα 1.** Βρείτε το παρακάτω όριο αν υπάρχει:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \right).$$

**Λύση.** Αφού

$$0 \leq \left| \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x|x^2 + |y|y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{(|x| + |y|)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = |x| + |y|,$$

έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \right) = 0. \quad \diamond$$

**Συνέχεια.** Έχοντας στη διάθεσή μας τα θεωρήματα για τα όρια, μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε για να μελετήσουμε τη συνέχεια. Θα ξεκινήσουμε με τον βασικό ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης.

**Ορισμός.** Έστω  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$  και έστω  $\mathbf{x}_0 \in A$ . Λέμε ότι η  $f$  είναι **συνεχής** στο  $\mathbf{x}_0$  αν και μόνο αν

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Λέγοντας απλώς ότι η  $f$  είναι **συνεχής**, θα εννοούμε ότι η  $f$  είναι συνεχής σε κάθε σημείο  $\mathbf{x}_0$  του  $A$ .



Από το Θεώρημα 6 παίρνουμε το κριτήριο συνέχειας με βάση τα  $\varepsilon$ - $\delta$ .

**Θεώρημα 7.** Μια απεικόνιση  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  είναι συνεχής στο  $\mathbf{x}_0 \in A$  αν και μόνο αν για κάθε αριθμό  $\varepsilon > 0$  υπάρχει αριθμός  $\delta > 0$  τέτοιος ώστε για

$$\mathbf{x} \in A \quad \text{και} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \quad \text{να ισχύει} \quad \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon.$$

Μία από τις ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων που διατυπώσαμε χωρίς απόδειξη στην Ενότητα 2.2 ήταν η εξής:

**Θεώρημα 5. Συνέχεια της σύνθεσης.** Έστω  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  και  $g: B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Έστω ότι  $f(A) \subset B$ , έτσι ώστε η  $g \circ f$  να ορίζεται στο  $A$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbf{x}_0 \in A$  και η  $g$  είναι συνεχής στο  $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0)$ , τότε η  $g \circ f$  είναι συνεχής στο  $\mathbf{x}_0$ .

**Απόδειξη.** Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο συνέχειας με βάση τα  $\varepsilon$ - $\delta$ . Δηλαδή, δεδομένου  $\varepsilon > 0$ , πρέπει να βρούμε  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε για  $\mathbf{x} \in A$  να έχουμε ότι

$$\text{αν} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \quad \text{τότε} \quad \|(g \circ f)(\mathbf{x}) - (g \circ f)(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon.$$

Αφού η  $g$  είναι συνεχής στο  $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0 \in B$ , υπάρχει  $\gamma > 0$  τέτοιο ώστε για  $\mathbf{y} \in B$  να έχουμε ότι

$$\text{αν} \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| < \gamma \quad \text{τότε} \quad \|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{y}_0)\| < \varepsilon.$$

Αφού η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbf{x}_0 \in A$ , για το συγκεκριμένο  $\gamma$  υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε για  $\mathbf{x} \in A$  να έχουμε ότι

$$\text{αν} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \quad \text{τότε} \quad \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \gamma,$$

από το οποίο έπεται ότι

$$\|g(f(\mathbf{x})) - g(f(\mathbf{x}_0))\| < \varepsilon,$$

που είναι το επιθυμητό συμπέρασμα.  $\square$

**Παραγωγισιμότητα.** Στην Ενότητα 2.3, όταν ορίσαμε την  $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ , υποθέσαμε για απλότητα ότι οι μερικές παράγωγοι της  $f$  υπήρχαν. Επόμενος στόχος μας είναι να δείξουμε ότι αυτή η παραδοχή δεν είναι απαραίτητη. Θα ξεκινήσουμε ορίζοντας εκ νέου την «παραγωγισιμότητα». Με το Θεώρημα 15 που ακολουθεί θα αποδείξουμε ότι ο νέος ορισμός είναι ισοδύναμος με τον παλιό.

**Ορισμός.** Έστω  $U$  ένα ανοιχτό σύνολο στο  $\mathbb{R}^n$  και έστω  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  δεδομένη συνάρτηση. Λέμε ότι η  $f$  είναι **παραγωγίσιμη** στο  $\mathbf{x}_0 \in U$  αν και μόνο αν υπάρχει ένας  $m \times n$  πίνακας  $\mathbf{T}$  τέτοιος ώστε

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0. \quad (1)$$

Καλούμε τον  $\mathbf{T}$  *παραγώγο* της  $f$  στο  $\mathbf{x}_0$  και τον συμβολίζουμε με  $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ . Σε μορφή πινάκων, το  $\mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  είναι το γινόμενο

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{m1} & T_{m2} & \cdots & T_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_{01} \\ \vdots \\ x_n - x_{0n} \end{bmatrix},$$

όπου  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$  και τα στοιχεία του πίνακα  $\mathbf{T}$  συμβολίζονται με  $[T_{ij}]$ . Μερικές φορές γράφουμε το γινόμενο  $\mathbf{T}(\mathbf{y})$  του πίνακα  $\mathbf{T}$  με το διάνυσμα-στήλη  $\mathbf{y}$  ως  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{y}$  ή απλά ως  $\mathbf{T}\mathbf{y}$ .

Η συνθήκη (1) μπορεί να γραφτεί με άλλον τρόπο ως

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0 \quad (2)$$

όπως βλέπουμε αν θέσουμε  $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ . Αν την γράψουμε χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό  $\varepsilon$ - $\delta$ , η εξίσωση (2) λέει ότι για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε για  $0 < \|\mathbf{h}\| < \delta$  να έχουμε

$$\frac{\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} < \varepsilon,$$

ή, με άλλα λόγια,

$$\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{h})\| < \varepsilon \|\mathbf{h}\|.$$

Προσέξτε ότι επειδή το  $U$  είναι ανοιχτό, αν το  $\delta$  είναι αρκετά μικρό, τότε για  $\|\mathbf{h}\| < \delta$  έχουμε  $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in U$ .

Πρώτη μας δουλειά είναι να αποδείξουμε ότι ο πίνακας  $\mathbf{T}$  είναι αναγκαστικά ο πίνακας των μερικών παραγώγων, και επομένως ότι ο αφηρημένος αυτός ορισμός συμφωνεί με τον ορισμό της παραγωγισιμότητας που δώσαμε στην Ενότητα 2.3.

**Θεώρημα 15.** *Αν η  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , τότε όλες οι μερικές παράγωγοι της  $f$  υπάρχουν στο σημείο  $\mathbf{x}_0$ , και τα στοιχεία του  $m \times n$  πίνακα  $\mathbf{T}$  είναι*

$$[T_{ij}] = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right],$$

δηλαδή

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

όπου η τιμή της  $\partial f_i / \partial x_j$  υπολογίζεται στο  $\mathbf{x}_0$ . Ειδικότερα, από αυτό έπεται ότι ο  $\mathbf{T}$  ορίζεται με μοναδικό τρόπο, δηλαδή δεν υπάρχει άλλος πίνακας που να ικανοποιεί την εξίσωση (1).

**Απόδειξη.** Σύμφωνα με το Θεώρημα 3(v), η συνθήκη (2) είναι ίδια με την

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|f_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f_i(\mathbf{x}_0) - (\mathbf{T}\mathbf{h})_i|}{\|\mathbf{h}\|} = 0, \quad 1 \leq i \leq m,$$

όπου  $(\mathbf{T}\mathbf{h})_i$  είναι το  $i$ -οστό στοιχείο του διανύσματος-στήλη  $\mathbf{T}\mathbf{h}$ . Θέτουμε  $\mathbf{h} = a\mathbf{e}_j = (0, \dots, a, \dots, 0)$ , το οποίο έχει τον αριθμό  $a$  στην  $j$ -οστή θέση και μηδενικά στις υπόλοιπες θέσεις. Τότε έχουμε

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{|f_i(\mathbf{x}_0 + a\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x}_0) - a(\mathbf{T}\mathbf{e}_j)_i|}{\|a\|} = 0,$$

ή, με άλλα λόγια,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left| \frac{f_i(\mathbf{x}_0 + a\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x}_0)}{a} - (\mathbf{T}\mathbf{e}_j)_i \right| = 0,$$

οπότε

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{f_i(\mathbf{x}_0 + a\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x}_0)}{a} = (\mathbf{T}\mathbf{e}_j)_i.$$

Όμως αυτό το όριο δεν είναι παρά η μερική παράγωγος  $\partial f_i / \partial x_j$  με υπολογισμένη στο σημείο  $\mathbf{x}_0$ . Άρα αποδείξαμε ότι η  $\partial f_i / \partial x_j$  υπάρχει και ισούται με  $(\mathbf{T}\mathbf{e}_j)_i$ . Όμως  $(\mathbf{T}\mathbf{e}_j)_i = T_{ij}$  (βλ. Ενότητα 1.5 του βιβλίου), άρα το θεώρημα αποδείχθηκε.  $\square$

**Παραγωγισιμότητα και συνέχεια.** Επόμενος στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη είναι συνεχής.

**Θεώρημα 8.** Αν η  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{x}_0 \in U$ , τότε η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbf{x}_0$  και, επιπλέον,  $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < M_1 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$  για κάποια σταθερά  $M_1$  και  $\mathbf{x}$  κοντά στο  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ .

**Απόδειξη.** Θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα της Άσκησης 2 που υπάρχει στο τέλος αυτής της ενότητας, συγκεκριμένα ότι

$$\|\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}\| \leq M \|\mathbf{h}\|,$$

όπου  $M$  είναι η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των στοιχείων του πίνακα  $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ .

Επιλέγουμε  $\varepsilon = 1$ , οπότε σύμφωνα με τον ορισμό της παραγώγου (βλ. σχέση (2)) υπάρχει  $\delta_1 > 0$  τέτοιο ώστε για  $0 < \|\mathbf{h}\| < \delta_1$  να έχουμε

$$\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}\| < \varepsilon \|\mathbf{h}\| = \|\mathbf{h}\|.$$

Αν  $\|\mathbf{h}\| < \delta_1$ , χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\| &= \|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}\| \\ &\leq \|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}\| + \|\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}\| \\ &< \|\mathbf{h}\| + M \|\mathbf{h}\| = (1 + M) \|\mathbf{h}\|. \end{aligned}$$

Θέτοντας  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$  και  $M_1 = 1 + M$ , παίρνουμε τον δεύτερο ισχυρισμό του θεωρήματος.

Αν  $\varepsilon'$  είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός και  $\delta$  είναι ο μικρότερος από τους δύο θετικούς αριθμούς  $\delta_1$  και  $\varepsilon'/(1 + M)$ , τότε για  $\|\mathbf{h}\| < \delta$  έχουμε

$$\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\| < (1 + M) \frac{\varepsilon'}{1 + M} = \varepsilon',$$

από το οποίο προκύπτει ότι (βλ. Άσκηση 15 στο τέλος αυτής της ενότητας)

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0),$$

οπότε η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbf{x}_0$ . □

**Κριτήριο παραγωγισιμότητας.** Στην Ενότητα 2.3 ισχυριστήκαμε ότι ένα σημαντικό κριτήριο παραγωγισιμότητας είναι η ύπαρξη και συνέχεια των μερικών παραγώγων. Είμαστε πλέον σε θέση να το αποδείξουμε.

**Θεώρημα 9.** Έστω  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Αν οι μερικές παράγωγοι  $\partial f_i / \partial x_j$  της  $f$  υπάρχουν όλες και είναι συνεχείς σε μια γειτονιά ενός σημείου  $\mathbf{x} \in U$ , τότε η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{x}$ .

**Απόδειξη.** Σε αυτή την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα μέσης τιμής του λογισμού των συναρτήσεων μίας μεταβλητής — βλ. Ενότητα 2.5 του βιβλίου για τη διατύπωσή του. Για απλότητα θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση  $m = 1$ , δηλαδή  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , και θα αφήσουμε τη γενική περίπτωση στον αναγνώστη (αυτή μπορεί να γίνει εύκολα με βάση τις τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν παραπάνω στην απόδειξη του Θεωρήματος 15.)

Σύμφωνα με τον ορισμό της παραγώγου, στόχος μας είναι να δείξουμε ότι

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{h}} \frac{\left| f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right] h_i \right|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned} & f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, \dots, x_n) \\ &= f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) \\ & \quad + f(x_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, x_3 + h_3, \dots, x_n + h_n) + \dots \\ & \quad + f(x_1, \dots, x_{n-1} + h_{n-1}, x_n + h_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + h_n) \\ & \quad + f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + h_n) - f(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Το παραπάνω καλείται **τηλεσκοπικό άθροισμα**, αφού κάθε όρος απαλείφεται με τον επόμενο ή τον προηγούμενό του, εκτός από τον πρώτο και τον τελευταίο. Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής, η παραπάνω έκφραση μπορεί να γραφτεί ως

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{y}_1) \right] h_1 + \left[ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{y}_2) \right] h_2 + \dots + \left[ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{y}_n) \right] h_n,$$

όπου  $\mathbf{y}_1 = (c_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n)$  με το  $c_1$  να βρίσκεται μεταξύ του  $x_1$  και του  $x_1 + h_1$ ,  $\mathbf{y}_2 = (x_1, c_2, x_3 + h_3, \dots, x_n + h_n)$  με το  $c_2$  να βρίσκεται μεταξύ του  $x_2$  και του  $x_2 + h_2$ , και  $\mathbf{y}_n = (x_1, \dots, x_{n-1}, c_n)$  με το  $c_n$  να βρίσκεται μεταξύ του  $x_n$  και του  $x_n + h_n$ . Επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} & \left| f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right] h_i \right| \\ &= \left| \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{y}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right) h_1 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{y}_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right) h_n \right|. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα, η παραπάνω έκφραση είναι μικρότερη ή ίση από

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{y}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right| |h_1| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{y}_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right| |h_n| \\ & \leq \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{y}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{y}_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right| \right\} \|\mathbf{h}\|, \end{aligned}$$

αφού  $|h_i| \leq \|\mathbf{h}\|$  για κάθε  $i$ . Άρα αποδείξαμε ότι

$$\begin{aligned} & \frac{\left| f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right] h_i \right|}{\|\mathbf{h}\|} \\ & \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{y}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{y}_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right|. \end{aligned}$$

Αφού όμως οι μερικές παράγωγοι είναι εξ υποθέσεως συνεχείς, το δεξί μέλος τείνει στο 0 καθώς  $\mathbf{h} \rightarrow 0$ , οπότε το αριστερό μέλος τείνει και αυτό στο 0.  $\square$

Αυτή η απόδειξη παρουσιάζει ένα ενδιαφέρον σημείο: ενώ στην απόδειξη απαιτείται οι μερικές παράγωγοι της  $f$  να υπάρχουν σε μια γειτονιά του  $\mathbf{x}$ , οι μερικές παράγωγοι απαιτείται μόνο να είναι συνεχείς στο σημείο  $\mathbf{x}$ . Στην απόδειξη χρησιμοποιείται επίσης το θεώρημα μέσης τιμής για τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής, οπότε είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι το θεώρημα μέσης τιμής του λογισμού των συναρτήσεων μίας μεταβλητής για μια συνεχή συνάρτηση  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  δεν απαιτεί συνέχεια της παραγώγου, παρά μόνο την ύπαρξή της στο ανοιχτό διάστημα  $(a, b)$ .<sup>2</sup>

**Κανόνας της αλυσίδας.** Όπως εξηγήσαμε στην Ενότητα 2.5, ο κανόνας της αλυσίδας είναι ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα του διαφορικού λογισμού. Είμαστε πλέον σε θέση να τον αποδείξουμε με κάθε λεπτομέρεια.

<sup>2</sup>Για την ακριβή διατύπωση του θεωρήματος μέσης τιμής ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί οποιοδήποτε καλό εγχειρίδιο λογισμού συναρτήσεων μίας μεταβλητής ή κάποιο βασικό βιβλίο πραγματικής ανάλυσης, όπως το *Elementary Classical Analysis*, 2η έκδοση, των Marsden και Hoffman, W.H. Freeman and Co., 1993.

**Θεώρημα 11. Κανόνας της αλυσίδας.** Έστω  $U \subset \mathbb{R}^n$  και  $V \subset \mathbb{R}^m$  ανοιχτά σύνολα. Έστω  $g: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  και  $f: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  δοθείσες συναρτήσεις τέτοιες ώστε η  $g$  να απεικονίζει το  $U$  στο  $V$ , ώστε να ορίζεται η  $f \circ g$ . Αν η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{x}_0$  και η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0)$ , τότε η  $f \circ g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{x}_0$  και

$$\mathbf{D}(f \circ g)(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0).$$

**Απόδειξη.** Σύμφωνα με τον ορισμό της παραγώγου, πρέπει να επαληθεύσουμε ότι

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\|f(g(\mathbf{x})) - f(g(\mathbf{x}_0)) - \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0.$$

Αρχικά αναδιαμορφώνουμε τον αριθμητή και εφαρμόζουμε την τριγωνική ανισότητα ως εξής:

$$\begin{aligned} & \|f(g(\mathbf{x})) - f(g(\mathbf{x}_0)) - \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0) \cdot (g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)) \\ & \quad + \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0) \cdot [g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}g(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)]\| \\ & \leq \|f(g(\mathbf{x})) - f(g(\mathbf{x}_0)) - \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0) \cdot (g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0))\| \\ & \quad + \|\mathbf{D}f(\mathbf{y}_0) \cdot [g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}g(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)]\|. \end{aligned} \quad (3)$$

Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 8,  $\|\mathbf{D}f(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{h}\| \leq M\|\mathbf{h}\|$  για κάποια σταθερά  $M$ . Επομένως το δεξί μέλος της ανισότητας (3) είναι μικρότερο ή ίσο από

$$\begin{aligned} & \|f(g(\mathbf{x})) - f(g(\mathbf{x}_0)) - \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0) \cdot (g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0))\| \\ & \quad + M\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}g(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|. \end{aligned} \quad (4)$$

Αφού η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{x}_0$ , δεδομένου  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει  $\delta_1 > 0$  τέτοιο ώστε για  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_1$  να έχουμε

$$\frac{\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}g(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Άρα ο δεύτερος όρος της έκφρασης (4) είναι μικρότερος από  $\varepsilon\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|/2$ .

Ας εστιάσουμε στον πρώτο όρο της έκφρασης (4). Σύμφωνα με το Θεώρημα 8,

$$\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)\| < M_1\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$$

για κάποια σταθερά  $M_1$  αν το  $\mathbf{x}$  είναι κοντά στο  $\mathbf{x}_0$ , φερ' ειπείν  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_2$ . Κατόπιν επιλέγουμε  $\delta_3$  τέτοιο ώστε για  $0 < \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| < \delta_3$  να έχουμε

$$\|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{y}_0) - \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)\| < \frac{\varepsilon\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|}{2M_1}.$$

Αφού  $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$  και  $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0)$ ,  $\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| < \delta_3$  αν  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_3/M_1$  και  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_2$ , οπότε

$$\begin{aligned} & \|f(g(\mathbf{x})) - f(g(\mathbf{x}_0)) - \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0) \cdot (g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0))\| \\ & \leq \frac{\varepsilon\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)\|}{2M_1} < \frac{\varepsilon\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}{2}. \end{aligned}$$

Επομένως, αν  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3/M_1)$ , η έκφραση (4) είναι μικρότερη από

$$\frac{\varepsilon\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}{2} + \frac{\varepsilon\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}{2} = \varepsilon\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|,$$

οπότε

$$\frac{\|f(g(\mathbf{x})) - f(g(\mathbf{x}_0)) - \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} < \varepsilon$$

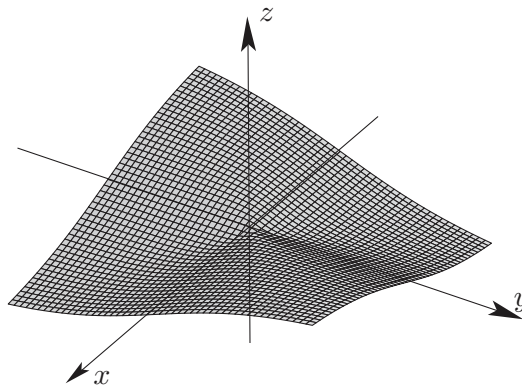
για  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ . Άρα το θεώρημα αποδείχθηκε. □

**Συνάρτηση με πτυχώσεις.** Ο αναγνώστης έχει ήδη συναντήσει παραδείγματα εφαρμογής των παραπάνω θεωρημάτων. Θα εξετάσουμε ένα ακόμη, τεχνικού περιεχομένου χαρακτηριστικό, παράδειγμα.

**Παράδειγμα 2.** Έστω

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Είναι η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$ ; (Βλ. Σχήμα 2.7.1).



ΣΧΗΜΑ 2.7.1. Αυτή η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$ , διότι παρουσιάζει «πτυχώσεις».

**Λύση.** Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cdot 0) / \sqrt{x^2 + 0} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0, \end{aligned}$$

και με αντίστοιχο τρόπο  $(\partial f/\partial y)(0, 0) = 0$ . Άρα οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν στο  $(0, 0)$ . Επιπλέον, αν  $(x, y) \neq (0, 0)$ , τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y\sqrt{x^2 + y^2} - 2x(xy)/2\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

το οποίο δεν έχει όριο καθώς  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ . Προσεγγίζοντας από διαφορετικές διαδρομές παίρνουμε διαφορετικά όρια, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε θέτοντας  $x = My$ . Άρα οι μερικές παράγωγοι δεν είναι συνεχείς στο  $(0, 0)$ , και συνεπώς δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 9.

Στη συνέχεια θα μπορούσαμε να προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη (η  $f$  είναι όμως συνεχής). Αν η  $\mathbf{D}f(0, 0)$  υπήρχε, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 15 θα έπρεπε να είναι ο μηδενικός πίνακας, αφού οι  $\partial f/\partial x$  και  $\partial f/\partial y$  είναι μηδέν στο  $(0, 0)$ . Επομένως, εξ ορισμού της παραγωγισιμότητας, για οποιοδήποτε  $\varepsilon > 0$  θα υπήρχε  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε για  $0 < \|(h_1, h_2)\| < \delta$  να έχουμε

$$\frac{|f(h_1, h_2) - f(0, 0)|}{\|(h_1, h_2)\|} < \varepsilon,$$

δηλαδή  $|f(h_1, h_2)| < \varepsilon\|(h_1, h_2)\|$ , ή  $|h_1 h_2| < \varepsilon(h_1^2 + h_2^2)$ . Αν όμως επιλέξουμε  $h_1 = h_2$ , παίρνουμε  $1/2 < \varepsilon$ , το οποίο δεν ισχύει αν επιλέξουμε  $\varepsilon \leq 1/2$ . Άρα συμπεραίνουμε ότι η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$ .  $\diamond$

### Ασκήσεις<sup>3</sup>

1. Έστω  $f(x, y, z) = (e^x, \cos y, \sin z)$ . Υπολογίστε την  $\mathbf{D}f$ . Εν γένει, πότε θα είναι διαγώνιος πίνακας η  $\mathbf{D}f$ ;
2. (α) Έστω  $\mathbf{A}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ένας γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα  $\{A_{ij}\}$  οπότε το  $\mathbf{A}\mathbf{x}$  έχει συνιστώσες  $y_i = \sum_j A_{ij}x_j$ . Έστω

$$M = \left( \sum_{ij} A_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz, αποδείξτε ότι  $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq M\|\mathbf{x}\|$ .

- (β) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα που αποδείξατε στο ερώτημα (α), δείξτε ότι ένας γραμμικός μετασχηματισμός  $\mathbf{T}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  με πίνακα  $[T_{ij}]$  είναι συνεχής.
- (γ) Έστω  $\mathbf{A}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Αν

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{A}\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \mathbf{0},$$

δείξτε ότι  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ .

<sup>3</sup>Απαντήσεις και υποδείξεις για τις ασκήσεις περιττού αριθμού, καθώς και επιλεγμένες πλήρεις λύσεις δίνονται στο τέλος αυτού του συμπληρώματος.



3. Έστω  $f: A \rightarrow B$  και  $g: B \rightarrow C$  απεικονίσεις μεταξύ ανοιχτών υποσυνόλων του ευκλείδειου χώρου, και έστω ότι το  $\mathbf{x}_0$  ανήκει στο  $A$  ή είναι συνοριακό σημείο του  $A$  και ότι το  $\mathbf{y}_0$  ανήκει στο  $B$  ή είναι συνοριακό σημείο του  $B$ .

(α) Αν  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0$  και  $\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_0} g(\mathbf{y}) = \mathbf{w}$ , αποδείξτε ότι, εν γένει, το  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(f(\mathbf{x}))$  δεν ισούται κατ' ανάγκη με το  $\mathbf{w}$ .

(β) Αν  $\mathbf{y}_0 \in B$  και  $\mathbf{w} = g(\mathbf{y}_0)$ , δείξτε ότι  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{w}$ .

4. Μια συνάρτηση  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  καλείται **ομοιόμορφα συνεχής** αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε για όλα τα σημεία  $\mathbf{p}$  και  $\mathbf{q} \in A$  να έχουμε ότι αν ισχύει η συνθήκη  $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| < \delta$  τότε  $\|f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{q})\| < \varepsilon$ . (Σημειώνουμε ότι μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση είναι συνεχής. Περιγράψτε αναλυτικά την επιπλέον ιδιότητα που έχει μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.)

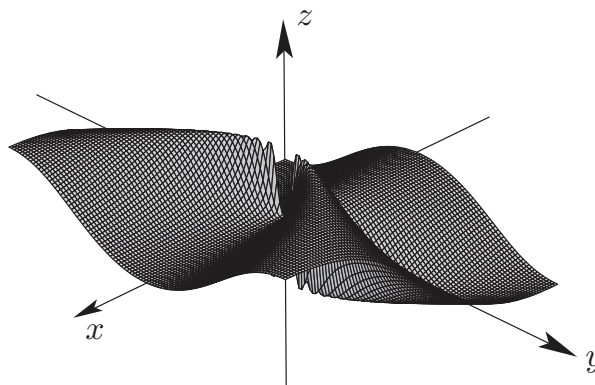
(α) Αποδείξτε ότι κάθε γραμμική απεικόνιση  $\mathbf{T}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  είναι ομοιόμορφα συνεχής. [ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 2.]

(β) Αποδείξτε ότι η  $x \mapsto 1/x^2$ , ορισμένη στο  $(0, 1]$ , είναι συνεχής αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής.

5. Έστω  $\mathbf{A} = [A_{ij}]$  ένας συμμετρικός  $n \times n$  πίνακας (δηλαδή  $A_{ij} = A_{ji}$ ). Ορίζουμε την  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}$ , οπότε  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι το  $\nabla f(\mathbf{x})$  είναι το διάνυσμα  $2\mathbf{A}\mathbf{x}$ .

6. Στο Σχήμα 2.7.2 απεικονίζεται γραφικά η ακόλουθη συνάρτηση:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{\sqrt{x^2 + y^4}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



ΣΧΗΜΑ 2.7.2. Γράφημα της  $z = 2xy^2/(x^2 + y^4)$ .

Δείξτε ότι οι  $\partial f/\partial x$  και  $\partial f/\partial y$  υπάρχουν παντού· μάλιστα υπάρχουν όλες οι κατά κατεύθυνση παράγωγοι. Δείξτε όμως ότι η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $(0, 0)$ . Είναι η  $f$  παραγωγίσιμη;

7. Θεωρήστε την  $f(x, y) = g(x) + h(y)$  και υποθέστε ότι η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ότι η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $y_0$ . Δείξτε με βάση τον ορισμό ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(x_0, y_0)$ .

8. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz, αποδείξτε ότι για οποιοδήποτε διάνυσμα  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}_0.$$

9. Αποδείξτε ότι αν  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = b$  για  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , τότε

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} [f(\mathbf{x})]^2 = b^2 \quad \text{και} \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \sqrt{|f(\mathbf{x})|} = \sqrt{|b|}.$$

[Ίσως χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε την Άσκηση 3(β).]

10. Δείξτε ότι στο Θεώρημα 9 με  $m = 1$  αρκεί να υποθέσουμε ότι  $n - 1$  μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς και ότι η άλλη απλά υπάρχει. Συμφωνεί αυτό με ό,τι αναμένετε όταν  $n = 1$ ;

11. Ορίζουμε την  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ως εξής:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{1/2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Δείξτε ότι η  $f$  είναι συνεχής.

12. (α) Υπάρχει το  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2}$ ;

(β) Υπάρχει το  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ ;

13. Βρείτε το  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

14. Δείξτε ότι η  $s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x + y$  είναι συνεχής.

15. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέχειας, αποδείξτε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbf{x}$  αν και μόνο αν

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}).$$

16. (α) Λέμε ότι μια ακολουθία  $\mathbf{x}_n$  σημείων του  $\mathbb{R}^m$  **συγκλίνει στο  $\mathbf{x}$** , και γράφουμε  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$  καθώς  $n \rightarrow \infty$ , αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $N$  τέτοιο ώστε για  $n \geq N$  να έχουμε  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| < \varepsilon$ . Δείξτε ότι το  $\mathbf{y}$  είναι συνοριακό σημείο ενός ανοιχτού συνόλου  $A$  αν και μόνο αν το  $\mathbf{y}$  δεν ανήκει στο  $A$  και υπάρχει ακολουθία διακεκριμένων σημείων του  $A$  που συγκλίνει στο  $\mathbf{y}$ .

- (β) Έστω  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  και έστω ότι το  $\mathbf{y}$  ανήκει στο  $A$  ή είναι συνοριακό σημείο του  $A$ . Δείξτε ότι  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$  αν και μόνο αν  $f(\mathbf{x}_n) \rightarrow \mathbf{b}$  για κάθε ακολουθία  $\mathbf{x}_n$  σημείων του  $A$  με  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{y}$ .
- (γ) Αν το  $U \subset \mathbb{R}^m$  είναι ανοιχτό, δείξτε ότι η  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$  είναι συνεχής αν και μόνο αν από την  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x} \in U$  έπεται ότι  $f(\mathbf{x}_n) \rightarrow f(\mathbf{x})$ .
17. Αν  $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$  για κάθε  $\mathbf{x} \neq \mathbf{A}$ , και  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ , δείξτε ότι έχουμε και  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{A}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ .
18. Έστω  $A \subset \mathbb{R}^n$  και έστω  $\mathbf{x}_0$  ένα συνοριακό σημείο του  $A$ . Έστω  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g: A \rightarrow \mathbb{R}$  συναρτήσεις ορισμένες στο  $A$  με την ιδιότητα ότι τα  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$  και  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$  υπάρχουν. Υποθέτουμε ότι για κάθε  $\mathbf{x}$  σε κάποια τρυπημένη γειτονιά του  $\mathbf{x}_0$  έχουμε  $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ . (Μια τρυπημένη γειτονιά του  $\mathbf{x}_0$  είναι οποιαδήποτε γειτονιά του  $\mathbf{x}_0$  μείον το ίδιο το  $\mathbf{x}_0$ .)
- (α) Αποδείξτε ότι  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \leq \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$  [ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Θεωρήστε τη συνάρτηση  $\phi(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})$ . Αποδείξτε ότι  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \phi(\mathbf{x}) \geq 0$  και κατόπιν χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι το όριο του αθροίσματος δύο συναρτήσεων είναι το άθροισμα των ορίων τους.]
- (β) Αν  $f(\mathbf{x}) < g(\mathbf{x})$ , ισχύει αναγκαστικά η αυστηρή ανισότητα για τα όρια;
19. Για μια συνάρτηση  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , λέμε ότι η « $f$  είναι  $o(\mathbf{x})$  καθώς  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ » αν  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\| = \mathbf{0}$ .
- (α) Αν οι  $f_1$  και  $f_2$  είναι  $o(\mathbf{x})$  καθώς  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ , δείξτε ότι η  $f_1 + f_2$  είναι επίσης  $o(\mathbf{x})$  καθώς  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ .
- (β) Έστω  $g: A \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση με την ιδιότητα ότι υπάρχει αριθμός  $c > 0$  τέτοιος ώστε  $|g(\mathbf{x})| \leq c$  για κάθε  $\mathbf{x}$  στο  $A$  (η συνάρτηση  $g$  καλείται *φραγμένη*). Αν η  $f$  είναι  $o(\mathbf{x})$  καθώς  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ , αποδείξτε ότι η  $gf$  είναι επίσης  $o(\mathbf{x})$  καθώς  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$  [όπου  $(gf)(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$ ].
- (γ) Δείξτε ότι η  $f(x) = x^2$  είναι  $o(x)$  καθώς  $x \rightarrow 0$ . Είναι η  $g(x) = x$  επίσης  $o(x)$  καθώς  $x \rightarrow 0$ ;

### 3

## Παράγωγοι υψηλότερης τάξης και ακρότητα

Το *Analysis Infinitorum* (περί αναλυτικής γεωμετρίας) του Euler ακολουθήθηκε το 1755 από το *Institutiones Calculi Differentialis*, για το οποίο προοριζόταν ως εισαγωγή. Πρόκειται για το πρώτο εγχειρίδιο διαφορικού λογισμού με την αξίωση να μπορεί να χαρακτηριστεί πλήρες, και μπορούμε να πούμε ότι μέχρι πρόσφατα πολλές σύγχρονες πραγματείες επί του αντικειμένου στηρίζονταν σε αυτό· πρέπει όμως να προσθέσουμε ότι οι βασικές αρχές του αντικειμένου αναπτύσσονται συχνά με μακροσκελή και ασαφή τρόπο, και μερικές φορές όχι με απόλυτα ακριβή τρόπο.

W. W. Rouse Ball

*A Short Account of the History of Mathematics*

### Συμπλήρωμα 3.1

#### Η εξίσωση Korteweg–de Vries

**Παράδειγμα.** Η μερική διαφορική εξίσωση  $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$ , η οποία καλείται εξίσωση Korteweg–de Vries (ή, για συντομία, εξίσωση KdV), περιγράφει την κίνηση των κυμάτων νερού σε ένα αβαθές κανάλι.

(α) Δείξτε ότι για οποιαδήποτε θετική σταθερά  $c$ , η συνάρτηση

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}(x - ct)\sqrt{c}\right]$$

είναι λύση της εξίσωσης Korteweg–de Vries. (Η συγκεκριμένη λύση αναπαριστά ένα κινούμενο «σαμαράκι» νερού στο κανάλι και καλείται *σολιτόνιο*.)<sup>1</sup>.

(β) Με ποιον τρόπο επηρεάζει η τιμή της σταθεράς  $c$  το σχήμα και την ταχύτητα του σολιτονίου;

**Λύση.** (α) Υπολογίζουμε τις  $u_t$ ,  $u_x$ ,  $u_{xx}$  και  $u_{xxx}$  χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας και τον τύπο παραγωγίσης  $(d/dx) \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$  από τον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής. Θέτοντας  $\alpha = (x - ct)\sqrt{c}/2$ ,

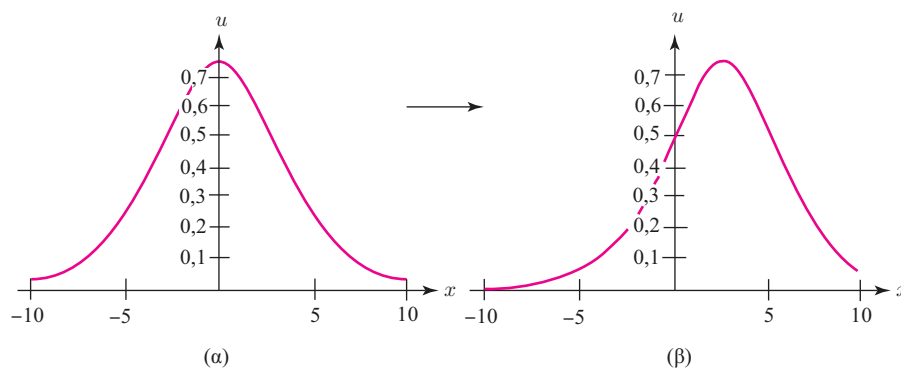
$$\begin{aligned} u_t &= 6c \operatorname{sech} \alpha \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{sech} \alpha = -6c \operatorname{sech}^2 \alpha \tanh \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial t} \\ &= 3c^{5/2} \operatorname{sech}^2 \alpha \tanh \alpha = c^{3/2} \tanh \alpha. \end{aligned}$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} u_x &= -6c \operatorname{sech}^2 \alpha \tanh \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} \\ &= 3c^{3/2} \operatorname{sech}^2 \alpha \tanh \alpha = -\sqrt{c} u \tanh \alpha, \end{aligned}$$

οπότε  $u_t + cu_x = 0$  και

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -\sqrt{c} \left[ u_x \tanh \alpha + u (\operatorname{sech}^2 \alpha) \frac{\sqrt{c}}{2} \right] = -\sqrt{c} (\tanh \alpha) u_x - \frac{u^2}{6} \\ &= c (\tanh^2 \alpha) u - \frac{u^2}{6} = c(1 - \operatorname{sech}^2 \alpha) u - \frac{u^2}{6} \\ &= cu - \frac{u^2}{3} - \frac{u^2}{6} = cu - \frac{u^2}{2}. \end{aligned}$$



ΣΧΗΜΑ 3.1.1. Το γράφημα της  $u(x, t) = 3 \operatorname{sech}^2(\sqrt{c}(x - ct)/2)$  για  $c = \frac{1}{4}$  τις χρονικές στιγμές (α)  $t = 0$  και (β)  $t = 10$ .

<sup>1</sup>Τα σολιτόνια παρατηρήθηκαν για πρώτη φορά από τον J. Scott Russel γύρω στο 1840 σε διάρρηγες διέλευσης φορτηγίδων κοντά στο Εδιμβούργο. Παρουσίασε τα αποτελέσματά του στο *Trans. R. Soc. Edinburgh* 14 (1840): 47–109

Επομένως

$$u_{xxx} = cu_x - uu_x, \quad \text{δηλαδή} \quad u_{xxx} + u_{xx} = cu_x.$$

Άρα

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = u_t + cu_x = 0.$$

(β) Η ταχύτητα του σολιτονίου είναι  $c$ , διότι  $u(x + ct, t) = u(x, 0)$ . Το σολιτόνιο είναι ψηλότερο και παχύτερο όταν το  $c$  είναι μεγαλύτερο. Το σχήμα του τη χρονική στιγμή  $t = 10$  παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.1.1  $\diamond$

### Συμπλήρωμα 3.3

#### Max Planck και η αρχή της ελάχιστης δράσης

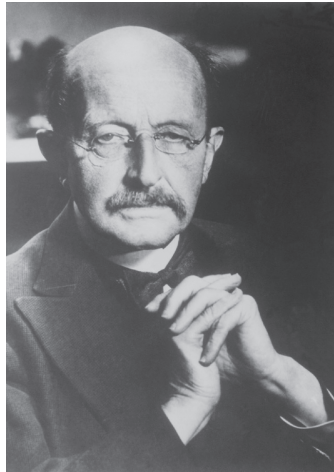
Στα 250 χρόνια που ακολούθησαν τη διατύπωση της αρχής του Maupertuis, έχει διαπιστωθεί ότι η αρχή της ελάχιστης δράσης αποτελεί τη «θεωρητική βάση» του νόμου της βαρύτητας του Νεύτωνα, των εξισώσεων του Maxwell για τον ηλεκτρομαγνητισμό, της κβαντομηχανικής εξίσωσης του Schrödinger και της εξίσωσης πεδίου του Einstein στη γενική θεωρία της σχετικότητας.

Ο Max Planck (βλ. Σχήμα 3.3.1), ένας από τους μεγαλύτερους επιστήμονες της σύγχρονης εποχής και αυτός που ανακάλυψε την «κβάντωση» της φύσης, πίστευε επίσης βαθιά στον μαθηματικό σχεδιασμό του σύμπαντος. Στις 29 Ιουνίου 1922, την «Ημέρα του Leibniz» στο Βερολίνο της Γερμανίας, λίγα μόλις χρόνια μετά τον πρώτο παγκόσμιο πόλεμο και τις φρικτές σφαγές που είχαν λάβει χώρα, ο Planck απηύθυνε έναν λόγο προς τιμήν του μεγάλου αυτού ακαδημαϊκού.

Ακολουθούν μερικά αποσπάσματα από τις παρατηρήσεις του Planck.

Η Θεοδικία ολοκληρώνεται με τον ισχυρισμό πως οτιδήποτε συμβαίνει στον κόσμο μας, τόσο σε μεγάλη όσο και σε μικρή κλίμακα, τόσο στη φύση όσο και στην πνευματική ζωή, καθορίζεται άπαξ και δια παντός από τη θεία λογική, και με τέτοιο τρόπο ώστε ο κόσμος μας να είναι ο καλύτερος από τους δυνατούς κόσμους. Θα επανεπιβεβαιώνει άραγε ο Leibniz αυτόν τον ισχυρισμό σήμερα, δεδομένης της δυστυχίας της σύγχρονης εποχής, δεδομένης της οικτρής αποτυχίας πολλών προσπαθειών που δεν έχουν ως άμεσο στόχο το υλικό κέρδος, δεδομένου του αδιαμφισβήτητου γεγονότος πως η επίτευξη της γενικής αρμονίας των ανθρώπων που οραματιζόμαστε φαίνεται να απέχει σήμερα περισσότερο από ποτέ; Δίχως αμφιβολία, θα έπρεπε να απαντήσουμε καταφατικά σε αυτό το ερώτημα, ακόμη και αν δεν γνωρίζαμε ότι ο Leibniz δεν έπαψε ποτέ να εργάζεται με θέρμη μέχρι τα τελευταία χρόνια της ζωής του, παρά τις κακοτυχίες και απογοητεύσεις κάθε είδους, και δεν θα σφάλαμε καθόλου αν θεωρούσαμε ότι ήταν ακριβώς η Θεοδικία αυτό που του προσέφερε στήριγμα και παρηγοριά στις πιο θλιβερές μέρες της ζωής του. Πρόκειται για ένα ακόμη συγκινητικό παράδειγμα της παλιάς αλήθειας ότι οι βαθύτερες και ιερότερες αρχές μας είναι στέρα ριζωμένες στα εσώτερα της ψυχής μας και ανεξάρτητες από τις εξωτερικές εμπειρίες μας.

Η σύγχρονη επιστήμη, ειδικά υπό την επίδραση της ανάπτυξης της ιδέας της αιτιότητας, έχει απομακρυνθεί από την τελεολογική οπτική του Leibniz. Η επιστήμη έχει εγκαταλείψει την υπόθεση ενός ειδικού, προλαμβάνοντος λόγου και θεωρεί ότι



ΣΧΗΜΑ 3.3.1. Max Planck (1858-1947).

κάθε γεγονός του φυσικού και πνευματικού κόσμου μπορεί, τουλάχιστον κατ' αρχήν, να αναχθεί σε κάποιες πρότερες καταστάσεις. Εξακολουθούμε να παρατηρούμε όμως ένα γεγονός, ιδιαίτερα στην ακριβέστερη επιστήμη, το οποίο, τουλάχιστον σε αυτό το πλαίσιο, προκαλεί ιδιαίτερη έκπληξη. Η σημερινή φυσική, όπως είναι οργανωμένη θεωρητικά, διέπεται πλήρως από ένα σύστημα χωροχρονικών διαφορικών εξισώσεων που δηλώνουν ότι κάθε διεργασία στη φύση καθορίζεται πλήρως από τα γεγονότα που συμβαίνουν στην άμεση χρονική και χωρική γειτονιά της. Όλο αυτό το πλούσιο σύστημα διαφορικών εξισώσεων, μολονότι αυτές διαφέρουν στις λεπτομέρειες, δεδομένου ότι αφορούν μηχανικές, ηλεκτρικές, μαγνητικές και θερμικές διεργασίες, περιέχεται πλήρως σε μια μόνο ρήση —στην αρχή της ελάχιστης δράσης. Εν συντομία, η αρχή αυτή λέει ότι, από όλες τις δυνατές διεργασίες, οι μόνες που συμβαίνουν στην πραγματικότητα είναι αυτές που απαιτούν την ελάχιστη δαπάνη δράσης. Όπως βλέπουμε, απαιτείται μόνο ένα μικρό βήμα για να αναγνωρίσουμε στην προτίμηση για την μικρότερη ποσότητα δράσης την κυριαρχία της θείας λογικής, και συνεπώς να ανακαλύψουμε ένα μέρος της τελεολογικής τάξης του Leibniz για το σύμπαν.<sup>2</sup>

Στη σημερινή φυσική, η αρχή της ελάχιστης δράσης παίζει σχετικά περιορισμένο ρόλο. Δεν ταιριάζει ιδιαίτερα με τις σημερινές θεωρίες. Ασφαλώς, είναι ομολογούμενος μια σωστή πρόταση: παρόλα αυτά, συνήθως δεν έχει τον ρόλο του θεμελίου της θεωρίας, αλλά ενός αληθούς μα περιττού παραρτήματος, διότι η σημερινή θεωρητική φυσική είναι πλήρως προσαρμοσμένη στην αρχή των απειροστών τοπικών επιδράσεων και βλέπει τις επεκτάσεις σε μεγαλύτερους χώρους και χρόνους ως μια μη αναγκαία και ασύμφορη περιπλοκή της μεθόδου προσέγγισης. Επομένως, η φυσική τείνει να βλέπει την αρχή της ελάχιστης δράσης περισσότερο σαν μια τυπική και συμπτωματική παραξενιά παρά σαν πυλώνα της φυσικής γνώσης.

<sup>2</sup>Για περισσότερες πληροφορίες και ιστορία μπορείτε να συμβουλευτείτε το S. Hildebrandt and A. J. Tromba, *The Parsimonious Universe: Shape and Form in the Natural World*, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1995.

### Συμπλήρωμα 3.4A

#### Κριτήριο δεύτερης παραγώγου: ακρότατα υπό συνθήκη

Σε αυτό το συμπλήρωμα θα αποδείξουμε το Θεώρημα 10 της Ενότητας 3.4. Θα ξεκινήσουμε επαναλαμβάνοντας τη διατύπωση του.

**Θεώρημα 10.** Έστω  $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ομαλές (τουλάχιστον  $C^2$ ) συναρτήσεις. Έστω  $\mathbf{v}_0 \in U$ ,  $g(\mathbf{v}_0) = c$  και  $S$  η καμπύλη στάθμης της  $g$  με τιμή  $c$ . Υποθέτουμε ότι  $\nabla g(\mathbf{v}_0) \neq \mathbf{0}$  και ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός  $\lambda$  τέτοιος ώστε  $\nabla f(\mathbf{v}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{v}_0)$ . Σχηματίζουμε τη βοηθητική συνάρτηση  $h = f - \lambda g$  και υπολογίζουμε την ορίζουσα της **φραγμένης εσσιανής**

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x} & -\frac{\partial g}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{vmatrix} \quad \text{στο } \mathbf{v}_0.$$

- (i) Αν  $|\bar{H}| > 0$ , τότε το  $\mathbf{v}_0$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f|_S$ .
- (ii) Αν  $|\bar{H}| < 0$ , τότε το  $\mathbf{v}_0$  είναι τοπικό ελάχιστο της  $f|_S$ .
- (iii) Αν  $|\bar{H}| = 0$ , δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε κάποιο συμπέρασμα· το  $\mathbf{v}_0$  μπορεί να είναι ελάχιστο, μέγιστο ή τίποτα από τα δύο.

Η απόδειξη έχει ως εξής. Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις που ακολουθούν το θεώρημα των πολλαπλασιαστών Lagrange, τα ακρότατα υπό συνθήκη της  $f$  βρίσκονται με εξέταση των κρίσιμων σημείων της βοηθητικής συνάρτησης

$$h(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c).$$

Υποθέτουμε ότι  $(x_0, y_0, \lambda)$  είναι ένα τέτοιο σημείο και θέτουμε  $\mathbf{v}_0 = (x_0, y_0)$ . Δηλαδή

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\mathbf{v}_0} = \lambda \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\mathbf{v}_0}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\mathbf{v}_0} = \lambda \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{\mathbf{v}_0} \quad \text{και} \quad g(x_0, y_0) = c.$$

Υπό μία έννοια έχουμε ένα πρόβλημα μίας μεταβλητής. Αν η συνάρτηση  $g$  είναι σχετικά φυσιολογική, τότε το σύνολο  $S$  που ορίζεται από την  $g(x, y) = c$  είναι μια καμπύλη και αυτό που μας ενδιαφέρει είναι πώς μεταβάλλεται η  $f$  καθώς κινούμαστε κατά μήκος αυτής της καμπύλης. Αν μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση  $g(x, y) = c$  ως προς τη μία μεταβλητή συναρτήσει της άλλης, τότε, αφού το κάνουμε, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο δεύτερης παραγώγου για τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής. Αν  $\partial g / \partial y|_{\mathbf{v}_0} \neq 0$ , τότε η καμπύλη  $S$  δεν είναι κάθετη στο  $\mathbf{v}_0$  και είναι λογικό να μπορούμε να λύσουμε ως προς  $y$  συναρτήσει του  $x$  σε μια γειτονιά του  $\mathbf{x}_0$ . Μάλιστα, αυτό θα το αποδείξουμε στην Ενότητα 3.5 με το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων. (Αν  $\partial g / \partial x|_{\mathbf{v}_0} \neq 0$ , μπορούμε με αντίστοιχο τρόπο να λύσουμε ως προς  $x$  συναρτήσει του  $y$ .)



Ας υποθέσουμε ότι η  $S$  είναι το γράφημα της  $y = \phi(x)$ , οπότε η  $f|_S$  μπορεί να γραφτεί σαν συνάρτηση μίας μεταβλητής:  $f(x, y) = f(x, \phi(x))$ . Από τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε

$$\left. \begin{aligned} \text{και} \quad \frac{df}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{d^2 f}{dx^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση  $g(x, \phi(x)) = c$  για να βρούμε τις  $d\phi/dx$  και  $d^2\phi/dx^2$ . Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της  $g(x, \phi(x)) = c$  ως προς  $x$ , παίρνουμε

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

και

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0,$$

οπότε

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial g / \partial x}{\partial g / \partial y}$$

και

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{1}{\partial g / \partial y} \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \frac{\partial g / \partial x}{\partial g / \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \left( \frac{\partial g / \partial x}{\partial g / \partial y} \right)^2 \right] \right\} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2) στις εξισώσεις (1) παίρνουμε

$$\left. \begin{aligned} \text{και} \quad \frac{df}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f / \partial y}{\partial g / \partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{d^2 f}{dx^2} &= \frac{1}{(\partial g / \partial y)^2} \left\{ \left[ \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{\partial f / \partial y}{\partial g / \partial y} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right] \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f / \partial y}{\partial g / \partial y} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial f / \partial y}{\partial g / \partial y} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Στο  $\mathbf{v}_0$  γνωρίζουμε ότι  $\partial f / \partial y = \lambda \partial g / \partial y$  και  $\partial f / \partial x = \lambda \partial g / \partial x$ , οπότε η εξίσωση (3) γίνεται

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} - \lambda \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x_0} = 0$$

και

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_0} &= \frac{1}{(\partial g / \partial y)^2} \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 \right] \\ &= - \frac{1}{(\partial g / \partial y)^2} \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x} & -\frac{\partial g}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

όπου οι ποσότητες υπολογίζονται στο  $x_0$  και  $h$  είναι η βοηθητική συνάρτηση που ορίσαμε παραπάνω. Αυτή η  $3 \times 3$  ορίζουσα, όπως αναφέρεται στη διατύπωση του Θεωρήματος 10, καλείται **φραγμένη εσσιανή** και έχει αντίθετο πρόσημο από την  $d^2 f / dx^2$ . Επομένως, αν είναι αρνητική, πρέπει να βρισκόμαστε σε τοπικό ελάχιστο. Αν είναι θετική, πρέπει να βρισκόμαστε σε τοπικό μέγιστο, ενώ αν είναι μηδέν δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε κάποιο συμπέρασμα.

## Ασκήσεις

1. Θεωρήστε την ειδική περίπτωση του θεωρήματος όπου  $g(x, y) = y$ , ώστε η καμπύλη στάθμης  $g(x, y) = c$  με  $c = 0$  να είναι ο άξονας  $x$ . Μήπως το Θεώρημα 10 ανάγεται σε κάποιο θεώρημα που γνωρίζετε από τον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής;
2. Δείξτε ότι η φραγμένη εσσιανή της  $f(x_1, \dots, x_n)$  υπό τον μοναδικό περιορισμό  $g(x_1, \dots, x_n) = c$  είναι η εσσιανή της συνάρτησης

$$f(x_1, \dots, x_n) - \lambda g(x_1, \dots, x_n)$$

των  $n + 1$  μεταβλητών  $\lambda, x_1, \dots, x_n$  (υπολογισμένη στο κρίσιμο σημείο). Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αυτή την παρατήρηση για να δώσετε μια άλλη απόδειξη του υπό συνθήκη κριτηρίου δεύτερης παραγώγου χρησιμοποιώντας το κριτήριο άνευ συνθήκης; ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Αν  $\lambda_0$  είναι η τιμή του  $\lambda$  που καθορίζεται από το θεώρημα των πολλαπλασιαστών Lagrange, θεωρήστε τη συνάρτηση

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda g(x_1, \dots, x_n) \pm (\lambda - \lambda_0)^2.$$

### Συμπλήρωμα 3.4B

#### Απόδειξη του θεωρήματος πεπλεγμένων συναρτήσεων

Θα ξεκινήσουμε επαναλαμβάνοντας το θεώρημα.

**Θεώρημα 11. Ειδικό θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων.** Έστω ότι η συνάρτηση  $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  έχει συνεχείς μερικές παραγώγους και ας συμβολίσουμε τα σημεία του  $\mathbb{R}^{n+1}$  με  $(\mathbf{x}, z)$ , όπου  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  και  $z \in \mathbb{R}$ . Αν το  $(\mathbf{x}_0, z_0)$  ικανοποιεί τις

$$F(\mathbf{x}_0, z_0) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0, z_0) \neq 0,$$

τότε υπάρχει μια μπάλα  $U$  που περιέχει το  $\mathbf{x}_0$  στο  $\mathbb{R}^n$  και μια γειτονιά  $V$  του  $z_0$  στο  $\mathbb{R}$ , για τις οποίες υπάρχει μοναδική συνάρτηση  $z = g(\mathbf{x})$  ορισμένη για  $\mathbf{x}$  στην  $U$  και  $z$  στην  $V$  που ικανοποιεί την  $F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$ . Επιπλέον, αν τα  $\mathbf{x}$  στην  $U$  και  $z$  στην  $V$  ικανοποιούν την  $F(\mathbf{x}, z) = 0$ , τότε  $z = g(\mathbf{x})$ . Τέλος, η  $z = g(\mathbf{x})$  είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και η παράγωγός της δίνεται από την

$$\mathbf{D}g(\mathbf{x}) = - \left. \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}, z)} \mathbf{D}_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}, z) \right|_{z=g(\mathbf{x})},$$

όπου  $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}F$  είναι ο πίνακας παραγώγων της  $F$  ως προς τη μεταβλητή  $\mathbf{x}$ , δηλαδή

$$\mathbf{D}_{\mathbf{x}}F = \left[ \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right].$$

Με άλλα λόγια,

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = - \frac{\partial F / \partial x_i}{\partial F / \partial z}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Θα αποδείξουμε την περίπτωση  $n = 2$ , όπου  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Η απόδειξη για οποιοδήποτε  $n$  γίνεται με αντίστοιχο τρόπο. Γράφουμε  $\mathbf{x} = (x, y)$  και  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ . Αφού  $(\partial F / \partial z)(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ , είναι είτε θετική είτε αρνητική. Ας υποθέσουμε ότι είναι θετική. Επειδή είναι συνεχής, μπορούμε να βρούμε αριθμούς  $a > 0$  και  $b > 0$  τέτοιους ώστε για  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < a$  και  $|z - z_0| < a$  να έχουμε  $(\partial F / \partial z)(\mathbf{x}, z) > b$ . Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι οι άλλες μερικές παράγωγοι φράσσονται από κάποιον αριθμό  $M$  σε αυτό το χωρίο, δηλαδή  $|(\partial F / \partial x)(\mathbf{x}, z)| \leq M$  και  $|(\partial F / \partial y)(\mathbf{x}, z)| \leq M$ , το οποίο έπεται επίσης από τη συνέχεια. Γράφουμε την  $F(\mathbf{x}, z)$  ως εξής:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, z) &= F(\mathbf{x}, z) - F(\mathbf{x}_0, z_0) \\ &= [F(\mathbf{x}, z) - F(\mathbf{x}_0, z)] + [F(\mathbf{x}_0, z) - F(\mathbf{x}_0, z_0)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(t) = F(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{x}_0, z)$$

για σταθερά  $\mathbf{x}$  και  $z$ . Από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει αριθμός  $\theta$  ανάμεσα στο 0 και το 1 τέτοιος ώστε

$$h(1) - h(0) = h'(\theta)(1 - 0) = h'(\theta),$$

δηλαδή το  $\theta$  είναι τέτοιο ώστε να έχουμε

$$F(\mathbf{x}, z) - F(\mathbf{x} - 0, z) = [\mathbf{D}_{\mathbf{x}}F(\theta\mathbf{x} + (1 - \theta)\mathbf{x}_0, z)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Αντικαθιστώντας αυτή τη σχέση στην εξίσωση (2) μαζί με μια παρόμοια σχέση για τον δεύτερο όρο της εξίσωσης, παίρνουμε

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, z) &= [\mathbf{D}_{\mathbf{x}}F(\theta\mathbf{x} + (1 - \theta)\mathbf{x}_0, z)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &\quad + \left[ \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0, \phi z + (1 - \phi)z_0) \right] (z - z_0), \end{aligned} \quad (3)$$

όπου το  $\phi$  είναι ανάμεσα στο 0 και το 1. Θεωρούμε  $a_0$  που ικανοποιεί την  $0 < a_0 < a$  και επιλέγουμε  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε  $\delta < a_0$  και  $\delta < ba_0/2M$ . Αν  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$  τότε τα  $|x - x_0|$  και  $|y - y_0|$  είναι αμφότερα μικρότερα από  $\delta$ , οπότε η απόλυτη τιμή καθενός εκ των δύο όρων της

$$\begin{aligned} &[\mathbf{D}_{\mathbf{x}}F(\theta\mathbf{x} + (1 - \theta)\mathbf{x}_0, z)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= \left[ \frac{\partial F}{\partial x}\theta\mathbf{x} + (1 - \theta)\mathbf{x}_0, z \right] (x - x_0) + \left[ \frac{\partial F}{\partial y}\theta\mathbf{x} + (1 - \theta)\mathbf{x}_0, z \right] (y - y_0) \end{aligned}$$

είναι μικρότερη από  $M\delta < M(ba_0/2M) = ba_0/2$ . Άρα για  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$  έχουμε

$$|[\mathbf{D}_{\mathbf{x}}F(\theta\mathbf{x} + (1 - \theta)\mathbf{x}_0, z)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)| < ba_0.$$

Επομένως, από την (3) και την επιλογή του  $b$ , για  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$  έχουμε

$$F(\mathbf{x}, z_0 + a_0) > 0 \quad \text{και} \quad F(\mathbf{x}, z_0 - a_0) < 0.$$

[Οι ανισότητες έχουν αντίθετη φορά αν  $(\partial F/\partial z)(\mathbf{x}_0, z_0) < 0$ .] Συνεπώς, εφαρμόζοντας το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής στην  $F(\mathbf{x}, z)$  ως συνάρτηση του  $z$  για κάθε  $\mathbf{x}$ , παίρνουμε ότι υπάρχει κάποιο  $z$  ανάμεσα στο  $z_0 - a_0$  και το  $z_0 + a_0$  τέτοιο ώστε  $F(\mathbf{x}, z) = 0$ . Αυτό το  $z$  είναι μοναδικό, αφού, σύμφωνα με τον στοιχειώδη απειροστικό λογισμό, μια συνάρτηση με θετική παράγωγο είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς δεν μπορεί να μηδενίζεται περισσότερες από μία φορές.

Έστω  $U$  η ανοιχτή μπάλα ακτίνας  $\delta$  και κέντρου  $\mathbf{x}_0$  στο  $\mathbb{R}^2$  και έστω  $V$  το ανοιχτό διάστημα στο  $\mathbb{R}$  από το  $z_0 - a_0$  ως το  $z_0 + a_0$ . Έχουμε αποδείξει ότι αν περιορίσουμε το  $\mathbf{x}$  στο  $U$ , υπάρχει μοναδικό  $z$  στο  $V$  τέτοιο ώστε  $F(\mathbf{x}, z) = 0$ . Αυτό ορίζει τη συνάρτηση  $z = g(\mathbf{x}) = g(x, y)$  που απαιτεί το θεώρημα. Αφήνουμε στον αναγνώστη να αποδείξει ότι από αυτή την κατασκευή προκύπτει ότι η  $z = g(x, y)$  είναι συνεχής συνάρτηση.

Απομένει να αποδείξουμε ότι η  $z = g(\mathbf{x})$  είναι συνεχώς παραγωγίσιμη. Από την εξίσωση (3), και δεδομένου ότι  $F(\mathbf{x}, z) = 0$  και  $z_0 = g(\mathbf{x}_0)$ , έχουμε

$$g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) = -\frac{[\mathbf{D}_{\mathbf{x}}F(\theta\mathbf{x} + (1 - \theta)\mathbf{x}_0, z)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0, \phi z + (1 - \phi)z_0)}.$$

Αν θέσουμε  $\mathbf{x} = (x_0 + h, y_0)$ , η εξίσωση αυτή γίνεται

$$\frac{g(x_0 + h, y_0) - g(x_0, y_0)}{h} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\theta \mathbf{x} + (1 - \theta)\mathbf{x}_0, z)}{\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{x}_0, \phi z + (1 - \phi)z_0)}.$$

Καθώς  $h \rightarrow 0$ , έπεται ότι  $x \rightarrow x_0$  και  $z \rightarrow z_0$ , οπότε παίρνουμε

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h, y_0) - g(x_0, y_0)}{h} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, z)}.$$

Η σχέση

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, z)}$$

αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο. Με βάση τον ίδιο συλλογισμό, τα παραπάνω ισχύουν για οποιοδήποτε σημείο  $(x, y)$  του  $U$ , άρα αποδείξαμε τη σχέση (1). Αφού το δεξί μέλος της σχέσης (1) είναι συνεχής συνάρτηση, αποδείξαμε το θεώρημα.

## 4

# Διανυσματικές συναρτήσεις

Δεν ξέρω τι εικόνα μπορεί να έχει για μένα ο κόσμος, αλλά, εγώ νομίζω πώς υπήρξα ένα παιδί που έπαιζε στην ακρογιαλιά και διασκεδάζε βρίσκοντας πού και πού κανένα πιο λείο βότσαλο ή κανένα όστρακο πιο όμορφο από τα συνηθισμένα, ενώ ο μεγάλος ωκεανός της αλήθειας βρισκόταν ολόκληρος μπροστά μου δίχως να τον έχω ανακαλύψει.

Ισαάκ Νεύτωνας, λίγο πριν από τον θάνατό του το 1727

### Συμπλήρωμα 4.1A

#### Σημεία ισορροπίας στη μηχανική

Έστω  $\mathbf{F}$  ένα πεδίο δυνάμεων ορισμένο επί ενός χωρίου  $U$  του  $\mathbb{R}^3$ . Δηλαδή το  $\mathbf{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι ένα διανυσματικό πεδίο. Ας θεωρήσουμε ότι ένα σωματίδιο (μάζας  $m$ ) πρόκειται να κινηθεί κατά μήκος μιας διαδρομής  $\mathbf{c}(t)$  με τρόπο ώστε να ισχύει ο νόμος του Νεύτωνα:  $\text{μάζα} \times \text{επιτάχυνση} = \text{δύναμη}$ , δηλαδή η διαδρομή  $\mathbf{c}(t)$  πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση

$$m\mathbf{c}''(t) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)). \quad (1)$$

Αν το  $\mathbf{F}$  είναι πεδίο δυναμικού με δυναμικό  $V$ , δηλαδή αν  $\mathbf{F} = -\nabla V$ , τότε

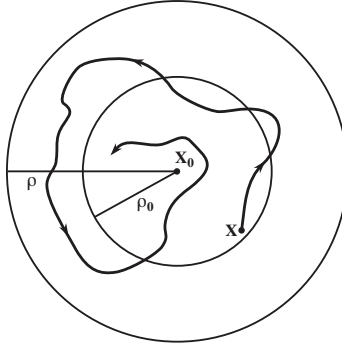
$$\frac{1}{2}m\|\mathbf{c}'(t)\|^2 + V(\mathbf{c}(t)) = \text{σταθερά}. \quad (2)$$

(Ο πρώτος όρος καλείται *κινητική ενέργεια*.) Πράγματι, παραγωγίζοντας το αριστερό μέλος της εξίσωσης (2) με χρήση του κανόνα της αλυσίδας,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m \|\mathbf{c}'(t)\|^2 + V(\mathbf{c}(t)) \right] &= m \mathbf{c}'(t) \cdot \mathbf{c}''(t) + \nabla V(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) \\ &= [m \mathbf{c}''(t) + \nabla V(\mathbf{c}(t))] \cdot \mathbf{c}'(t) = 0, \end{aligned}$$

αφού  $m \mathbf{c}''(t) = -\nabla V(\mathbf{c}(t))$ . Άρα αποδείχθηκε η σχέση (2).

**Ορισμός.** Ένα σημείο  $\mathbf{x}_0 \in U$  καλείται *θέση ισορροπίας* αν η δύναμη σε αυτό το σημείο είναι μηδέν:  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ . Λέμε ότι ένα σημείο  $\mathbf{x}_0$  που είναι θέση ισορροπίας είναι *ευσταθές*, αν για κάθε  $\rho > 0$  και  $\epsilon > 0$  μπορούμε να επιλέξουμε αριθμούς  $\rho_0 > 0$  και  $\epsilon_0 > 0$  έτσι ώστε αν ένα σημείο που βρίσκεται οπουδήποτε σε απόσταση μικρότερη από  $\rho_0$  από το  $\mathbf{x}_0$  λάβει αρχικά ποσότητα κινητικής ενέργειας μικρότερη από  $\epsilon_0$ , θα παραμείνει για πάντα σε απόσταση μικρότερη από  $\rho$  από το  $\mathbf{x}_0$  και να έχει κινητική ενέργεια μικρότερη από  $\epsilon$  (βλ. Σχήμα 4.1.1).



ΣΧΗΜΑ 4.1.1. Κίνηση κοντά σε ένα ευσταθές σημείο  $\mathbf{x}_0$ .

Αυτό σημαίνει ότι αν το σημείο  $\mathbf{x}_0$  είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας, ένα αργά κινούμενο σωματίδιο κοντά στο  $\mathbf{x}_0$  θα παραμείνει για πάντα κοντά στο  $\mathbf{x}_0$  και θα συνεχίσει να κινείται αργά. Αν το  $\mathbf{x}_0$  είναι σημείο ασταθούς ισορροπίας, τότε η  $\mathbf{c}(t) = \mathbf{x}_0$  είναι λύση της εξίσωσης  $m \mathbf{c}''(t) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$ , αλλά οι γειτονικές λύσεις μπορεί να απομακρύνονται από το  $\mathbf{x}_0$  με την πάροδο του χρόνου. Για παράδειγμα, ένα μολύβι που ισορροπεί στη μύτη του μας δίνει ένα παράδειγμα ασταθούς κατάστασης, ενώ μια μπάλα που κρέμεται από ένα ελατήριο μας δίνει ένα παράδειγμα ευσταθούς ισορροπίας.

### Θεώρημα 1.

- (i) Τα κρίσιμα σημεία ενός δυναμικού είναι τα σημεία ισορροπίας.
- (ii) Σε ένα πεδίο δυναμικού, ένα σημείο  $\mathbf{x}_0$  όπου το δυναμικό έχει αυστηρό τοπικό ελάχιστο είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας. (Υπενθυμίζουμε πως λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  έχει αυστηρό τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο  $\mathbf{x}_0$  αν υπάρχει γειτονιά  $U$  του  $\mathbf{x}_0$  τέτοια ώστε  $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0)$  για κάθε  $\mathbf{x}$  στο  $U$  διαφορετικό από το  $\mathbf{x}_0$ .)

**Απόδειξη.** Ο πρώτος ισχυρισμός είναι μάλλον προφανής από τον ορισμό  $\mathbf{F} = -\nabla V$ . Τα σημεία ισοροπίας  $\mathbf{x}_0$  είναι ακριβώς τα κρίσιμα σημεία του  $V$ , όπου  $\nabla V(\mathbf{x}_0) = 0$ .

Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό (ii), θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας, δηλαδή την εξίσωση (2). Έχουμε

$$\frac{1}{2}m\|\mathbf{c}'(t)\|^2 + V(\mathbf{c}(t)) = \frac{1}{2}m\|\mathbf{c}'(t)\|^2 + V(\mathbf{c}(0)).$$

Θα αναπτύξουμε τον συλλογισμό χωρίς ιδιαίτερη αυστηρότητα με στόχο να καταδείξουμε τις βασικές ιδέες στις οποίες στηρίζεται. Επιλέγουμε μια μικρή γειτονιά του  $\mathbf{x}_0$  και υποθέτουμε ότι το σωματίδιό μας ξεκινάει με μικρή κινητική ενέργεια. Καθώς αυξάνεται το  $t$ , το σωματίδιο απομακρύνεται από το  $\mathbf{x}_0$  επί μιας διαδρομής  $\mathbf{c}(t)$  και το  $V(\mathbf{c}(t))$  αυξάνεται [αφού το  $V(\mathbf{x}_0) = V(\mathbf{c}(0))$  είναι αυστηρό ελάχιστο], οπότε η κινητική ενέργεια πρέπει να μειωθεί. Αν η αρχική κινητική ενέργεια είναι αρκετά μικρή, για να διαφύγει το σωματίδιο από τη γειτονιά του  $\mathbf{x}_0$ , έξω από την οποία το  $V$  έχει αυξηθεί κατά μια ορισμένη ποσότητα, η κινητική ενέργεια θα πρέπει να γίνει αρνητική (το οποίο είναι αδύνατο). Άρα το σωματίδιο δεν μπορεί να διαφύγει από τη γειτονιά.  $\square$

**Παράδειγμα 1.** Βρείτε τα σημεία που είναι θέσεις ισοροπίας και προσδιορίστε αν είναι ευσταθή ή όχι, αν το πεδίο δυνάμεων  $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$  ορίζεται από τις  $F_x = -k^2x$ ,  $F_y = -k^2y$ ,  $F_z = -k^2z$  ( $k \neq 0$ ).<sup>1</sup>

**Λύση.** Το πεδίο δυνάμεων  $\mathbf{F}$  είναι πεδίο δυναμικού όπου το δυναμικό δίνεται από τη συνάρτηση  $V = \frac{1}{2}k^2(x^2 + y^2 + z^2)$ . Το μοναδικό κρίσιμο σημείο του  $V$  είναι η αρχή των αξόνων. Η εσσιανή του  $V$  στην αρχή των αξόνων είναι  $\frac{1}{2}k^2(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)$ , και είναι θετικά ορισμένη. Έπεται ότι η αρχή των αξόνων είναι αυστηρό ελάχιστο του  $V$ . Άρα, σύμφωνα με τα (i) και (ii) του Θεωρήματος 1, αποδείξαμε ότι η αρχή των αξόνων είναι θέση ευσταθούς ισοροπίας.  $\diamond$

Έστω ότι ένα σημείο ενός πεδίου δυναμικού  $V$  είναι περιορισμένο να παραμένει στην επιφάνεια στάθμης  $S$  που δίνεται από την εξίσωση  $\phi(x, y, z) = 0$ , με  $\nabla\phi \neq \mathbf{0}$ . Αν στη σχέση (1) αντικαταστήσουμε το  $\mathbf{F}$  με τη συνιστώσα του  $\mathbf{F}$  που είναι παράλληλη στην  $S$ , διασφαλίζουμε ότι το σωματίδιο θα παραμείνει στην  $S$ .<sup>2</sup> Κατ' αναλογία με το Θεώρημα 1, έχουμε:

### Θεώρημα 2.

- (i) Αν σε ένα σημείο  $P$  μιας επιφάνειας  $S$  το δυναμικό  $V|_S$  έχει ακρότατη τιμή, τότε το σημείο  $P$  είναι θέση ισοροπίας επί της επιφάνειας.
- (ii) Αν ένα σημείο  $P \in S$  είναι αυστηρό τοπικό ελάχιστο του δυναμικού  $V|_S$ , τότε το σημείο  $P$  είναι θέση ευσταθούς ισοροπίας.

<sup>1</sup>Το πεδίο δυνάμεων αυτού του παραδείγματος είναι αυτό που διέπει την κίνηση ενός τριδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή.

<sup>2</sup>Αν  $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$ , το σωματίδιο είναι περιορισμένο να κινείται επί μιας σφαίρας· για παράδειγμα, μπορεί να στροβιλίζεται δεμένο από ένα σκοινί. Το κομμάτι που αφαιρούμε από το  $\mathbf{F}$  προκειμένου να το κάνουμε παράλληλο με την  $S$  είναι κάθετο στην  $S$  και καλείται **κεντρομόλος δύναμη**.



Θα παραλείψουμε την απόδειξη αυτού του θεωρήματος. Είναι παρόμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 1, με το επιπλέον στοιχείο ότι στην εξίσωση κίνησης χρησιμοποιείται μόνο η συνιστώσα του  $\mathbf{F}$  κατά μήκος της επιφάνειας.<sup>3</sup>

**Παράδειγμα 2.** Έστω  $\mathbf{F}$  το βαρυντικό πεδίο κοντά στην επιφάνεια της Γης, δηλαδή  $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ , όπου  $F_x = 0$ ,  $F_y = 0$  και  $F_z = -mg$ , όπου  $g$  είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Ποιες είναι οι θέσεις ισορροπίας, αν ένα σωματίδιο μάζας  $m$  είναι περιορισμένο να κινείται πάνω στη σφαίρα  $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$  ( $r > 0$ ); Ποιες από αυτές είναι ευσταθείς;

**Λύση.** Παρατηρούμε ότι το  $\mathbf{F}$  είναι πεδίο δυναμικού με  $V = mgz$ . Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange που παρουσιάσαμε στην Ενότητα 3.4 για να βρούμε τα πιθανά ακρότατα, έχουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned}\nabla V &= \lambda \nabla \phi \\ \phi &= 0\end{aligned}$$

ή, χρησιμοποιώντας συνιστώσες,

$$\begin{aligned}0 &= 2\lambda x \\ 0 &= 2\lambda y \\ mg &= 2\lambda z\end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

Η λύση αυτού του συστήματος εξισώσεων είναι  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = \pm r$ ,  $\lambda = \pm mg/2r$ . Από το Θεώρημα 2 έπεται ότι τα σημεία  $P_1(0, 0, -r)$  και  $P_2 = (0, 0, r)$  είναι θέσεις ισορροπίας. Παρατηρώντας τη συνάρτηση δυναμικού  $V = mgz$  και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2, μέρος (ii), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το  $P_1$  είναι αυστηρό ελάχιστο και επομένως ευσταθές σημείο, ενώ το  $P_2$  δεν είναι. Αυτό το συμπέρασμα είναι από φυσικής πλευράς προφανές.  $\diamond$

## Ασκήσεις

1. Έστω ότι ένα σωματίδιο κινείται σε ένα πεδίο δυναμικού στο  $\mathbb{R}^2$  που δίνεται από την  $V(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2 + y + 4$ . Βρείτε τα σημεία ευσταθούς ισορροπίας, αν υπάρχουν.
2. Έστω ότι ένα σωματίδιο κινείται σε ένα πεδίο δυναμικού στο  $\mathbb{R}^2$  που δίνεται από την  $V(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 + y^3 + y^4$ . Είναι το σημείο  $(0, 0)$  θέση ευσταθούς ισορροπίας;

<sup>3</sup>Οι ιδέες αυτές μπορούν να εφαρμοστούν σε αρκετές ενδιαφέρουσες φυσικές καταστάσεις, όπως στις μοριακές δονήσεις. Η ευστάθεια τέτοιου είδους συστημάτων αποτελεί σημαντικό ερώτημα. Για περισσότερες πληροφορίες, συμβουλευτείτε τη φυσική βιβλιογραφία (π.χ. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1950, Κεφάλαιο 10) και τη μαθηματική βιβλιογραφία (π.χ. M. Hirsch και S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, New York 1974).

3. (Η λύση δίνεται στο τέλος αυτού του διαδικτυακού συμπληρώματος.) Έστω ότι ένα σωματίδιο κινείται σε ένα πεδίο δυναμικού στο  $\mathbb{R}^2$  που δίνεται από την  $V(x, y) = x^2 - 4xy - y^2 - 8x - 6y$ . Βρείτε όλα τα σημεία ισορροπίας. Αν υπάρχουν ευσταθή σημεία, ποια είναι;
4. Έστω ότι ένα σωματίδιο είναι περιορισμένο να κινείται επί του κύκλου  $x^2 + y^2 = 25$  υπό το δυναμικό  $V = V_1 + V_2$ , όπου  $V_1$  είναι το βαρυτικό δυναμικό του Παραδείγματος 2 και  $V_2(x, y) = x^2 + 24xy + 8y^2$ . Βρείτε τα σημεία ευσταθούς ισορροπίας, αν υπάρχουν.
5. Έστω ότι ένα σωματίδιο είναι περιορισμένο να κινείται επί της σφαίρας  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  υπό το δυναμικό  $V = V_1 + V_2$ , όπου  $V_1$  είναι το βαρυτικό δυναμικό του Παραδείγματος 2 και  $V_2(x, y) = x + y$ . Βρείτε τα σημεία ευσταθούς ισορροπίας, αν υπάρχουν.
6. Προσπαθήστε να διατυπώσετε έναν ορισμό και ένα θεώρημα που να λένε ότι αν ένα δυναμικό έχει μέγιστο σε ένα σημείο  $\mathbf{x}_0$ , τότε το  $\mathbf{x}_0$  είναι θέση ασταθούς ισορροπίας. Προσέξτε πιθανές παγίδες κατά την ανάπτυξη του συλλογισμού σας.

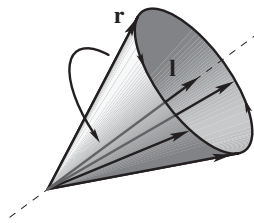
## Συμπλήρωμα 4.1B

### Περιστροφές και ο τύπος της ηλιοφάνειας

Σε αυτό το συμπλήρωμα θα χρησιμοποιήσουμε διανυσματικές μεθόδους για να υπολογίσουμε σχέσεις που δίνουν τη θέση του Ηλίου στον ουρανό συναρτήσει του γεωγραφικού πλάτους και της ημέρας του χρόνου.<sup>4</sup> Για να κεντρίσετε το ενδιαφέρον σας, κοιτάξτε το συναρπαστικό Σχήμα 4.1.12 που ακολουθεί, όπου απεικονίζεται γραφικά η διάρκεια της ημέρας συναρτήσει του γεωγραφικού πλάτους και της ημέρας του χρόνου. Στόχος μας σε αυτό το συμπλήρωμα είναι να χρησιμοποιήσουμε διανυσματικές μεθόδους για να υπολογίσουμε αυτή τη σχέση και να εξετάσουμε διάφορα σχετικά ζητήματα.

Πρόκειται για μια όμορφη εφαρμογή των ιδεών του διανυσματικού λογισμού, καθώς για την κατανόησή της δεν απαιτούνται ιδιαίτερες τεχνικές γνώσεις και ο καθένας μπορεί να εκτιμήσει την αξία της. Μολονότι δεν είναι πολύ απλή, δεν απαιτεί ούτε ιδιαίτερα προχωρημένες ιδέες — απαιτεί κυρίως υπομονή και επιμονή. Ακόμη και αν κανείς δεν κατανοήσει πλήρως όλες τις λεπτομέρειες, στην πορεία μπορεί να μάθει πολλά σχετικά με τις περιστροφές.

**Λίγα πράγματα σχετικά με τις περιστροφές.** Θεωρούμε δύο μοναδιαία διανύσματα  $\mathbf{l}$  και  $\mathbf{r}$  στον χώρο με το ίδιο σημείο βάσης. Αν περιστρέψουμε το  $\mathbf{r}$  γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το  $\mathbf{l}$ , τότε η κεφαλή του  $\mathbf{r}$  θα διαγράψει έναν κύκλο (Σχήμα 4.1.2). (Φανταστείτε ότι τα  $\mathbf{l}$  και  $\mathbf{r}$  είναι γερά κολλημένα μεταξύ τους στα σημεία βάσης τους και ότι κατόπιν περιστρέφονται γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το  $\mathbf{l}$ .) Υποθέτουμε ότι η περιστροφή γίνεται με ομοιόμορφο ρυθμό κατά την αντιωρολόγια φορά (όπως κοιτάμε τα διανύσματα από την κορυφή του  $\mathbf{l}$ ) και ότι μια πλήρης περιστροφή ολοκληρώνεται σε  $T$  μονάδες χρόνου. Το διάνυσμα  $\mathbf{r}$  είναι πλέον μια διανυσματική συνάρτηση του χρόνου, οπότε μπορούμε να γράψουμε  $\mathbf{r} = \mathbf{c}(t)$ . Πρώτος μας στόχος είναι να βρούμε μια σχέση που να εκφράζει με βολικό τρόπο το  $\mathbf{c}(t)$  συναρτήσει της αρχικής του θέσης  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{c}(0)$ .

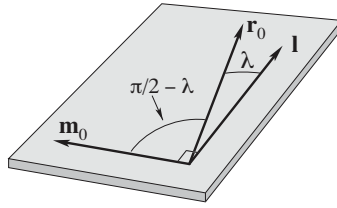


ΣΧΗΜΑ 4.1.2. Αν το  $\mathbf{r}$  περιστραφεί γύρω από το  $\mathbf{l}$ , η κορυφή του θα διαγράψει έναν κύκλο.

<sup>4</sup>Το περιεχόμενο αυτής της ενότητας προέρχεται, με προσαρμογές, από το *Calculus I, II, III* των J. Marsden και A. Weinstein, Springer-Verlag, New York, στο οποίο μπορεί να ανατρέξει ο αναγνώστης για περισσότερες πληροφορίες και κάποιες ενδιαφέρουσες ιστορικές παρατηρήσεις. Βλ. επίσης την οικοσελίδα <http://www.math.niu.edu/~rusin/> του Dave Rusin και ιδιαίτερα τις σημειώσεις του σε σχέση με τη θέση του Ηλίου στον ουρανό στη διεύθυνση <http://www.math.niu.edu/~rusin/uses-math/position.sun/>. Τον ευχαριστούμε για τα σχόλιά του πάνω σε αυτή την ενότητα.

Έστω  $\lambda$  η γωνία που σχηματίζουν τα  $\mathbf{l}$  και  $\mathbf{r}_0$ . Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι  $\lambda \neq 0$  και  $\lambda \neq \pi$ , δηλαδή ότι τα  $\mathbf{l}$  και  $\mathbf{r}_0$  δεν είναι παράλληλα, αφού σε διαφορετική περίπτωση το  $\mathbf{r}$  δεν θα περιστρεφόταν. Μάλιστα, θα θεωρήσουμε ότι το  $\lambda$  παίρνει τιμές στο ανοιχτό διάστημα  $(0, \pi)$ . Κατασκευάζουμε το μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{m}_0$  όπως στο Σχήμα 4.1.3. Από το σχήμα αυτό βλέπουμε ότι

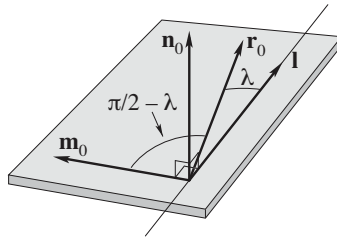
$$\mathbf{r}_0 = (\cos \lambda)\mathbf{l} + (\sin \lambda)\mathbf{m}_0. \quad (1)$$



ΣΧΗΜΑ 4.1.3. Το διάνυσμα  $\mathbf{m}_0$  κείται στο επίπεδο που σχηματίζουν τα  $\mathbf{r}_0$  και  $\mathbf{l}$ , είναι ορθογώνιο με το  $\mathbf{l}$  και σχηματίζει γωνία  $(\pi/2) - \lambda$  με το  $\mathbf{r}_0$ .

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η σχέση (1) αποτελεί τον αλγεβρικό ορισμό του  $\mathbf{m}_0$ , γράφοντας  $\mathbf{m}_0 = (1/\sin \lambda)\mathbf{r}_0 - (\cos \lambda/\sin \lambda)\mathbf{l}$ . Υποθέσαμε ότι  $\lambda \neq 0$  και  $\lambda \neq \pi$ , οπότε  $\sin \lambda \neq 0$ .

Στη συνέχεια προσθέτουμε σε αυτό το σχήμα το μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{n}_0 = \mathbf{l} \times \mathbf{m}_0$ . (Βλ. Σχήμα 4.1.4.) Η τριάδα  $(\mathbf{l}, \mathbf{m}_0, \mathbf{n}_0)$  αποτελείται από τρία ανά δύο ορθογώνια μεταξύ τους μοναδιαία διανύσματα, ακριβώς όπως τα  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ .



ΣΧΗΜΑ 4.1.4. Η τριάδα  $(\mathbf{l}, \mathbf{m}_0, \mathbf{n}_0)$  είναι ένα σύνολο ορθογώνιων μεταξύ τους μοναδιαίων διανυσμάτων που ικανοποιούν τον κανόνα του δεξιού χεριού.

**Παράδειγμα 1.** Έστω  $\mathbf{l} = (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$  και  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{k}$ . Βρείτε τα  $\mathbf{m}_0$  και  $\mathbf{n}_0$ .

**Λύση.** Η γωνία που σχηματίζουν τα  $\mathbf{l}$  και  $\mathbf{r}_0$  προσδιορίζεται από την  $\cos \lambda = \mathbf{l} \cdot \mathbf{r}_0 = 1/\sqrt{3}$ . Σε αυτό καταλήγουμε παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο και των δύο μελών της σχέσης (1) με το  $\mathbf{l}$  και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το  $\mathbf{l}$  είναι μοναδιαίο διάνυσμα.

Επομένως,  $\sin \lambda = \sqrt{1 - \cos^2 \lambda} = \sqrt{2/3}$ , οπότε από τη σχέση (1) παίρνουμε

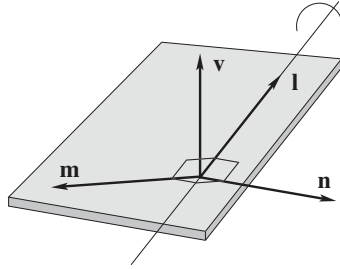
$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \frac{1}{\sin \lambda} \mathbf{c}(0) - \frac{\cos \lambda}{\sin \lambda} \mathbf{l} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{k} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = \frac{2}{\sqrt{6}} \mathbf{k} - \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \end{aligned}$$

και

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{l} \times \mathbf{m}_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{2}} \mathbf{j}. \quad \diamond$$

Επιστρέφουμε στο Σχήμα 4.1.4 και θεωρούμε ότι το περιστρέφουμε ολόκληρο γύρω από τον άξονα  $\mathbf{l}$ . Τα «περιστραμμένα» πλέον διανύσματα  $\mathbf{m}$  και  $\mathbf{n}$  θα μεταβάλλονται επίσης με τον χρόνο. Αφού η γωνία  $\lambda$  παραμένει σταθερή, εφαρμόζοντας τη σχέση (1) ύστερα από χρόνο  $t$  στα  $\mathbf{r}$  και  $\mathbf{l}$ , παίρνουμε (βλ. Σχήμα 4.1.5)

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\sin \lambda} \mathbf{r} - \frac{\cos \lambda}{\sin \lambda} \mathbf{l}. \quad (2)$$



ΣΧΗΜΑ 4.1.5. Τα τρία διανύσματα  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{m}$  και  $\mathbf{n}$  περιστρέφονται όλα γύρω από το  $\mathbf{l}$ .

Από την άλλη πλευρά, αφού το  $\mathbf{m}$  είναι κάθετο στο  $\mathbf{l}$ , περιστρέφεται διαγράφοντας έναν κύκλο στο επίπεδο που ορίζουν τα  $\mathbf{m}_0$  και  $\mathbf{n}_0$ . Διαγράφει γωνία  $2\pi$  σε χρόνο  $T$ , άρα σε  $t$  μονάδες χρόνου διαγράφει γωνία  $2\pi t/T$ , οπότε

$$\mathbf{m} = \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \mathbf{m}_0 + \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \mathbf{n}_0.$$

Εισάγοντας το παραπάνω στη σχέση (2) και αναδιατάσσοντας, παίρνουμε

$$\mathbf{r}(t) = (\cos \lambda) \mathbf{l} + \sin \lambda \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \mathbf{m}_0 + \sin \lambda \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \mathbf{n}_0. \quad (3)$$

Αυτή η σχέση μας δίνει τη μεταβολή του  $\mathbf{r}$  με το χρόνο καθώς αυτό περιστρέφεται γύρω από το  $\mathbf{l}$  σαν συνάρτηση της τριάδας βασικών διανυσμάτων  $(\mathbf{l}, \mathbf{m}_0, \mathbf{n}_0)$ .

**Παράδειγμα 2.** Εκφράστε το  $\mathbf{c}(t)$  σαν συνάρτηση των  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{r}_0$  και  $T$ .

**Λύση.** Έχουμε  $\cos \lambda = \mathbf{l} \cdot \mathbf{r}_0$  και  $\sin \lambda = \|\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0\|$ . Επιπλέον, αφού το  $\mathbf{n}_0$  είναι μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο σε αμφότερα τα  $\mathbf{l}$  και  $\mathbf{r}_0$ , πρέπει να έχουμε (με πιθανή διαφορά στον προσανατολισμό)

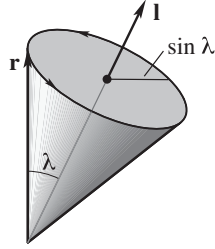
$$\mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0\|}.$$

Επομένως,  $(\sin \lambda) \mathbf{n}_0 = \mathbf{l} \times \mathbf{r}_0$ . Τέλος, από τη σχέση (1) παίρνουμε  $(\sin \lambda) \mathbf{m}_0 = \mathbf{r}_0 - (\cos \lambda) \mathbf{l} = \mathbf{r}_0 - (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{l}) \mathbf{l}$ . Αντικαθιστώντας όλα τα παραπάνω στη σχέση (3), παίρνουμε

$$\mathbf{r}(t) = (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{l}) \mathbf{l} + \cos \left( \frac{2\pi t}{T} \right) [\mathbf{r}_0 - (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{l}) \mathbf{l}] + \sin \left( \frac{2\pi t}{T} \right) (\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0). \quad \diamond$$

**Παράδειγμα 3.** Δείξτε με γεωμετρικούς συλλογισμούς ότι η ταχύτητα της κεφαλής του  $\mathbf{r}$  είναι  $(2\pi/T) \sin \lambda$ . Επιβεβαιώστε ότι από την εξίσωση (3) προκύπτει η ίδια σχέση.

**Λύση.** Η κορυφή του  $\mathbf{r}$  διαγράφει κύκλο ακτίνας  $\sin \lambda$ , άρα καλύπτει απόσταση  $2\pi \sin \lambda$  σε χρόνο  $T$ . Επομένως η ταχύτητά της είναι  $(2\pi \sin \lambda)/T$  (Σχήμα 4.1.6).



ΣΧΗΜΑ 4.1.6. Η κεφαλή του  $\mathbf{r}$  διαγράφει κύκλο ακτίνας  $\sin \lambda$ .

Από τη σχέση (3) βρίσκουμε ότι το διάνυσμα ταχύτητας είναι

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\sin \lambda \cdot \frac{2\pi}{T} \sin \left( \frac{2\pi t}{T} \right) \mathbf{m}_0 + \sin \lambda \cdot \frac{2\pi}{T} \cos \left( \frac{2\pi t}{T} \right) \mathbf{n}_0,$$

και ότι το μήκος του είναι (αφού τα  $\mathbf{m}_0$  και  $\mathbf{n}_0$  είναι ορθογώνια μοναδιαία διανύσματα)

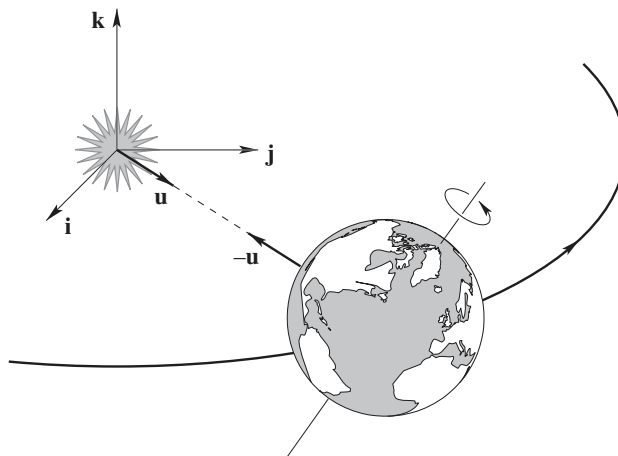
$$\begin{aligned} \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| &= \sqrt{\sin^2 \lambda \cdot \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{2\pi t}{T} \right) + \sin^2 \lambda \cdot \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{2\pi t}{T} \right)} \\ &= \sin \lambda \cdot \left( \frac{2\pi}{T} \right) \end{aligned}$$

όπως παραπάνω. ◇

**Περιστροφή της Γης γύρω από τον Ήλιο και γύρω από τον άξονά της.** Θα εφαρμόσουμε τώρα τα όσα μελετήσαμε παραπάνω σχετικά με τις περιστροφές στην κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο, λαμβάνοντας υπόψη και την περιστροφή της Γης γύρω από τον άξονά της. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα απλοποιημένο μοντέλο του συστήματος Γης-Ήλιου, όπου ο Ήλιος είναι σταθερός στην αρχή των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων και η Γη κινείται με ομοιόμορφη ταχύτητα επί ενός κύκλου με κέντρο τον Ήλιο. Έστω  $\mathbf{u}$  ένα μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση από τον Ήλιο προς το κέντρο της Γης. Έχουμε

$$\mathbf{u} = \cos(2\pi t/T_y)\mathbf{i} + \sin(2\pi t/T_y)\mathbf{j},$$

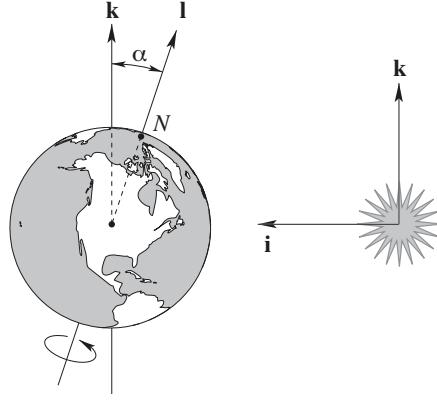
όπου  $T_y$  είναι η διάρκεια του χρόνου (τα  $t$  και  $T_y$  μετρώνται στις ίδιες μονάδες). Βλ. Σχήμα 4.1.7. Προσέξτε ότι το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση από τη Γη προς τον Ήλιο είναι το  $-\mathbf{u}$  και ότι έχουμε προσανατολίσει τους άξονές μας έτσι ώστε να έχουμε  $\mathbf{u} = \mathbf{i}$  όταν  $t = 0$ .



ΣΧΗΜΑ 4.1.7. Το μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{u}$  έχει κατεύθυνση από τον Ήλιο προς τη Γη τη χρονική στιγμή  $t$ .

Στη συνέχεια θέλουμε να λάβουμε υπόψη την περιστροφή της Γης γύρω από τον άξονά της. Η Γη περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα, τον οποίο παριστάνουμε με ένα μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{l}$  με κατεύθυνση από το κέντρο της Γης προς τον Βόρειο Πόλο. Θα θεωρήσουμε ότι το  $\mathbf{l}$  είναι σταθερό<sup>5</sup> ως προς τα  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  και  $\mathbf{k}$ . Αστρονομικές μετρήσεις δείχνουν ότι η κλίση του  $\mathbf{l}$  (η γωνία που σχηματίζουν τα  $\mathbf{l}$  και  $\mathbf{k}$ ) είναι σήμερα περίπου  $23.5^\circ$ . Θα συμβολίζουμε αυτή τη γωνία με  $\alpha$ . Αν μετρήσουμε τον χρόνο έτσι ώστε η πρώτη μέρα του καλοκαιριού στο βόρειο ημισφαίριο να συμβαίνει όταν  $t = 0$ , τότε ο άξονας  $\mathbf{l}$  έχει κλίση κατά την κατεύθυνση του  $-\mathbf{i}$ , οπότε πρέπει να έχουμε  $\mathbf{l} = \cos \alpha \mathbf{k} - \sin \alpha \mathbf{i}$ . (Βλ. Σχήμα 4.1.8.)

<sup>5</sup>Στην πραγματικότητα γνωρίζουμε ότι ο άξονας  $\mathbf{l}$  περιστρέφεται γύρω από το  $\mathbf{k}$  μία φορά κάθε 21.000 χρόνια. Αυτό το φαινόμενο, που καλείται *μετάπτωση*, οφείλεται στο ακανόνιστο σχήμα της Γης και μπορεί να συνδέεται με μακροχρόνιες κλιματικές αλλαγές, όπως είναι οι εποχές των παγετώνων. Βλ. σελίδες 130–134 του *The Weather Machine* του Nigel Calder, Viking (1974).



ΣΧΗΜΑ 4.1.8. Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  ο άξονας της Γης γέρνει προς τον ήλιο κατά γωνία  $\alpha$ .

Έστω  $\mathbf{r}$  το μοναδιαίο διάνυσμα που τη χρονική στιγμή  $t$  ξεκινάει από το κέντρο της Γης και καταλήγει σε ένα σταθερό σημείο  $P$  επάνω στην επιφάνεια της Γης. Προσέξτε ότι αν το  $\mathbf{r}$  έχει τη βάση του στο σημείο  $P$ , τότε αντιπροσωπεύει την τοπική κατακόρυφη κατεύθυνση. Θα θεωρήσουμε ότι το  $P$  επιλέγεται έτσι ώστε τη χρονική στιγμή  $t = 0$  να είναι μεσημέρι στο σημείο  $P$ , οπότε το  $\mathbf{r}$  κείται στο επίπεδο που ορίζουν τα  $\mathbf{l}$  και  $\mathbf{i}$  και σχηματίζει γωνία μικρότερη από  $90^\circ$  με το  $-\mathbf{i}$ . Με αναφορά στο Σχήμα 4.1.9, εισάγουμε το μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{m}_0 = -(\sin \alpha)\mathbf{k} - (\cos \alpha)\mathbf{i}$  που είναι ορθογώνιο με το  $\mathbf{l}$ . Έχουμε  $\mathbf{r}_0 = (\cos \lambda)\mathbf{l} + (\sin \lambda)\mathbf{m}_0$ , όπου  $\lambda$  είναι η γωνία που σχηματίζουν τα  $\mathbf{l}$  και  $\mathbf{r}_0$ . Αφού  $\lambda = \pi/2 - \ell$ , όπου  $\ell$  είναι το γεωγραφικό πλάτος του σημείου  $P$ , παίρνουμε την έκφραση  $\mathbf{r}_0 = (\sin \ell)\mathbf{l} + (\cos \ell)\mathbf{m}_0$ . Όπως στο Σχήμα 4.1.4, έστω  $\mathbf{n}_0 = \mathbf{l} \times \mathbf{m}_0$ .

**Παράδειγμα 4.** Αποδείξτε ότι  $\mathbf{n}_0 = \mathbf{l} \times \mathbf{m}_0 = -\mathbf{j}$ .

**Λύση.** Γεωμετρικά, το  $\mathbf{l} \times \mathbf{m}_0$  είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα ορθογώνιο με τα  $\mathbf{l}$  και  $\mathbf{m}_0$  με κατεύθυνση που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Όμως τα  $\mathbf{l}$  και  $\mathbf{m}_0$  ανήκουν αμφότερα στο επίπεδο  $\mathbf{i} - \mathbf{k}$ , άρα το  $\mathbf{l} \times \mathbf{m}_0$  είναι κάθετο σε αυτό και έχει την κατεύθυνση του  $-\mathbf{j}$ . (Βλ. Σχήμα 4.1.9.)

Αλγεβρικά,  $\mathbf{l} = (\cos \alpha)\mathbf{k} - (\sin \alpha)\mathbf{i}$  και  $\mathbf{m}_0 = -(\sin \alpha)\mathbf{k} - (\cos \alpha)\mathbf{i}$ , άρα

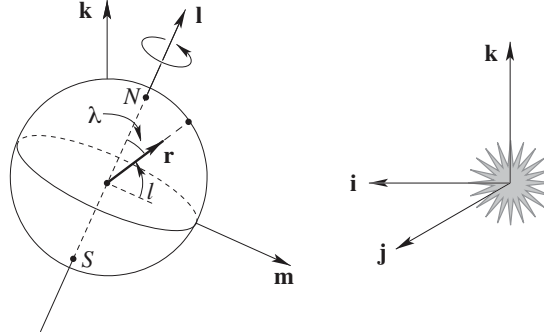
$$\mathbf{l} \times \mathbf{m}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \end{bmatrix} = -\mathbf{j}(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = -\mathbf{j}. \quad \diamond$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (3), παίρνουμε

$$\mathbf{r} = (\cos \lambda)\mathbf{l} + \sin \lambda \cos \left( \frac{2\pi t}{T_d} \right) \mathbf{m}_0 + \sin \lambda \sin \left( \frac{2\pi t}{T_d} \right) \mathbf{n}_0,$$

όπου  $T_d$  είναι ο χρόνος που χρειάζεται η Γη για να περιστραφεί μία φορά γύρω από





ΣΧΗΜΑ 4.1.9. Το διάνυσμα  $\mathbf{r}$  είναι το διάνυσμα που ξεκινάει από το κέντρο της Γης και καταλήγει σε μια σταθερή τοποθεσία  $P$ . Το γεωγραφικό πλάτος του  $P$  είναι  $l$ , ενώ η συμπληρωματική γωνία του γεωγραφικού πλάτους είναι  $\lambda = 90^\circ - l$ . Το διάνυσμα  $\mathbf{m}_0$  είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα στο επίπεδο του ισημερινού (ορθογώνιο με το  $\mathbf{l}$ ) και στο επίπεδο που ορίζουν τα  $\mathbf{l}$  και  $\mathbf{r}_0$ .

τον άξονά της (σε σχέση με τα «σταθερά άστρα» — δηλαδή τα διανύσματα  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  και  $\mathbf{k}$ ).<sup>6</sup> Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις που υπολογίσαμε παραπάνω για τα  $\lambda$ ,  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}_0$  και  $\mathbf{n}_0$ , παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = & \sin \ell (\cos \alpha \mathbf{k} - \sin \alpha \mathbf{i}) \\ & + \cos \ell \cos \left( \frac{2\pi t}{T_d} \right) (-\sin \alpha \mathbf{k} - \cos \alpha \mathbf{i}) - \cos \ell \sin \left( \frac{2\pi t}{T_d} \right) \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = & - \left[ \sin \ell \sin \alpha + \cos \ell \cos \alpha \cos \left( \frac{2\pi t}{T_d} \right) \right] \mathbf{i} - \cos \ell \sin \left( \frac{2\pi t}{T_d} \right) \mathbf{j} \\ & + \left[ \sin \ell \cos \alpha - \cos \ell \sin \alpha \cos \left( \frac{2\pi t}{T_d} \right) \right] \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (4)$$

**Παράδειγμα 5.** Ποια είναι η ταχύτητα (σε χιλιόμετρα την ώρα) ενός σημείου του ισημερινού λόγω της περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της; Ενός σημείου με γεωγραφικό πλάτος  $60^\circ$ ; (Η ακτίνα της Γης είναι 6.371 χιλιόμετρα.)

**Λύση.** Η ταχύτητα είναι

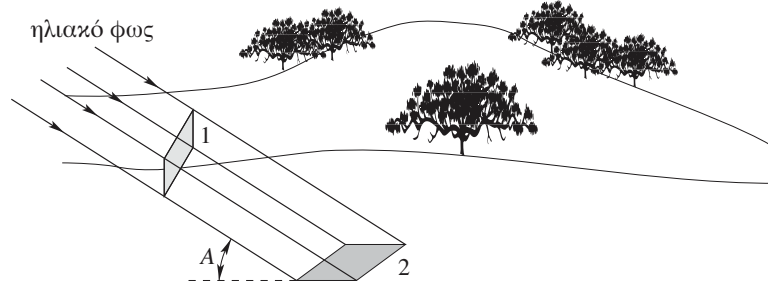
$$s = (2\pi R/T_d) \sin \lambda = (2\pi R/T_d) \cos \ell,$$

όπου  $R$  είναι η ακτίνα της Γης και  $\ell$  το γεωγραφικό πλάτος. (Ο παράγοντας  $R$  εισάγεται διότι το  $\mathbf{r}$  είναι μοναδιαίο διάνυσμα· το πραγματικό διάνυσμα από το κέντρο της Γης μέχρι ένα σημείο  $P$  της επιφάνειάς της είναι  $R\mathbf{r}$ ).

<sup>6</sup>Το  $T_d$  καλείται διάρκεια της αστρικής ημέρας. Διαφέρει από την κανονική, ή ηλιακή, ημέρα κατά περίπου 1 προς 365 λόγω της περιστροφής της Γης γύρω από τον Ήλιο. Για την ακρίβεια,  $T_d \approx 23,93$  ώρες.

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι  $T_d = 23,93$  ώρες και  $R = 6.371$  χιλιόμετρα, παίρνουμε  $s = 1.673 \cos \ell$  χιλιόμετρα την ώρα. Στον ισημερινό  $\ell = 0$ , οπότε η ταχύτητα είναι 1.673 χιλιόμετρα την ώρα. Για  $\ell = 60^\circ$ ,  $s = 836,4$  χιλιόμετρα την ώρα.  $\diamond$

Έχοντας στη διάθεσή μας τη σχέση (3), είμαστε έτοιμοι να υπολογίσουμε τον τύπο της ηλιοφάνειας. Η ένταση του φωτός σε ένα τμήμα της επιφάνειας της Γης (ή στην κορυφή της ατμόσφαιρας) είναι ανάλογη του  $\sin A$ , όπου  $A$  είναι η γωνία ανύψωσης του Ηλίου πάνω από τον ορίζοντα (βλ. Σχήμα 4.1.10). (Τη νύχτα το  $\sin A$  είναι αρνητικό, οπότε η ένταση του φωτός είναι ασφαλώς μηδέν.)



ΣΧΗΜΑ 4.1.10. Η ένταση της ηλιοφάνειας είναι ανάλογη του  $\sin A$ . Ο λόγος της επιφάνειας 1 προς την επιφάνεια 2 είναι  $\sin A$ .

Άρα θέλουμε να υπολογίσουμε το  $\sin A$ . Από το Σχήμα 4.1.11 βλέπουμε ότι  $\sin A = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}$ . Αντικαθιστώντας σε αυτή την έκφραση για το  $\sin A$  το  $\mathbf{u} = \cos(2\pi t/T_y)\mathbf{i} + \sin(2\pi t/T_y)\mathbf{j}$  και τη σχέση (3) και υπολογίζοντας το εσωτερικό γινόμενο, έχουμε

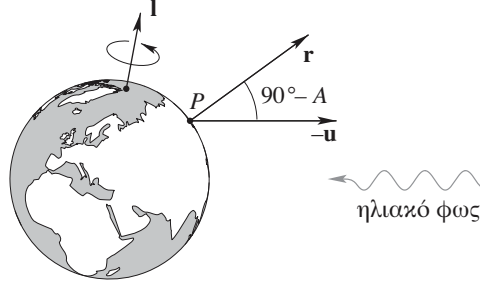
$$\begin{aligned} \sin A &= \cos\left(\frac{2\pi t}{T_y}\right) \left[ \sin \ell \sin \alpha + \cos \ell \cos \alpha \cos\left(\frac{2\pi t}{T_d}\right) \right] \\ &\quad + \sin\left(\frac{2\pi t}{T_y}\right) \left[ \cos \ell \sin\left(\frac{2\pi t}{T_d}\right) \right] \\ &= \cos\left(\frac{2\pi t}{T_y}\right) \sin \ell \sin \alpha + \cos \ell \left[ \cos\left(\frac{2\pi t}{T_y}\right) \cos \alpha \cos\left(\frac{2\pi t}{T_d}\right) \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(\frac{2\pi t}{T_y}\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{T_d}\right) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

**Παράδειγμα 6.** Αν θέσουμε  $t = 0$  στη σχέση (4), για ποιο  $\ell$  έχουμε  $\sin A = 0$ ; Πώς ερμηνεύεται το αποτέλεσμα;

**Λύση.** Για  $t = 0$  παίρνουμε

$$\sin A = \sin \ell \sin \alpha + \cos \ell \cos \alpha = \cos(\ell - \alpha).$$

Αυτό μηδενίζεται όταν  $\ell - \alpha = \pm\pi/2$ . Έχουμε  $\sin A = 0$  όταν ο Ήλιος βρίσκεται στον ορίζοντα (ανατολή ή δύση ηλίου), όταν δηλαδή  $A = 0$  ή  $\pi$ . Άρα, για  $t = 0$ , αυτό



ΣΧΗΜΑ 4.1.11. Η γεωμετρία του τύπου  $\sin A = \cos(90^\circ - A) = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}$ .

συμβαίνει όταν  $\ell = \alpha \pm (\pi/2)$ . Η περίπτωση  $\alpha + (\pi/2)$  είναι αδύνατη, αφού το  $\ell$  βρίσκεται ανάμεσα στο  $-\pi/2$  και το  $\pi/2$ . Η περίπτωση  $\ell = \alpha - (\pi/2)$  αντιστοιχεί σε ένα σημείο πάνω στον Αρκτικό Κύκλο· πράγματι για  $t = 0$  (που αντιστοιχεί στο μεσημέρι την πρώτη ημέρα του καλοκαιριού στο βόρειο ημισφαίριο) ο Ήλιος βρίσκεται ακριβώς στον ορίζοντα στον Αρκτικό Κύκλο.  $\diamond$

Επόμενος στόχος μας είναι να περιγράψουμε τη μεταβολή του  $\sin A$  με τον χρόνο μέσα σε μια συγκεκριμένη ημέρα. Η χρονική μεταβλητή  $t$  δεν βολεύει ιδιαίτερα για αυτό· είναι καλύτερα να μετράμε τον χρόνο από το μεσημέρι της ημέρας που μας ενδιαφέρει. Για να απλουστεύσουμε τους υπολογισμούς μας θα υποθέσουμε ότι οι εκφράσεις  $\cos(2\pi t/T_y)$  και  $\sin(2\pi t/T_y)$  είναι σταθερές κατά τη διάρκεια μιας συγκεκριμένης ημέρας· αφού το  $T_y$  είναι περίπου 365 φορές μεγαλύτερο από τη μεταβολή του  $t$ , η προσέγγιση αυτή είναι εύλογη. Την  $n$ -οστή ημέρα (με αφετηρία την 21η Ιουνίου), μπορούμε να αντικαταστήσουμε το  $2\pi t/T_y$  με το  $2\pi n/365$ , οπότε από τη σχέση (4) παίρνουμε

$$\sin A = (\sin \ell)P + (\cos \ell) \left[ Q \cos \left( \frac{2\pi t}{T_d} \right) + R \sin \left( \frac{2\pi t}{T_d} \right) \right],$$

όπου

$$P = \cos(2\pi n/365) \sin \alpha, \quad Q = \cos(2\pi n/365) \cos \alpha \quad \text{και} \quad R = \sin(2\pi n/365) \cos \alpha.$$

Θα γράψουμε την έκφραση  $Q \cos(2\pi t/T_d) + R \sin(2\pi t/T_d)$  στη μορφή  $U \cos[2\pi(t - t_n)/T_d]$ , όπου  $t_n$  είναι η χρονική στιγμή που αντιστοιχεί στο μεσημέρι της  $n$ -οστής ημέρας. Για να βρούμε το  $U$  χρησιμοποιούμε τον τύπο της πρόσθεσης για να αναπτύξουμε το συνημίτονο:

$$\begin{aligned} & U \cos \left[ \left( \frac{2\pi t}{T_d} \right) - \left( \frac{2\pi t_n}{T_d} \right) \right] \\ &= U \left[ \cos \left( \frac{2\pi t}{T_d} \right) \cos \left( \frac{2\pi t_n}{T_d} \right) + \sin \left( \frac{2\pi t}{T_d} \right) \sin \left( \frac{2\pi t_n}{T_d} \right) \right]. \end{aligned}$$

Εξισώνοντας το παραπάνω με  $Q \cos(2\pi t/T_d) + R \sin(2\pi t/T_d)$  και συγκρίνοντας τους συντελεστές των  $\cos 2\pi t/T_d$  και  $\sin 2\pi t/T_d$ , παίρνουμε

$$U \cos \frac{2\pi t_n}{T_d} = Q \quad \text{και} \quad U \sin \frac{2\pi t_n}{T_d} = R.$$

Παίρνοντας το τετράγωνο των δύο εξισώσεων και προσθέτοντας, έχουμε<sup>7</sup>

$$U^2 = Q^2 + R^2 \quad \text{ή} \quad U = \sqrt{Q^2 + R^2},$$

ενώ διαιρώντας τη δεύτερη εξίσωση με την πρώτη παίρνουμε  $\tan(2\pi t_n/T_d) = R/Q$ . Μας ενδιαφέρει κυρίως ο τύπος που δίνει το  $U$ . Αντικαθιστώντας τα  $Q$  και  $R$ , παίρνουμε

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{\cos^2 \left( \frac{2\pi n}{365} \right) \cos^2 \alpha + \sin^2 \frac{2\pi n}{365}} \\ &= \sqrt{\cos^2 \left( \frac{2\pi n}{365} \right) (1 - \sin^2 \alpha) + \sin^2 \frac{2\pi n}{365}} \\ &= \sqrt{1 - \cos^2 \left( \frac{2\pi n}{365} \right) \sin^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Έστω  $\tau$  ο χρόνος σε ώρες που έχει παρέλθει από το μεσημέρι της  $n$ -οστής ημέρας, δηλαδή  $\tau/24 = (t - t_n)/T_d$ . Αντικαθιστώντας στη σχέση (5), παίρνουμε τον τελικό τύπο:

$$\begin{aligned} \sin A &= \sin \ell \cos \left( \frac{2\pi n}{365} \right) \sin \alpha \\ &\quad + \cos \ell \sqrt{1 - \cos^2 \left( \frac{2\pi n}{365} \right) \sin^2 \alpha} \cos \frac{2\pi \tau}{24}. \end{aligned} \quad (6)$$

**Παράδειγμα 7.** Σε ποιο ύψος βρίσκεται ο Ήλιος στον ουρανό του Εδιμβούργου (γεωγραφικό πλάτος  $56^\circ$ ) στις 2 μ.μ. την 1η Φεβρουαρίου;

**Λύση.** Αντικαθιστώντας στη σχέση (6):  $\alpha = 23.5^\circ$ ,  $\ell = 90^\circ - 56^\circ = 34^\circ$ ,  $n =$  πλήθος ημερών μετά την 21η Ιουνίου  $= 225$  και  $\tau = 2$  ώρες, παίρνουμε  $\sin A = 0,5196$ , άρα  $A = 31,3^\circ$ .  $\diamond$

Η σχέση (4) μάς λέει επίσης πόσο διαρκούν οι μέρες.<sup>8</sup> Τη χρονική στιγμή  $S$  της δύσης του Ηλίου,  $A = 0$ . Επομένως

$$\cos \left( \frac{2\pi S}{24} \right) = -\tan \ell \frac{\sin \alpha \cos(2\pi T/365)}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha(2\pi T/365)}}.$$

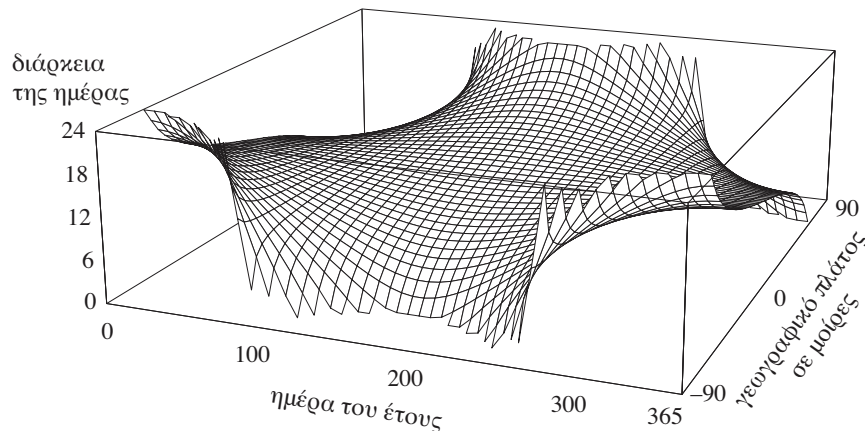
<sup>7</sup> Παίρνουμε τη θετική τετραγωνική ρίζα διότι το  $\sin A$  πρέπει να έχει τοπικό μέγιστο όταν  $t = t_n$ .

<sup>8</sup> Αν  $\pi/2 - \alpha < |\ell| < \pi/2$  (εντός των πολικών κύκλων), θα υπάρχουν κάποιες τιμές του  $t$  για τις οποίες το δεξί μέλος της σχέσης (1) δεν ανήκει στο διάστημα  $[-1, 1]$ . Τις ημέρες που αντιστοιχούν σε αυτές τις τιμές του  $t$  ο Ήλιος δεν δύει ποτέ («Ήλιος του μεσονυχτίου»). Αν  $\ell = \pm\pi/2$ , τότε  $\tan \ell = \infty$  και το δεξί μέλος στερείται νοήματος. Αυτό αποτυπώνει το γεγονός ότι, στους πόλους, έχει είτε φως όλη την ημέρα είτε σκοτάδι όλη την ημέρα, ανάλογα με την εποχή.

Λύνοντας ως προς  $S$  και λαμβάνοντας υπόψη ότι  $S \geq 0$  αφού η δύση του Ηλίου συμβαίνει μετά το μεσημέρι, παίρνουμε

$$S = \frac{12}{\pi} \cos^{-1} \left[ -\tan \ell \frac{\sin \alpha \cos(2\pi T/365)}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2(2\pi T/365)}} \right].$$

Το γράφημα της  $S$  παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.1.12.



ΣΧΗΜΑ 4.1.12. Διάρκεια της ημέρας συναρτήσει του γεωγραφικού πλάτους και της ημέρας του χρόνου.

## Ασκήσεις

- Εστω  $\mathbf{l} = (\mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{2}$  και  $\mathbf{r}_0 = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$ .
  - Βρείτε τα  $\mathbf{m}_0$  και  $\mathbf{n}_0$ .
  - Βρείτε το  $\mathbf{r} = \mathbf{c}(t)$  αν  $T = 24$ .
  - Βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στην  $\mathbf{c}(t)$  για  $t = 12$  και  $T = 24$ .
- Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3), επαληθεύστε ότι  $\mathbf{c}(T/2) \cdot \mathbf{n} = 0$ . Δείξτε το και γεωμετρικά. Για ποιες τιμές του  $t$  έχουμε  $\mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{n} = 0$ ;
- Αν η Γη περιστρεφόταν κατά την αντίθετη φορά γύρω από τον Ήλιο, το  $T_d$  θα ήταν μεγαλύτερο ή μικρότερο από 24 ώρες; (Θεωρήστε ότι η ηλιακή ημέρα είναι σταθερή και ίση με 24 ώρες.)
- Δείξτε με γεωμετρικό τρόπο ότι

$$\mathbf{r} = \mathbf{c}(T_d/4) = -(\sin \ell \sin \alpha)\mathbf{i} - (\cos \ell)\mathbf{j} + (\sin \ell \cos \alpha)\mathbf{k}.$$

Συμφωνεί αυτό με τη σχέση (3);

5. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4), βρείτε έναν «ακριβή» τύπο για τον χρόνο της δύσης του Ηλίου.
6. Γιατί η σχέση (6) που δίνει το  $\sin A$  δεν εξαρτάται από την ακτίνα της Γης; Από την απόσταση της Γης από τον Ήλιο;
7. Σε ποιο ύψος βρίσκεται ο Ήλιος στον ουρανό του Παρισιού στις 3 μ.μ. στις 15 Ιανουαρίου; (Το γεωγραφικό πλάτος του Παρισιού είναι  $49^\circ$  N.)
8. Πόση ηλιακή ενέργεια (σε σχέση με μια καλοκαιρινή μέρα στον ισημερινό) δέχεται το Παρίσι στις 15 Ιανουαρίου; (Το γεωγραφικό πλάτος του Παρισιού είναι  $49^\circ$  N.)
9. Πώς θα άλλαζε η απάντηση που δώσατε στην Άσκηση 8 αν η Γη είχε κλίση  $32^\circ$  αντί  $23.5^\circ$ ;

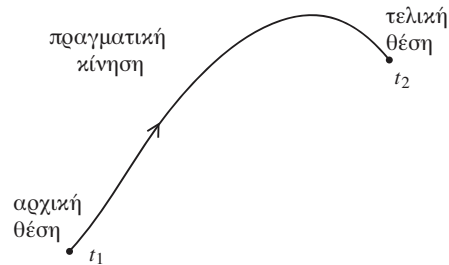
## Συμπλήρωμα 4.1Γ

### Η αρχή της ελάχιστης δράσης

Του Richard Feynman<sup>9</sup>

Όταν πήγαινα στο λύκειο, ο καθηγητής της φυσικής —ο οποίος ονομαζόταν κύριος Bader— με φώναξε μια μέρα μετά το μάθημα της φυσικής και μου είπε: «Μου φαίνεται πως βαριέσαι. Θέλω να σου πω κάτι ενδιαφέρον.» Και μου είπε κάτι που μου φάνηκε εξαιρετικά συναρπαστικό και το οποίο μου φαίνεται έκτοτε πάντα συναρπαστικό. Κάθε φορά που εμφανίζεται το θέμα, το δουλεύω. Μάλιστα, όταν ξεκίνησα να προετοιμάζω αυτή τη διάλεξη, συνέλαβα τον εαυτό μου να κάνει περαιτέρω αναλύσεις επ' αυτού. Αντί να ανησυχώ για τη διάλεξη, άρχισα να μελετώ ένα καινούργιο πρόβλημα. Το θέμα είναι το εξής — η αρχή της ελάχιστης δράσης.

Ο κύριος Bader μού είπε το εξής: Φαντάσου πως έχεις ένα σωματίδιο (σε ένα βαρυτικό πεδίο, για παράδειγμα) που ξεκινάει από κάπου και κινούμενο ελεύθερα καταλήγει σε κάποιο άλλο σημείο — το πετάς, ανεβαίνει προς τα πάνω και μετά πέφτει (βλ. Σχήμα 4.1.13).



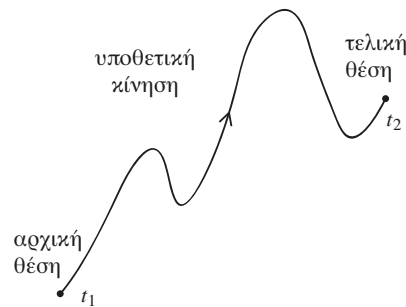
ΣΧΗΜΑ 4.1.13.

Πηγαίνει από την αρχική στην τελική του θέση σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Δοκίμασε τώρα μια διαφορετική κίνηση. Φαντάσου ότι για να πάει από την αρχική στην τελική του θέση πήγε κάπως έτσι (βλ. Σχήμα 4.1.14), αλλά χρειάστηκε ακριβώς τον ίδιο χρόνο. Και ύστερα μου είπε το εξής: «Αν υπολογίσεις την κινητική ενέργεια κάθε στιγμή της διαδρομής, αφαιρέσεις τη δυναμική ενέργεια και ολοκληρώσεις ως προς τον χρόνο εφ' όλης της διαδρομής, θα διαπιστώσεις ότι ο αριθμός που θα πάρεις θα είναι μεγαλύτερος από αυτόν που αντιστοιχεί στην πραγματική κίνηση.»

Με άλλα λόγια, οι νόμοι του Νεύτωνα θα μπορούσαν να διατυπωθούν όχι με τη μορφή  $F = ma$ , αλλά ως εξής: Η διαφορά της μέσης κινητικής ενέργειας μείον τη μέση δυναμική ενέργεια είναι η ελάχιστη δυνατή για τη διαδρομή ενός αντικειμένου που πηγαίνει από ένα σημείο σε ένα άλλο.

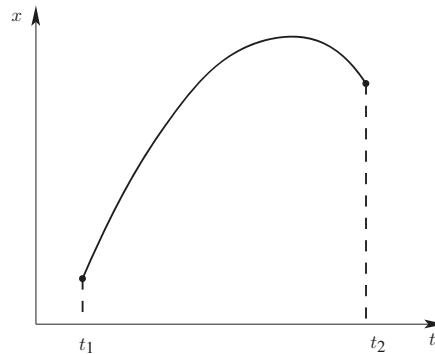
Θα εξηγήσω καλύτερα τι σημαίνει αυτό. Αν πάρουμε την περίπτωση του βαρυτικού πεδίου, τότε αν το σωματίδιο ακολουθήσει τη διαδρομή  $x(t)$  (ας θεωρήσουμε προς το παρόν τη μια διάσταση· παίρνουμε μια πορεία που πηγαίνει προς τα πάνω και και

<sup>9</sup>Διάλεξη 19, από τις *Διαλέξεις φυσικής του Feynman*.



ΣΧΗΜΑ 4.1.14.

προς τα κάτω χωρίς πλάγιες παρεκκλίσεις), όπου  $x$  είναι το ύψος πάνω από το έδαφος, η κινητική ενέργεια είναι  $\frac{1}{2}m(dx/dt)^2$  ενώ η δυναμική ενέργεια οποιαδήποτε χρονική στιγμή είναι  $mgx$ . Στη συνέχεια παίρνουμε την κινητική ενέργεια μείον τη δυναμική ενέργεια κάθε χρονική στιγμή κατά μήκος της διαδρομής και ολοκληρώνουμε ως προς τον χρόνο από την αρχική ως την τελική χρονική στιγμή. Ας υποθέσουμε ότι την αρχική χρονική στιγμή  $t_1$  ξεκινήσαμε από κάποιο ύψος και την τελική χρονική στιγμή  $t_2$  καταλήξαμε σε κάποιο άλλο μέρος (βλ. Σχήμα 4.1.15).



ΣΧΗΜΑ 4.1.15.

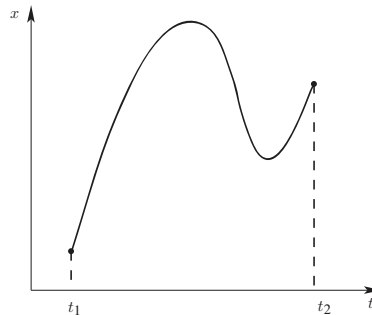
Το ολοκλήρωμα είναι

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{1}{2}m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - mgx \right] dt.$$

Η πραγματική κίνηση είναι κάποιο είδος καμπύλης —είναι παραβολή αν τη σχεδιάσουμε συναρτήσει του χρόνου— και δίνει στο ολοκλήρωμα κάποια συγκεκριμένη τιμή. Θα μπορούσαμε όμως να φανταστούμε κάποια άλλη κίνηση, που έφτασε πολύ ψηλά και ανεβοκατέβηκε με περίεργο τρόπο (βλ. Σχήμα 4.1.16).

Μπορούμε να υπολογίσουμε τη διαφορά της κινητικής ενέργειας μείον τη δυναμική ενέργεια και να ολοκληρώσουμε για μια τέτοια διαδρομή ... ή για οποιαδήποτε άλλη





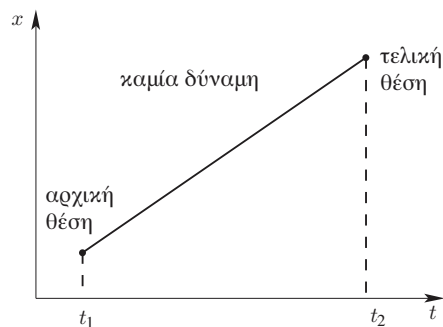
ΣΧΗΜΑ 4.1.16.

διαδρομή θέλουμε. Το θαύμα είναι ότι η πραγματική διαδρομή είναι αυτή για την οποία η τιμή του ολοκληρώματος είναι η ελάχιστη.

Ας το δοκιμάσουμε. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι παίρνουμε την περίπτωση ενός ελεύθερου σωματιδίου το οποίο δεν έχει καθόλου δυναμική ενέργεια. Τότε ο κανόνας λέει ότι για να μεταβεί το σωματίδιο από το ένα σημείο στο άλλο σε δεδομένο χρόνο, το ολοκλήρωμα της κινητικής ενέργειας είναι ελάχιστο, άρα πρέπει να κινηθεί με ομοιόμορφη ταχύτητα. (Γνωρίζουμε ότι αυτή είναι η σωστή απάντηση — η κίνηση με ομοιόμορφη ταχύτητα.) Γιατί συμβαίνει αυτό; Διότι αν το σωματίδιο ακολουθούσε οποιαδήποτε άλλη διαδρομή, η ταχύτητα θα ήταν άλλοτε μεγαλύτερη και άλλοτε μικρότερη από τη μέση. Η μέση ταχύτητα είναι ίδια για όλες τις περιπτώσεις διότι το σωματίδιο πρέπει να μεταβεί από την αρχική στην τελική θέση σε δεδομένο χρονικό διάστημα.

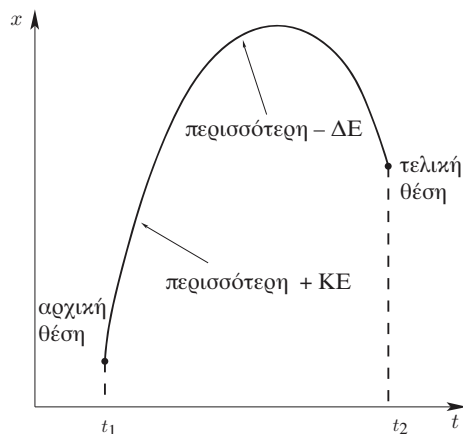
Σαν παράδειγμα, ας πούμε ότι πρέπει να ξεκινήσετε από το σπίτι σας και να πάτε στο σχολείο σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα με το αυτοκίνητο. Μπορείτε να το κάνετε με διάφορους τρόπους. Μπορείτε να επιταχύνετε σαν τρελοί στην αρχή και να επιβραδύνετε φρενάροντας καθώς πλησιάζετε στο τέλος της διαδρομής, ή μπορείτε να κινηθείτε με ομοιόμορφη ταχύτητα, ή μπορείτε να πάτε για λίγο προς τα πίσω και κατόπιν προς τα εμπρός, κ.ο.κ. Η ουσία είναι ότι η μέση ταχύτητα πρέπει να είναι, ασφαλώς, το ημίγειο της συνολικής απόστασης που διανύσατε δια τον χρόνο. Αν κάνετε όμως οτιδήποτε άλλο από το να κινηθείτε με ομοιόμορφη ταχύτητα, κάποιες φορές θα πηγαίνετε πάρα πολύ γρήγορα και κάποιες φορές θα πηγαίνετε πάρα πολύ αργά. Όμως το μέσο τετράγωνο μιας ποσότητας που αποκλίνει γύρω από κάποιο μέσο όρο είναι, όπως γνωρίζουμε, πάντα μεγαλύτερο από το τετράγωνο του μέσου όρου, οπότε το ολοκλήρωμα της κινητικής ενέργειας θα ήταν πάντα μεγαλύτερο αν αυξομειώνατε ταχύτητα από ό,τι αν πηγαίνατε με ομοιόμορφη ταχύτητα. Διαπιστώνουμε επομένως ότι το ολοκλήρωμα είναι ελάχιστο αν η ταχύτητα είναι σταθερή (όταν δεν ασκούνται δυνάμεις). Η σωστή διαδρομή είναι αυτή του Σχήματος 4.1.17.

Όταν πετάμε ένα αντικείμενο προς τα πάνω σε ένα βαρυτικό πεδίο, αρχικά ανεβαίνει ταχύτερα και κατόπιν επιβραδύνει. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι υπάρχει και η δυναμική ενέργεια, και πρέπει να έχουμε την ελάχιστη διαφορά κινητικής μείον δυναμικής ενέργειας κατά μέσο όρο. Επειδή η δυναμική ενέργεια αυξάνεται όταν ανεβαίνουμε, θα πάρουμε μικρότερη διαφορά αν μπορούσαμε να κινηθούμε έτσι ώστε να



ΣΧΗΜΑ 4.1.17.

φτάσουμε το συντομότερο δυνατό στην περιοχή όπου η δυναμική ενέργεια είναι υψηλή. Έτσι, αφαιρώντας τη δυναμική ενέργεια από την κινητική ενέργεια θα πάρουμε χαμηλότερο μέσο όρο. Άρα είναι καλύτερο να ακολουθήσουμε μια διαδρομή που ανεβαίνει και δέχεται μεγάλες αρνητικές ποσότητες από τη δυναμική ενέργεια (Σχήμα 4.1.18).



ΣΧΗΜΑ 4.1.18.

Από την άλλη πλευρά, δεν μπορούμε να ανέβουμε υπερβολικά γρήγορα, ή να πάμε υπερβολικά μακριά, αφού έτσι θα αποκτούσαμε υπερβολικά υψηλή κινητική ενέργεια — πρέπει να πάμε πολύ γρήγορα ώστε να ανέβουμε και να κατέβουμε στο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα που διαθέτουμε. Άρα δεν θέλουμε να ανέβουμε πάρα πολύ, παρά μέχρι ενός σημείου. Επομένως η λύση είναι κάποιου είδους ισορροπία: να προσπαθήσουμε να αποκτήσουμε περισσότερη δυναμική ενέργεια με την ελάχιστη ποσότητα επιπρόσθετης κινητικής ενέργειας — να προσπαθήσουμε να κάνουμε τη διαφορά, κινητική μείον δυναμική ενέργεια, όσο το δυνατόν μικρότερη.

Αυτά μου είπε ο καθηγητής μου, καθώς ήταν πολύ καλός δάσκαλος και ήξερε πότε έπρεπε να σταματάει να μιλάει. Εγώ όμως δεν ξέρω πότε πρέπει να σταματάω να μι-

λάω. Έτσι, αντί να το αφήσω σαν μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση, θα προκαλέσω τον τρόμο και την απέχθειά σας προς την πολυπλοκότητα της ζωής, αποδεικνύοντας πως έτσι έχουν τα πράγματα. Το είδος του μαθηματικού προβλήματος που έχουμε να αντιμετωπίσουμε είναι πολύ δύσκολο και καινούργιο. Έχουμε μια ορισμένη ποσότητα  $S$ , η οποία καλείται *δράση*. Είναι το ολοκλήρωμα της κινητικής ενέργειας μείον τη δυναμική ενέργεια ως προς το χρόνο.

$$\Delta\rho\acute{\alpha}\sigma\eta = S = \int_{t_1}^{t_2} (KE - \Delta E) dt.$$

Υπενθυμίζω ότι τα  $KE$  και  $\Delta E$  είναι αμότερα συναρτήσεις του χρόνου. Κάθε δυνατή διαφορετική διαδρομή μάς δίνει διαφορετικό αριθμό για αυτή τη δράση. Το μαθηματικό μας πρόβλημα είναι να βρούμε ποια καμπύλη μας δίνει τον ελάχιστο αριθμό.

Θα πείτε — Μα πρόκειται για τον συνήθη λογισμό των μεγίστων και ελαχίστων. Υπολογίζουμε τη δράση και παραγωγίζουμε για να βρούμε το ελάχιστο.

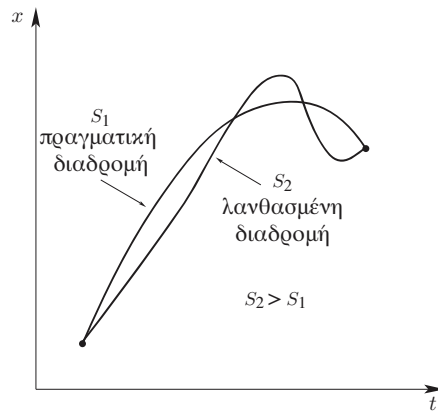
Προσέξτε όμως. Συνήθως έχουμε απλώς μια συνάρτηση κάποιας μεταβλητής και πρέπει να βρούμε την τιμή αυτής της *μεταβλητής* για την οποία η συνάρτηση παίρνει τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή της. Για παράδειγμα, έχουμε μια ράβδο που έχει θερμανθεί στο μέσο της και η θερμότητα διαχέεται προς τα άκρα. Για κάθε σημείο της ράβδου έχουμε μια θερμοκρασία, και πρέπει να βρούμε το σημείο όπου έχουμε τη μεγαλύτερη θερμοκρασία. Στην περίπτωση μας όμως, *για κάθε διαδρομή στον χώρο* έχουμε έναν διαφορετικό αριθμό —αρκετά διαφορετικό πράγμα— και πρέπει να βρούμε *τη διαδρομή στον χώρο* για την οποία αυτός ο αριθμός είναι ελάχιστος. Πρόκειται για έναν εντελώς διαφορετικό κλάδο των μαθηματικών. Δεν πρόκειται για τον συνήθη απειροστικό λογισμό, αλλά για τον λεγόμενο *λογισμό μεταβολών*.

Τα προβλήματα με τα οποία ασχολείται αυτός ο κλάδος των μαθηματικών είναι πολλά. Για παράδειγμα, ο κύκλος ορίζεται συνήθως ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που απέχουν σταθερή απόσταση από ένα δεδομένο σημείο, αλλά ένας άλλος τρόπος να ορίσουμε έναν κύκλο είναι ο εξής: ένας κύκλος είναι η καμπύλη *δεδομένου μήκους* που περικλείει το μέγιστο εμβαδόν. Για δεδομένη περίμετρο, κάθε άλλη καμπύλη περικλείει μικρότερο εμβαδόν από ό,τι ο κύκλος. Άρα αν μας δινόταν ως πρόβλημα η εύρεση της καμπύλης που περικλείει το μεγαλύτερο εμβαδόν για δεδομένη περίμετρο, θα είχαμε ένα πρόβλημα λογισμού μεταβολών —ενός διαφορετικού είδους λογισμού από αυτό που έχετε συνηθίσει.

Οπότε θα υπολογίσουμε τη διαδρομή του αντικειμένου. Να πώς θα το κάνουμε. Η ιδέα είναι να φανταστούμε πως υπάρχει μια πραγματική διαδρομή και πως οποιαδήποτε άλλη διαδρομή σχεδιάσουμε είναι λανθασμένη διαδρομή, έτσι ώστε αν υπολογίσουμε τη δράση για μια λανθασμένη διαδρομή να πάρουμε τιμή μεγαλύτερη από αυτή που θα πάρουμε αν υπολογίσουμε τη δράση για την πραγματική διαδρομή (Σχήμα 4.1.19).

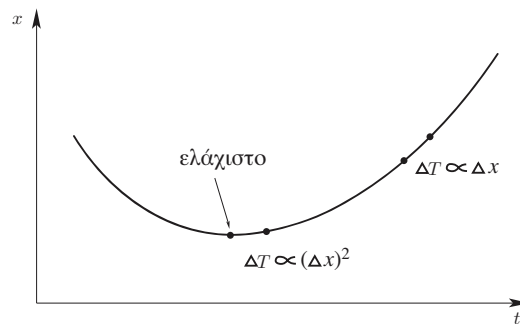
Πρόβλημα: Βρείτε την πραγματική διαδρομή. Πού είναι; Ένας τρόπος είναι, ασφαλώς, να υπολογίσουμε τη δράση για πολλά εκατομμύρια διαδρομές και να δούμε ποια μας δίνει τη μικρότερη. Όταν βρούμε τη μικρότερη, θα έχουμε βρει την πραγματική διαδρομή.

Αυτός είναι ένας πιθανός τρόπος. Μπορούμε όμως να κάνουμε κάτι καλύτερο. Όταν έχουμε μια ποσότητα που λαμβάνει μια ελάχιστη τιμή —για παράδειγμα, μια συνήθη συνάρτηση σαν τη θερμοκρασία— μία από τις ιδιότητες του ελαχίστου είναι ότι αν



ΣΧΗΜΑ 4.1.19.

απομακρυνθούμε από το ελάχιστο κατά την *πρώτη* τάξη, η τιμή της συνάρτησης αποκλίνει από την ελάχιστη τιμή της μόνο κατά τη *δεύτερη* τάξη. Σε οποιοδήποτε άλλο σημείο της καμπύλης, αν μετακινηθούμε κατά μικρή απόσταση, η τιμή της συνάρτησης μεταβάλλεται και κατά την *πρώτη* τάξη. Όταν βρισκόμαστε σε ένα ελάχιστο όμως και απομακρυνθούμε ελάχιστα από αυτό δεν υπάρχει καμία διαφορά στην προσέγγιση πρώτης τάξης (Σχήμα 4.1.20).



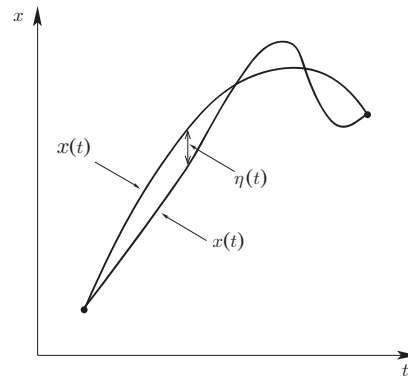
ΣΧΗΜΑ 4.1.20.

Αυτόν τον τρόπο θα ακολουθήσουμε για να υπολογίσουμε την πραγματική διαδρομή. Αν έχουμε την πραγματική διαδρομή και κινηθούμε σε μια καμπύλη που διαφέρει ελάχιστα από αυτή, στην προσέγγιση πρώτης τάξης δεν θα υπάρξει διαφορά στην τιμή της δράσης. Η όποια διαφορά θα φανεί στη προσέγγιση δεύτερης τάξης, αν έχουμε πράγματι ελάχιστο.

Αυτό αποδεικνύεται εύκολα. Αν υπάρχει μεταβολή στην προσέγγιση πρώτης τάξης όταν αποκλίνουμε από την καμπύλη κατά ορισμένο τρόπο, τότε έχουμε μεταβολή της δράσης που είναι *ανάλογη* της απόκλισης. Η μεταβολή θα πρέπει να κάνει τη δράση μεγαλύτερη, διαφορετικά δεν έχουμε ελάχιστο. Αν όμως η μεταβολή είναι *ανάλογη* της

απόκλισης, τότε αν αλλάξουμε το πρόσημο της απόκλισης η δράση θα γίνει μικρότερη. Άρα η δράση θα αυξάνεται προς τη μία πλευρά και θα μειώνεται προς την άλλη. Ο μόνος τρόπος να είναι αυτό ελάχιστο είναι να μην υπάρχει διαφορά στην προσέγγιση πρώτης τάξης, και οι μεταβολές να είναι ανάλογες του τετραγώνου των αποκλίσεων από την πραγματική διαδρομή.

Επομένως εργαζόμαστε ως εξής: Καλούμε  $x(t)$  (υπογραμμισμένο) την πραγματική διαδρομή — αυτή που προσπαθούμε να βρούμε. Παίρνουμε μια δοκιμαστική διαδρομή  $\underline{x}(t)$  που διαφέρει από την πραγματική διαδρομή κατά μικρή ποσότητα την οποία καλούμε  $\eta(t)$ . (Βλ. Σχήμα 4.1.21).



ΣΧΗΜΑ 4.1.21.

Η ιδέα είναι ότι αν υπολογίσουμε τη δράση  $S$  για τη διαδρομή  $x(t)$ , η διαφορά μεταξύ αυτής της  $S$  και της δράσης που έχουμε υπολογίσει για τη διαδρομή  $\underline{x}(t)$  —για απλότητα θα τη γράφουμε  $\underline{S}$ — η διαφορά μεταξύ  $\underline{S}$  και  $S$  πρέπει να είναι μηδέν στην προσέγγιση πρώτης τάξης για μικρά  $\eta$ . Μπορεί να διαφέρει στην προσέγγιση δεύτερης τάξης, αλλά στην προσέγγιση πρώτης τάξης η διαφορά πρέπει να είναι μηδέν.

Και αυτό πρέπει να ισχύει για όλα τα  $\eta$ . Αλλά όχι ακριβώς. Η μέθοδός μας δεν έχει κανένα νόημα εκτός αν θεωρήσουμε διαδρομές που ξεκινούν και τελειώνουν όλες στα ίδια δύο σημεία — κάθε διαδρομή ξεκινάει από ένα συγκεκριμένο σημείο τη χρονική στιγμή  $t_1$  και τελειώνει σε ένα άλλο συγκεκριμένο σημείο τη χρονική στιγμή  $t_2$ , και αυτά τα σημεία και οι χρονικές στιγμές παραμένουν σταθερά. Άρα οι αποκλίσεις  $\eta$  πρέπει να είναι μηδέν στα δύο άκρα:  $\eta(t_1) = 0$  και  $\eta(t_2) = 0$ . Με αυτή τη συνθήκη, έχουμε ορίσει το μαθηματικό μας πρόβλημα.

Αν δεν γνωρίζαμε απειροστικό λογισμό, θα κάναμε το ίδιο πράγμα για να βρούμε το ελάχιστο μιας συνήθους συνάρτησης  $f(x)$ . Θα μπορούσαμε να εξετάσουμε τι συμβαίνει αν πάρουμε την  $f(x)$  και προσθέσουμε μια μικρή ποσότητα  $h$  στο  $x$  ισχυριζόμενοι ότι η μεταβολή της τιμής της  $f(x)$  στην προσέγγιση πρώτης τάξης ως προς  $h$  πρέπει να είναι μηδέν στο σημείο ελαχίστου. Θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε το  $x$  με  $x + h$  και να υπολογίσουμε το ανάπτυγμα πρώτης τάξης ως προς  $h$ ... ακριβώς όπως πρόκειται να κάνουμε με το  $\eta$ .

Άρα η ιδέα είναι να κάνουμε την αντικατάσταση  $x(t) = \underline{x}(t) + \eta(t)$  στη σχέση που

δίνει τη δράση:

$$S = \int \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right] dt,$$

όπου  $V(x)$  είναι η δυναμική ενέργεια. Η παράγωγος  $dx/dt$  είναι, ασφαλώς, η παράγωγος της  $\underline{x}(t)$  συν την παράγωγο της  $\eta(t)$ , οπότε η δράση δίνεται από την εξής σχέση:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{d\underline{x}}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \right)^2 - V(\underline{x} + \eta) \right] dt.$$

Αυτό πρέπει να το γράψουμε αναλυτικότερα. Για τον όρο που είναι υψωμένος στο τετράγωνο έχουμε

$$\left( \frac{d\underline{x}}{dt} \right)^2 + 2 \frac{d\underline{x}}{dt} \frac{d\eta}{dt} + \left( \frac{d\eta}{dt} \right)^2.$$

Μια στιγμή όμως. Μας απασχολούν οι όροι μεγαλύτερης τάξης από την πρώτη, για αυτό θα πάρουμε όλους τους όρους που περιέχουν το  $\eta^2$  και τις υψηλότερες δυνάμεις του και θα τους βάλουμε μέσα σε ένα κουτάκι το οποίο θα βαφτίσουμε «δεύτερης και μεγαλύτερης τάξης». Από αυτή την έκφραση παίρνουμε μόνο όρους δεύτερης τάξης, αλλά από αλλού θα πάρουμε και άλλους. Άρα το κομμάτι της κινητικής ενέργειας είναι

$$\frac{m}{2} \left( \frac{d\underline{x}}{dt} \right)^2 + m \frac{d\underline{x}}{dt} \frac{d\eta}{dt} + (\text{δεύτερης και μεγαλύτερης τάξης}).$$

Τώρα χρειαζόμαστε το δυναμικό  $V$  στο σημείο  $\underline{x} + \eta$ . Θεωρούμε το  $\eta$  μικρό, οπότε μπορούμε να γράψουμε το  $V(x)$  σαν σειρά Taylor. Ισούται κατά προσέγγιση με  $V(\underline{x})$  στην επόμενη προσέγγιση (με βάση τη φύση των παραγώγων) η διόρθωση της τιμής είναι  $\eta$  φορές τον ρυθμό μεταβολής του  $V$  ως προς  $x$ , κ.ο.κ:

$$V(\underline{x} + \eta) = V(\underline{x}) + \eta V'(\underline{x}) + \frac{\eta^2}{2} V''(\underline{x}) + \dots$$

Για συντομία συμβολίσαμε με  $V'$  την παράγωγο της  $V$  ως προς  $x$ . Ο όρος με το  $\eta^2$  και όσοι ακολουθούν ανήκουν στην κατηγορία «δεύτερης και μεγαλύτερης τάξης» και δεν χρειάζεται να μας απασχολούν. Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, έχουμε

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{d\underline{x}}{dt} \right)^2 - V(\underline{x}) + m \frac{d\underline{x}}{dt} \frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\underline{x}) + (\text{δεύτερης και μεγαλύτερης τάξης}) \right] dt.$$

Αν κοιτάξουμε προσεκτικά, θα διαπιστώσουμε ότι οι δύο πρώτοι όροι, με τη σειρά με την οποία είναι γραμμένοι, αντιστοιχούν στη δράση  $\underline{S}$  που θα υπολογίζαμε για την πραγματική διαδρομή  $\underline{x}$ . Αυτό στο οποίο θέλω να επικεντρωθώ είναι η μεταβολή της  $S$  —η διαφορά μεταξύ  $S$  και  $\underline{S}$  που θα παίρναμε για τη σωστή διαδρομή. Θα συμβολίσουμε αυτή τη διαφορά με  $\delta S$ , η οποία καλείται μεταβολή της  $S$ . Παραλείποντας τους

όρους «δεύτερης και μεγαλύτερης τάξης», έχουμε για την  $\delta S$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ m \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\mathbf{x}) \right] dt.$$

Το πρόβλημα είναι τώρα το εξής: Έχουμε αυτό το ολοκλήρωμα. Δεν ξέρουμε ακόμη ποιο είναι το  $\mathbf{x}$ , αλλά ξέρουμε ότι *όποιο και να είναι το  $\eta$* , το ολοκλήρωμα αυτό πρέπει να ισούται με μηδέν. Ίσως σκεφτείτε ότι ο μόνος τρόπος να συμβαίνει αυτό είναι ό,τι πολλαπλασιάζεται με  $\eta$  να είναι μηδέν. Και τι γίνεται με τον πρώτο όρο που περιέχει το  $d\eta/dt$ ; Αν το  $\eta$  μπορεί να είναι οτιδήποτε, η παράγωγός του μπορεί να είναι επίσης οτιδήποτε, οπότε θα συμπεραίνατε ότι ο συντελεστής του  $d\eta/dt$  πρέπει να είναι και αυτός μηδέν. Αυτό δεν είναι σωστό. Δεν είναι σωστό διότι μεταξύ του  $\eta$  και της παραγώγου του υπάρχει κάποια σχέση· δεν είναι εντελώς ανεξάρτητα, διότι το  $\eta(t)$  πρέπει να είναι μηδέν και στο  $t_1$  και στο  $t_2$ .

Η μέθοδος επίλυσης όλων των προβλημάτων στον λογισμό μεταβολών στηρίζεται πάντα στην ίδια γενική αρχή. Μετατοπίζουμε αυτό που θέλουμε να μεταβάλλουμε (όπως κάναμε προσθέτοντας το  $\eta$ ), εξετάζουμε τους όρους πρώτης τάξης και *κατόπιν* γράφουμε με τέτοιο τρόπο τα πράγματα ώστε να έχουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής «κάποιου είδους πράγμα επί τη μετατόπιση ( $\eta$ )», αλλά χωρίς άλλες παραγώγους (χωρίς  $d\eta/dt$ ). Πρέπει να τα γράψουμε έτσι ώστε να έχουμε πάντα «κάτι» επί  $\eta$ . Θα δείτε αμέσως γιατί είναι πολύ σημαντικό αυτό. (Υπάρχουν κάποιοι τύποι που μας λένε πώς να το κάνουμε σε μερικές περιπτώσεις χωρίς να κάνουμε πράξεις, αλλά δεν είναι αρκετά γενικοί ώστε να αξίζουν τον κόπο· ο καλύτερος τρόπος είναι να κάνουμε τον υπολογισμό με αυτόν τον τρόπο.)

Πώς μπορούμε να γράψουμε τον όρο που περιέχει το  $d\eta/dt$  έτσι ώστε να έχει ένα  $\eta$ ; Μπορούμε να το κάνουμε ολοκληρώνοντας κατά μέρη. Όλο το τέχνασμα του λογισμού μεταβολών συνίσταται τελικά στο να γράψουμε τη μεταβολή του  $S$  και κατόπιν να ολοκληρώσουμε κατά μέρη ώστε να εξαφανιστούν οι παράγωγοι του  $\eta$ . Είναι πάντα το ίδιο σε όλα τα προβλήματα όπου εμφανίζονται παράγωγοι.

Υπενθυμίζω τη γενική αρχή της ολοκλήρωσης κατά μέρη. Αν έχουμε να ολοκληρώσουμε το γινόμενο μιας συνάρτησης  $f$  επί  $d\eta/dt$  ως προς  $t$ , γράφουμε την παράγωγο του  $\eta f$ :

$$\frac{d}{dt}(\eta f) = \eta \frac{df}{dt} + f \frac{d\eta}{dt}.$$

Το ολοκλήρωμα που θέλουμε είναι το ολοκλήρωμα του δεύτερου όρου, οπότε

$$\int f \frac{d\eta}{dt} dt = \eta f - \int \eta \frac{df}{dt} dt.$$

Στον τύπο που δώσαμε για το  $\delta S$  η συνάρτηση  $f$  είναι  $m$  επί  $d\mathbf{x}/dt$ , οπότε έχουμε την εξής σχέση για το  $\delta S$ :

$$\delta S = m \frac{d\mathbf{x}}{dt} \eta(t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( m \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \eta(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} V'(\mathbf{x}) \eta(t) dt.$$

Η τιμή του πρώτου όρου πρέπει να υπολογιστεί στα δύο όρια  $t_1$  και  $t_2$ . Ακολουθεί το ολοκλήρωμα που προκύπτει από την ολοκλήρωση κατά μέρη. Ο τελευταίος όρος μεταφέρεται αυτούσιος.

Ακολουθεί κάτι που συμβαίνει πάντα — το ολοκληρωμένο τμήμα εξαφανίζεται. (Αν το ολοκληρωμένο τμήμα δεν εξαφανίζεται, αναδιατυπώνουμε την αρχή, προσθέτοντας συνθήκες ώστε να διασφαλίσουμε ότι θα εξαφανιστεί!) Αναφέραμε ήδη ότι το  $\eta$  πρέπει να είναι μηδέν και στα δύο άκρα της διαδρομής, διότι η αρχή είναι ότι η δράση είναι ελάχιστη υπό τον όρο ότι η καμπύλη που μεταβάλλουμε ξεκινάει και τελειώνει στα επιλεγμένα σημεία. Η συνθήκη είναι ότι  $\eta(t_1) = 0$  και  $\eta(t_2) = 0$ . Άρα ο ολοκληρωμένος όρος είναι μηδέν. Συγκεντρώνοντας τους υπόλοιπους όρους, παίρνουμε το εξής:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ -m \frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} - V'(\underline{x}) \right] \eta(t) dt.$$

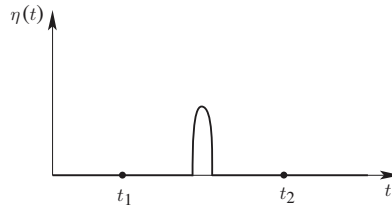
Η μεταβολή του  $S$  είναι πλέον όπως τη θέλαμε — έχουμε την ποσότητα μέσα στις αγκύλες, έστω  $F$ , πολλαπλασιασμένη ολόκληρη με  $\eta(t)$ , και το ολοκλήρωμα υπολογίζεται από το  $t_1$  μέχρι το  $t_2$ .

Έχουμε ότι το ολοκλήρωμα κάποιου πράγματος επί  $\eta(t)$  είναι πάντα μηδέν:

$$\int F(t) \eta(t) dt = 0.$$

Έχουμε μια συνάρτηση του  $t$ , την πολλαπλασιάζουμε με  $\eta(t)$  και την ολοκληρώνουμε από το ένα άκρο μέχρι το άλλο. Οτιδήποτε και αν είναι το  $\eta$ , παίρνουμε μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση  $F(t)$  είναι μηδέν. Μολονότι αυτό είναι προφανές, θα δώσω ένα είδος απόδειξης.

Ας πάρουμε ως  $\eta(t)$  κάτι που είναι μηδέν για όλα τα  $t$  εκτός πλησίον μιας συγκεκριμένης τιμής (βλ. Σχήμα 4.1.22). Παραμένει μηδέν μέχρι να φτάσει σε αυτό το  $t$ , κατόπιν ανεβαίνει για λίγο και στη συνέχεια κατεβαίνει ξανά στο μηδέν.



ΣΧΗΜΑ 4.1.22.

Αν πάρουμε το ολοκλήρωμα αυτής της  $\eta$  επί οποιαδήποτε συνάρτηση  $F$ , η μόνη περιοχή όπου παίρνουμε κάτι διαφορετικό από το μηδέν είναι εκεί όπου ανεβαίνει η  $\eta(t)$ , άρα παίρνουμε την τιμή της  $F$  σε αυτή την περιοχή επί το ολοκλήρωμα πάνω στην περιοχή της ανόδου. Το ολοκλήρωμα πάνω στην περιοχή της ανόδου δεν είναι από μόνο του μηδέν, αλλά όταν πολλαπλασιάζεται με την  $F$  πρέπει να είναι. Επομένως, η συνάρτηση  $F$  πρέπει να είναι παντού μηδέν.

Βλέπουμε ότι αν το ολοκλήρωμά μας είναι μηδέν για οποιοδήποτε  $\eta$ , τότε ο συντελεστής του  $\eta$  πρέπει να είναι μηδέν. Το ολοκλήρωμα της δράσης θα είναι ελάχιστο για τη διαδρομή που ικανοποιεί την παρακάτω πολύπλοκη διαφορική εξίσωση:

$$\left[ -m \frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} - V'(\underline{x}) \right] = 0.$$



Δεν είναι και τόσο πολύπλοκη· την έχουμε ήδη δει. Είναι απλώς η  $F = ma$ . Ο πρώτος όρος είναι η μάζα επί την επιτάχυνση, ενώ ο δεύτερος είναι η παράγωγος της δυναμικής ενέργειας, η οποία είναι η δύναμη.

Έτσι, τουλάχιστον για ένα συντηρητικό σύστημα, αποδείξαμε ότι η αρχή της ελάχιστης δράσης δίνει τη σωστή απάντηση· λέει ότι η διαδρομή με την ελάχιστη δράση είναι αυτή που ικανοποιεί τον νόμο του Νεύτωνα.

Μια παρατήρηση: Δεν αποδείξαμε ότι είναι *ελάχιστη* —μπορεί να είναι μέγιστη. Μάλιστα, δεν χρειάζεται να είναι ελάχιστη. Είναι κάτι αντίστοιχο με αυτό που βρήκαμε για την «αρχή του ελάχιστου χρόνου» που εξετάσαμε στην οπτική. Και εκεί, αρχικά αναφέραμε ότι είχαμε «ελάχιστο» χρόνο. Όπως όμως είδαμε, υπήρχαν περιπτώσεις όπου δεν ήταν ο *ελάχιστος* χρόνος. Η θεμελιώδης αρχή ήταν ότι για οποιαδήποτε *μεταβολή πρώτης τάξης* που συνιστά απομάκρυνση από την οπτική διαδρομή, η *αλλαγή* στον χρόνο ήταν ίση με μηδέν· η ίδια ιστορία. Αυτό που εννοούμε πραγματικά λέγοντας «ελάχιστη» είναι ότι η μεταβολή πρώτης τάξης της τιμής της  $S$ , όταν αλλάζουμε τη διαδρομή, είναι μηδέν. Δεν είναι απαραίτητα «ελάχιστη».<sup>10</sup>

## Συμπλήρωμα 4.1Δ

### Emmy Noether και η αρχή του Hamilton

Η Emmy Noether (1882-1935) (βλ. Σχήμα 4.1.23) είναι μάλλον γνωστότερη για τη δουλειά της στην άλγεβρα, είχε όμως σημαντική συνεισφορά και στην αρχή του Hamilton.<sup>11</sup> Για την κίνηση των πλανητών, το διάνυσμα της στροφορμής  $\mathbf{J} = \mathbf{r}(t) \times m\dot{\mathbf{r}}(t)$  είναι



ΣΧΗΜΑ 4.1.23. Emmy Noether (1882-1935).

<sup>10</sup>Βλ. «Διαλέξεις φυσικής του Feynmann» για την υπόλοιπη διάλεξη, που ασχολείται με την επέκταση αυτών των ιδεών στις τρεις διαστάσεις και παρόμοια θέματα.

<sup>11</sup>«Invarianten Variationsprobleme», *Göttingen Math. Phys.* **2** (1918): 235–257.

ανεξάρτητο του χρόνου (άρα είναι *διατηρούμενο μέγεθος*), όπως μπορεί κανείς εύκολα να διαπιστώσει υπολογίζοντας τη χρονική παράγωγο του  $\mathbf{J}$  και χρησιμοποιώντας την  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  (βλ. Άσκηση 20). Αυτό που ανακάλυψε η Noether ήταν μια στενή σχέση μεταξύ τέτοιου είδους διατηρούμενων μεγεθών και συμμετριών στην αρχή του Hamilton — στην περίπτωση της στροφορμής έχουμε περιστροφική συμμετρία. Οι ανακαλύψεις της Noether επηρέασαν έκτοτε βαθιά τη μελέτη των μηχανικών συστημάτων, από τα κλασικά ως τα κβαντικά.

### Συμπλήρωμα Ενότητας 4.3 Οι τροχιές των πλανητών

Στόχος μας σε αυτό το συμπλήρωμα είναι να αποδείξουμε ότι ένα σώμα που κινείται υπό την επίδραση του νόμου της βαρύτητας του Νεύτωνα —δηλαδή του νόμου του αντιστρόφου τετραγώνου— κινείται επί μίας κωνικής τομής. Στο βιβλίο ασχοληθήκαμε μόνο με *κυκλικές τροχιές*, αλλά κάποια από τα αποτελέσματα, όπως ο νόμος του Kepler για τη σχέση μεταξύ της περιόδου και του μεγέθους μιας τροχιάς, μπορούν να γενικευτούν για την περίπτωση των ελλειπτικών τροχιών.

**Ιστορία.** Σε αυτό το σημείο είναι καλή ιδέα να ξαναδιαβάσετε μέρος της ιστορίας που αναφέραμε στην αρχή του βιβλίου συμπληρωματικά προς τις σχετικές ενότητες του βιβλίου (ιδιαίτερα της Ενότητας 4.1). Υπενθυμίζουμε, για παράδειγμα, ότι ένα από τα παρατηρούμενα φαινόμενα που κάλυπτε η πτολεμαϊκή θεωρία, το οποίο εξηγείται από το γεγονός ότι οι πλανήτες κινούνται (με εξαιρετικά καλή προσέγγιση) σε ελλείψεις γύρω από τον ήλιο, είναι η εμφάνιση ανάδρομης κίνησης των πλανητών, όπως στο Σχήμα 4.3.1.

**Μεθοδολογία.** Η προσέγγιση που θα ακολουθήσουμε σε αυτό το συμπλήρωμα είναι να χρησιμοποιήσουμε τις αρχές διατήρησης της ενέργειας και διατήρησης της γωνιακής ταχύτητας. Αυτό σημαίνει ότι θα επικεντρωθούμε σε τεχνικές που θα προκύψουν από τον συνδυασμό βασικών αρχών της μηχανικής με τεχνικές των διαφορικών εξισώσεων, καθώς και ορισμένα τεχνάσματα. Άλλες προσεγγίσεις, μεταξύ των οποίων και η αρχική προσέγγιση του Νεύτωνα, είναι πολύ πιο γεωμετρικές.<sup>12</sup>

**Το πρόβλημα του Kepler.** Όπως στο βιβλίο, θεωρούμε ότι ο Ήλιος (μάζας  $M$ ) είναι τόσο μεγάλος ώστε να παραμένει σταθερός στην αρχή των αξόνων και ότι ο πλανήτης μας (μάζας  $m$ ) περιστρέφεται γύρω από τον Ήλιο σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και κινείται στο πεδίο που καθορίζει ο νόμος της βαρύτητας του Νεύτωνα. Επομένως, το πρόβλημα του Kepler είναι το εξής: *Αποδείξτε ότι η λύση  $\mathbf{r}(t)$  της εξίσωσης*

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GmM}{r^2} \mathbf{r} \quad (4.3.1)$$

είναι *κωνική τομή*. Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε είναι να υποθέσουμε ότι έχουμε μια λύση, την οποία θα καλούμε *τροχιά*, και να δείξουμε ότι είναι κωνική τομή. Αντι-

<sup>12</sup>Η γεωμετρική προσέγγιση, μαζί με πολλά ενδιαφέροντα ιστορικά στοιχεία, αναδεικνύεται και στο μικρό βιβλίο *Feynman's Lost Lecture: The Motion of Planets Around the Sun* των David L. Goodstein και Judith R. Goodstein, W.W. Norton and Co., New York.



ΣΧΗΜΑ 4.3.1. Η φαινόμενη κίνηση των πλανητών. Στη φωτογραφία φαίνονται οι κινήσεις του Ερμή, της Αφροδίτης, του Δία και του Κρόνου. Στο διάγραμμα παρουσιάζονται οι διαδρομές που διαγράφουν οι πλανήτες όπως φαίνονται από τη Γη, τις οποίες προσπάθησε να εξηγήσει η πτολεμαϊκή θεωρία.

στρέφοντας τον συλλογισμό, θα μπορούσε κανείς να δείξει ότι οποιαδήποτε κωνική τομή, με κατάλληλη χρονική παραμετρικοποίηση, είναι επίσης λύση.

**Ενέργεια και στροφορμή.** Στην παράγραφο της Ενότητας 4.3 του βιβλίου με τίτλο *Διατήρηση της ενέργειας και διαφυγή από το βαρυντικό πεδίο της Γης* είδαμε ότι κάθε λύση της εξίσωσης (4.3.1) ικανοποιεί την αρχή διατήρησης της ενέργειας, δηλαδή η ποσότητα

$$E = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 - \frac{GmM}{r}, \quad (4.3.2)$$

που καλείται **ενέργεια** της λύσης, δεν μεταβάλλεται με το χρόνο.

Το δεύτερο πράγμα που θα χρειαστούμε είναι η διατήρηση της στροφορμής, που παρουσιάστηκε στην Άσκηση 20 της Ενότητας 4.1. Αυτή λέει ότι η **στροφορμή** μιας λύσης δεν μεταβάλλεται με το χρόνο, συγκεκριμένα, για οποιαδήποτε τροχιά, το εξωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{J} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (4.3.3)$$

δεν εξαρτάται από τον χρόνο.

**Οι τροχιές είναι επίπεδες.** Το πρώτο πράγμα που παρατηρούμε είναι ότι κάθε λύση πρέπει να ανήκει σε ένα επίπεδο. Αυτό προκύπτει άμεσα από τη διατήρηση της στρο-

φορμής: αφού το  $\mathbf{J}$  είναι μια σταθερά και  $\mathbf{J} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ , έπεται ότι το  $\mathbf{r}$  κείται σε ένα επίπεδο κάθετο στο (σταθερό) διάνυσμα  $\mathbf{J}$ .

**Εισαγωγή πολικών συντεταγμένων.** Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η τροχιά μας ανήκει σε ένα επίπεδο, το οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε πως είναι το σύνθετο επίπεδο  $xy$ . Θα εισαγάγουμε τις πολικές συντεταγμένες  $(\rho, \theta)$  σε αυτό το επίπεδο ως συνήθως, ώστε οι συνιστώσες του διανύσματος θέσης  $\mathbf{r}$  να δίνονται από την

$$\mathbf{r} = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Παραγωγίζοντας ως προς  $t$ , βλέπουμε ότι οι συνιστώσες του διανύσματος ταχύτητας δίνονται από την

$$\dot{\mathbf{r}} = (\dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta, \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta),$$

οπότε βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2. \quad (4.3.4)$$

Αντικαθιστώντας την (4.3.4) στην αρχή διατήρησης της ενέργειας, παίρνουμε

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GmM}{r}. \quad (4.3.5)$$

Με αντίστοιχο τρόπο, για να βρούμε τη στροφορμή υπολογίζουμε το εξωτερικό γινόμενο των  $\mathbf{r}$  και  $\dot{\mathbf{r}}$ :

$$\mathbf{J} = m \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r \cos \theta & r \sin \theta & 0 \\ \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta & \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \quad (4.3.6)$$

$$= mr^2\dot{\theta}\mathbf{k} \quad (4.3.7)$$

Επομένως, το

$$J = mr^2\dot{\theta} \quad (4.3.8)$$

δεν μεταβάλλεται με το χρόνο.

**Δεύτερος νόμος του Kepler.** Παρατηρούμε ότι η έκφραση για το  $J$  συνδέεται στενά με το στοιχείο εμβαδού στις πολικές συντεταγμένες, συγκεκριμένα το  $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$ . Αν μετρήσουμε το εμβαδόν από ένα δεδομένο  $\theta_0$  αναφοράς, παίρνουμε

$$\frac{dA}{dt} = \frac{J}{2m} \quad (4.3.9)$$

το οποίο είναι μια σταθερά. Έτσι παίρνουμε τον *δεύτερο νόμο του Kepler*, συγκεκριμένα ότι για μια τροχιά, ίσα εμβαδά διαγράφονται σε ίσα χρονικά διαστήματα. Προσέξτε επίσης ότι αυτό ισχύει για οποιαδήποτε κίνηση υπό την επίδραση κάποιας κεντρικής δύναμης καθώς εξαρτάται μόνο από τη διατήρηση της στροφορμής.

**Αναδιτύπωση της εξίσωσης ενέργειας.** Προσέξτε ότι αν απαλείψουμε το  $\dot{\theta}$  χρησιμοποιώντας την (4.3.8), μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση ενέργειας (4.3.5) ως

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r}. \quad (4.3.10)$$

Θα μας είναι χρήσιμο να προσπαθήσουμε να βρούμε μια έκφραση για την τροχιά σε πολική μορφή ως  $r = r(\theta)$ .

**Ένα τέχνασμα.** Για να βρούμε έναν αναλυτικό τύπο ως λύση μιας διαφορικής εξίσωσης συχνά χρειαζόμαστε έναν συνδυασμό έξυπνων εικασιών, διαίσθησης και τύχης· το πρόβλημα του Kepler ανήκει σε αυτή την περίπτωση. Ένα τέχνασμα που δουλεύει είναι να εισαγάγουμε μια νέα εξαρτημένη μεταβλητή  $u = 1/r$  (ασφαλώς πρέπει να ελέγξουμε την πιθανότητα η τροχιά να διέρχεται από την αρχή των αξόνων, οπότε το  $r$  μηδενίζεται). Κοιτάζτε όμως τι πετυχαίνουμε με αυτή την επιλογή. Κατ' αρχάς, σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας,

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}.$$

Δεύτερον, παρατηρούμε ότι χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, την παραπάνω εξίσωση και την (4.3.8), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = -r^2 \dot{\theta} \frac{du}{d\theta} \\ &= -\frac{J}{m} \frac{du}{d\theta}, \end{aligned}$$

οπότε από την (4.3.10) βρίσκουμε ότι

$$E = \frac{J^2}{2m} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{J^2 u^2}{2m} - GmMu, \quad (4.3.11)$$

δηλαδή

$$\frac{2Em}{J^2} = \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u - \frac{2GMm^2}{J^2} u. \quad (4.3.12)$$

Προσέξτε τον ενδιαφέροντα τρόπο με τον οποίο εμφανίζεται μόνο το  $u$  και η παράγωγός του ως προς  $\theta$ , και ότι οι παρανομαστές που περιείχαν το  $r$  έχουν απαλειφθεί. Αυτό ήταν ο κύριος λόγος αλλαγής της εξαρτημένης μεταβλητής από  $r$  σε  $u$ .

**Συμπλήρωση του τετραγώνου.** Στη συνέχεια θα απαλείψουμε τον γραμμικό όρο ως προς  $u$  στην (4.3.12) συμπληρώνοντας το τετράγωνο. Θέτουμε  $\alpha = GMm^2/J^2$ , οπότε η (4.3.12) γίνεται

$$\frac{2Em}{J^2} = \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u - 2\alpha u, \quad (4.3.13)$$

Στη συνέχεια θέτουμε

$$v = u - \alpha,$$

οπότε η εξίσωση (4.3.13) γίνεται

$$\left( \frac{dv}{d\theta} \right)^2 + v^2 = \beta^2, \quad (4.3.14)$$

όπου

$$\beta^2 = \frac{2Em}{J^2} - \alpha^2.$$

Κάνουμε μία ακόμη αλλαγή μεταβλητών:

$$w = \frac{1}{\alpha}v = \frac{1}{\alpha}u - 1,$$

οπότε η (4.3.14) γίνεται

$$\left(\frac{dw}{d\theta}\right)^2 + w^2 = e^2, \quad (4.3.15)$$

όπου

$$e^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{2Em}{\alpha^2 J^2} - 1.$$

**Επίλυση της εξίσωσης.** Μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι η λύση της εξίσωσης (4.3.15) είναι

$$w = e \cos(\theta - \theta_0),$$

όπου  $\theta_0$  είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης. Συναρτήσει της αρχικής μεταβλητής  $r$ , αυτό σημαίνει ότι

$$r(e \cos(\theta - \theta_0) + 1) = \frac{1}{a}. \quad (4.3.16)$$

**Οι τροχιές είναι κωνικές τομές.** Η εξίσωση (4.3.16) είναι η εξίσωση μιας κωνικής τομής γραμμένη σε πολικές συντεταγμένες, όπου  $e$  είναι η εκκεντρότητα της τροχιάς, η οποία καθορίζει το σχήμα της. Η ποσότητα  $l = 1/\alpha$  καθορίζει την κλίμακά της, ενώ το  $\theta_0$  τον προσανατολισμό της ως προς τους άξονες  $xy$  είναι επίσης η γωνία της ελάχιστης απόστασης από την αρχή των αξόνων.

Στην περίπτωση όπου  $0 \leq e < 1$  (και  $E = 0$ ) έχουμε έλλειψη της μορφής

$$\frac{(x + ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

όπου

$$a = \frac{l}{1 - e^2} = -\frac{GmM}{2E}$$

και

$$b^2 = al = -\frac{J^2}{2mE}.$$

Στην περίπτωση όπου  $e = 0$  έχουμε κυκλικές τροχιές. Αν  $e > 1$  έχουμε υπερβολικές τροχιές, ενώ στην ειδική περίπτωση όπου  $e = 1$  έχουμε παραβολικές τροχιές. Άρα, καθώς το  $e$  παίρνει τιμές από 0 έως 1, η έλλειψη γίνεται όλο και πιο μακρόστενη.

**Τρίτος νόμος του Kepler.** Από τον δεύτερο νόμο του Kepler και το γεγονός ότι το εμβαδόν μια έλλειψης είναι  $\pi ab$ , βρίσκουμε ότι η περίοδος  $T$  μιας ελλειπτικής τροχιάς συνδέεται με τον μεγάλο ημιάξονα  $a$  μέσω της

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{a^3}{GM},$$

που είναι ο τρίτος νόμος του Kepler. Προσέξτε ότι στην περίπτωση του κύκλου αυτό ανάγεται σε αυτό που είδαμε στο βιβλίο για τις κυκλικές τροχιές (όταν  $a$  είναι η ακτίνα του κύκλου).

## Συμπλήρωμα Ενότητας 4.4

### Ροές και η γεωμετρία της απόκλισης

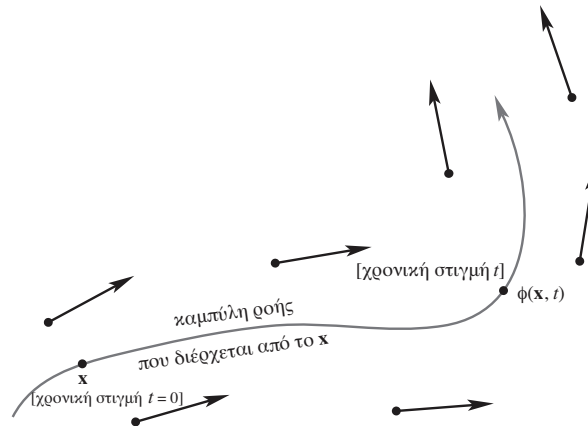
**Ροές διανυσματικών πεδίων.** Βολεύει να συμβολίσουμε με ειδικό τρόπο τη μοναδική λύση που διέρχεται από ένα δεδομένο σημείο τη χρονική στιγμή 0:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \left\{ \begin{array}{l} \text{η θέση του σημείου πάνω στη καμπύλη ροής που διέρχεται από} \\ \text{το σημείο } \mathbf{x} \text{ ύστερα από την πάροδο χρονικού διαστήματος } t. \end{array} \right\}$$

Έχοντας ως αρχική συνθήκη το  $\mathbf{x}$ , ακολουθούμε την καμπύλη ροής για χρονικό διάστημα  $t$  μέχρι τη νέα θέση  $\phi(\mathbf{x}, t)$  (βλ. Σχήμα 4.4.1). Εναλλακτικά, η  $\phi(\mathbf{x}, t)$  ορίζεται ως εξής:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\phi(\mathbf{x}, t)) \\ \phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x} \end{array} \right\}. \quad (1)$$

Καλούμε την απεικόνιση  $\phi$ , η οποία θεωρείται συνάρτηση των μεταβλητών  $\mathbf{x}$  και  $t$ , ροή του  $\mathbf{F}$ .



ΣΧΗΜΑ 4.4.1. Ορισμός της ροής  $\phi(\mathbf{x}, t)$  του  $\mathbf{F}$ .

Έστω  $\mathbf{D}_x$  ο τελεστής παραγώγισης ως προς  $\mathbf{x}$ , με το  $t$  κρατημένο σταθερό. Στα μαθήματα διαφορικών εξισώσεων αποδεικνύεται ότι η  $\phi$  είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του  $\mathbf{x}$ . Παραγωγίζοντας την εξίσωση (1) ως προς  $\mathbf{x}$ , παίρνουμε

$$\mathbf{D}_x \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{D}_x [\mathbf{F}(\phi(\mathbf{x}, t))].$$

Χρησιμοποιώντας την ισότητα των μεικτών μερικών παραγώγων στο αριστερό μέλος αυτής της εξίσωσης και τον κανόνα της αλυσίδας στο δεξιό, παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}_x \phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{DF}(\phi(\mathbf{x}, t)) \mathbf{D}_x \phi(\mathbf{x}, t), \quad (2)$$

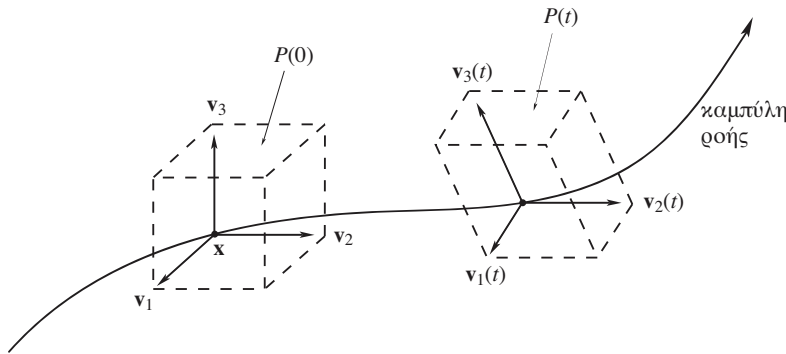
όπου  $\mathbf{DF}(\phi(\mathbf{x}, t))$  είναι η παράγωγος του  $\mathbf{F}$  υπολογισμένη στο  $\phi(\mathbf{x}, t)$ . Η εξίσωση (2), μια γραμμική διαφορική εξίσωση ως προς  $\mathbf{D}_x\phi(\mathbf{x}, t)$ , καλείται *εξίσωση της πρώτης μεταβολής*. Θα μας φανεί χρήσιμη όταν θα εξετάσουμε την απόκλιση και τον στροβιλισμό στην επόμενη ενότητα. Τα  $\mathbf{D}_x\mathbf{F}(\phi)$  και  $\mathbf{D}_x\phi$  είναι αμφότερα  $3 \times 3$  πίνακες αφού τα  $\mathbf{F}$  και  $\phi$  παίρνουν τιμές στο  $\mathbb{R}^3$  και παραγωγίζονται ως προς  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ . Για διανυσματικά πεδία στο επίπεδο θα είναι  $2 \times 2$  πίνακες.

**Η γεωμετρία της απόκλισης.** Θα μελετήσουμε τώρα λεπτομερέστερα τη γεωμετρική σημασία της απόκλισης. Η ανάλυση στηρίζεται στην έννοια της ροής  $\phi(\mathbf{x}, t)$  ενός διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{F}$  που δώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Βλ. τις Ασκήσεις 3, 4 και 5 που ακολουθούν για μια αντίστοιχη ανάλυση του στροβιλισμού.

Επιλέγουμε ένα σταθερό σημείο  $\mathbf{x}$  και θεωρούμε τα τρία διανύσματα της συνήθους βάσης  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  και  $\mathbf{k}$  που ξεκινούν από το  $\mathbf{x}$ . Έστω  $\varepsilon > 0$  μικρό και ας θεωρήσουμε τα διανύσματα βάσης  $\mathbf{v}_1 = \varepsilon\mathbf{i}, \mathbf{v}_2 = \varepsilon\mathbf{j}, \mathbf{v}_3 = \varepsilon\mathbf{k}$ , που ξεκινούν και αυτά από το  $\mathbf{x}$ . Τα διανύσματα αυτά ορίζουν ένα παραλληλεπίπεδο  $P(0)$ . Καθώς ο χρόνος αυξάνεται ή μειώνεται, η ροή  $\phi(\mathbf{x}, t)$  μεταφέρει το  $P(0)$  σε κάποιο αντικείμενο. Για *σταθερό* χρόνο, η  $\phi$  είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του  $\mathbf{x}$  (δηλαδή η  $\phi$  είναι μια παραγωγίσιμη απεικόνιση από το  $\mathbb{R}^3$  στο  $\mathbb{R}^2$ ). Όταν το  $\varepsilon$  είναι μικρό, η εικόνα του  $P(0)$  μέσω της  $\phi$  μπορεί να προσεγγιστεί από την εικόνα του μέσω της παραγώγου της  $\phi$  ως προς  $\mathbf{x}$ . Υπενθυμίζουμε ότι αν  $\mathbf{v}$  είναι ένα διάνυσμα που ξεκινά από ένα σημείο  $P_1$  και καταλήγει σε ένα σημείο  $P_2$ , τότε  $\phi(P_2, t) - \phi(P_1, t) \approx \mathbf{D}_x\phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}$ . Άρα για σταθερό χρόνο και μικρό θετικό  $\varepsilon$ , το  $P(0)$  μεταφέρεται κατά προσέγγιση σε ένα παραλληλεπίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα  $\mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \mathbf{v}_3(t)$  που δίνονται από τις

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_1(t) &= \mathbf{D}_x\phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2(t) &= \mathbf{D}_x\phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3(t) &= \mathbf{D}_x\phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}_3 \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Αφού  $\phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$  για κάθε  $\mathbf{x}$ , έπεται ότι  $\mathbf{v}_1(0) = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2(0) = \mathbf{v}_2$  και  $\mathbf{v}_3(0) = \mathbf{v}_3$ . Συνοψίζοντας, τα  $\mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t)$  και  $\mathbf{v}_3(t)$  ορίζουν ένα παραλληλεπίπεδο  $P(t)$  που μετακινείται με το χρόνο (βλ. Σχήμα 4.4.2).



ΣΧΗΜΑ 4.4.2. Η μετακινούμενη βάση  $\mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \mathbf{v}_3(t)$  και το αντίστοιχο παραλληλεπίπεδο.

Έστω ότι συμβολίζουμε τον όγκο του  $P(t)$  με  $\mathcal{V}(t)$ . Η κύρια γεωμετρική ερμηνεία



της απόκλισης δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα.**

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathcal{V}(0)} \left. \frac{d}{dt} \mathcal{V}(t) \right|_{t=0}.$$

**Απόδειξη.** Σύμφωνα με την εξίσωση (2) της προηγούμενης παραγράφου,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}_i(t) = \mathbf{DF}(\phi(\mathbf{x}, t)) \cdot (\mathbf{D}_x \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}_i) \quad (4)$$

για  $i = 1, 2, 3$ . Αφού  $\phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$ , έπεται ότι η  $\mathbf{D}_x \phi(\mathbf{x}, 0)$  είναι ο ταυτοτικός πίνακας, άρα αν υπολογίσουμε την τιμή για  $t = 0$  παίρνουμε

$$\left. \frac{d}{dt} \mathbf{v}_i(t) \right|_{t=0} = \mathbf{DF}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_i.$$

Ο όγκος  $\mathcal{V}(t)$  δίνεται από το τριπλό γινόμενο:

$$\mathcal{V}(t) = \mathbf{v}_1(t) \cdot [\mathbf{v}_2(t) \times \mathbf{v}_3(t)].$$

Χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγωγίσης της Ενότητας 4.1 και τις ταυτότητες

$$\mathbf{v}_1 \cdot [\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3] = \mathbf{v}_2 \cdot [\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1] = \mathbf{v}_3 \cdot [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2],$$

από την εξίσωση (4) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{V}}{dt} &= \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \cdot [\mathbf{v}_2(t) \times \mathbf{v}_3(t)] + \mathbf{v}_1(t) \cdot \left[ \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \times \mathbf{v}_3(t) \right] + \mathbf{v}_1(t) \cdot \left[ \mathbf{v}_2(t) \times \frac{d\mathbf{v}_3}{dt} \right] \\ &= \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \cdot [\mathbf{v}_2(t) \times \mathbf{v}_3(t)] + \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \cdot [\mathbf{v}_3(t) \times \mathbf{v}_1(t)] + \frac{d\mathbf{v}_3}{dt} \cdot [\mathbf{v}_1(t) \times \mathbf{v}_2(t)]. \end{aligned}$$

Για  $t = 0$ , με αντικατάσταση από τη σχέση (3) και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \varepsilon \mathbf{v}_3, \quad \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1 = \varepsilon \mathbf{v}_2 \quad \text{και} \quad \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = \varepsilon \mathbf{v}_1,$$

παίρνουμε

$$\left. \frac{d\mathcal{V}}{dt} \right|_{t=0} = \varepsilon^3 [\mathbf{DF}(\mathbf{x})\mathbf{i}] \cdot \mathbf{i} + \varepsilon^3 [\mathbf{DF}(\mathbf{x})\mathbf{j}] \cdot \mathbf{j} + \varepsilon^3 [\mathbf{DF}(\mathbf{x})\mathbf{k}] \cdot \mathbf{k}. \quad (5)$$

Αφού  $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$ , παίρνουμε  $[\mathbf{DF}(\mathbf{x})\mathbf{i}] \cdot \mathbf{i} = \partial F_1 / \partial x$ . Με αντίστοιχο τρόπο προκύπτει ότι ο δεύτερος και ο τρίτος όρος της εξίσωσης (5) είναι  $\varepsilon^3 (\partial F_2 / \partial y)$  και  $\varepsilon^3 (\partial F_3 / \partial z)$ . Με αντικατάσταση αυτών στην εξίσωση (5) και διαίρεση με  $\mathcal{V}(0) = \varepsilon^3$  αποδεικνύεται το θεώρημα.  $\square$

Ο αναγνώστης που γνωρίζει λίγη περισσότερη γραμμική άλγεβρα μπορεί να αποδείξει την εξής γενίκευση του παραπάνω θεωρήματος:<sup>13</sup> Έστω  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  και  $\mathbf{v}_3$  τρία μη

<sup>13</sup>Ο αναγνώστης θα πρέπει να γνωρίζει πώς γράφουμε τον πίνακα ενός γραμμικού μετασχηματισμού ως προς μια δεδομένη βάση και να γνωρίζει το γεγονός ότι το ίχνος ενός πίνακα είναι ανεξάρτητο από τη βάση.

συνεπίπεδα (όχι απαραίτητα ορθοκανονικά) διανύσματα που ξεκινούν από το  $\mathbf{x}$  και ρέουν σύμφωνα με τη σχέση

$$\mathbf{v}_i(t) = \mathbf{D}_x \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Τα διανύσματα  $\mathbf{v}_1(t)$ ,  $\mathbf{v}_2(t)$  και  $\mathbf{v}_3(t)$  ορίζουν ένα παραλληλεπίπεδο  $P(t)$  όγκου  $\mathcal{V}(t)$  με

$$\frac{1}{\mathcal{V}(0)} \left. \frac{d\mathcal{V}}{dt} \right|_{t=0} = \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (6)$$

Με άλλα λόγια, η απόκλιση του  $\mathbf{F}$  στο  $\mathbf{x}$  είναι ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλονται οι όγκοι, ανά μονάδα όγκου. «Ρυθμός» είναι ο ρυθμός μεταβολής ως προς τον χρόνο καθώς οι όγκοι μεταφέρονται από τη ροή.

## Ασκήσεις

1. Αν  $f(\mathbf{x}, t)$  είναι μια πραγματική συνάρτηση των  $\mathbf{x}$  και  $t$ , ορίζουμε την **ολική παράγωγο** της  $f$  ως προς ένα διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}$  ως εξής:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}.$$

Δείξτε ότι η  $Df/Dt$  είναι η παράγωγος της  $f(\phi(\mathbf{x}, t), t)$  ως προς  $t$  (δηλαδή η παράγωγος ως προς  $t$  της  $f$  που μεταφέρεται από τη ροή του  $\mathbf{F}$ ).

2. (α) Θεωρώντας ότι η καμπύλη ροής που διέρχεται από ένα δεδομένο σημείο κάποια δεδομένη χρονική στιγμή είναι μοναδική, αποδείξτε την εξής ιδιότητα της ροής  $\phi(\mathbf{x}, t)$  ενός διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{F}$ :

$$\phi(\mathbf{x}, t + s) = \phi(\phi(\mathbf{x}, s), t).$$

(β) Ποια είναι η αντίστοιχη ιδιότητα για την  $\mathbf{D}_x \phi$ ;

3. Έστω  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{w}$  δύο διανύσματα που ξεκινούν από την αρχή των αξόνων και έστω ότι μετακινούνται από την παράγωγο της ροής:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{D}_x \phi(\mathbf{0}, t) \mathbf{v}, \quad \mathbf{w}(t) = \mathbf{D}_x \phi(\mathbf{0}, t) \mathbf{w},$$

έτσι ώστε τη χρονική στιγμή  $t = 0$  και στην αρχή των αξόνων  $\mathbf{0}$  του  $\mathbb{R}^3$  να έχουμε

$$\left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_{t=0} = \mathbf{D}_x \mathbf{F}(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{v} \quad \text{και} \quad \left. \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right|_{t=0} = \mathbf{D}_x \mathbf{F}(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{w}.$$

Δείξτε ότι

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \right|_{t=0} &= [\mathbf{D}_x \mathbf{F}(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{v}] \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot [\mathbf{D}_x \mathbf{F}(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{w}] \\ &= [(\mathbf{D}_x \mathbf{F}(\mathbf{0}) + [\mathbf{D}_x \mathbf{F}(\mathbf{0})]^T) \mathbf{v}] \cdot \mathbf{w}. \end{aligned}$$

4. Οποιοσδήποτε πίνακας  $A$  μπορεί να γραφτεί (με μοναδικό τρόπο) ως άθροισμα ενός συμμετρικού πίνακα (ένας πίνακας  $S$  είναι *συμμετρικός* αν  $S^T = S$ ) και ενός αντισυμμετρικού πίνακα ( $W^T = -W$ ) ως εξής:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = S + W.$$

Ειδικότερα, για  $A = \mathbf{D}_x \mathbf{F}(\mathbf{0})$ ,

$$S = \frac{1}{2}[\mathbf{D}_x \mathbf{F}(\mathbf{0}) + [\mathbf{D}_x \mathbf{F}(\mathbf{0})]^T]$$

και

$$W = \frac{1}{2}[\mathbf{D}_x \mathbf{F}(\mathbf{0}) - [\mathbf{D}_x \mathbf{F}(\mathbf{0})]^T].$$

Ο πίνακας  $S$  καλείται *πίνακας παραμόρφωσης*, ενώ ο πίνακας  $W$  καλείται *πίνακας περιστροφής*. Δείξτε ότι τα στοιχεία του πίνακα  $W$  ορίζονται από τις

$$w_{12} = -\frac{1}{2}(\text{curl } \mathbf{F})_3, \quad w_{23} = -\frac{1}{2}(\text{curl } \mathbf{F})_1 \quad \text{και} \quad w_{31} = -\frac{1}{2}(\text{curl } \mathbf{F})_2.$$

5. Έστω  $\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{F})(\mathbf{0})$ . Θεωρούμε ότι οι άξονες επιλέγονται έτσι ώστε το  $\mathbf{w}$  να είναι παράλληλο στον άξονα  $z$  και να έχει την κατεύθυνση του  $\mathbf{k}$ . Έστω  $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$ , όπου  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , έτσι ώστε το  $\mathbf{v}$  να είναι το πεδίο ταχυτήτων μιας περιστροφής γύρω από τον άξονα  $\mathbf{w}$  με γωνιακή ταχύτητα  $\omega = \|\mathbf{w}\|$  και με  $\text{curl } \mathbf{v} = 2\mathbf{w}$ . Αφού το  $\mathbf{r}$  είναι συνάρτηση των  $(x, y, z)$ , το  $\mathbf{v}$  είναι και αυτό συνάρτηση των  $(x, y, z)$ . Δείξτε ότι η παράγωγος του  $\mathbf{v}$  στην αρχή των αξόνων δίνεται από την

$$\mathbf{Dv}(\mathbf{0}) = W = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Δώστε την ερμηνεία του αποτελέσματος.

6. Έστω

$$\mathbf{V}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}, \quad \mathbf{W}(x, y, z) = \frac{\mathbf{V}(x, y, z)}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

και

$$\mathbf{Y}(x, y, z) = \frac{\mathbf{V}(x, y, z)}{(x^2 + y^2)}.$$

- (α) Υπολογίστε την απόκλιση και τον στροβιλισμό των  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{W}$  και  $\mathbf{Y}$ .  
 (β) Βρείτε τις καμπύλες ροής των  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{W}$  και  $\mathbf{Y}$ .  
 (γ) Πώς θα συμπεριφερθεί ένας μικρός υδροτροχός στη ροή καθενός εκ των  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{W}$  και  $\mathbf{Y}$ ;
7. Έστω  $\phi(\mathbf{x}, t)$  η ροή ενός διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{F}$ . Έστω ότι τα  $\mathbf{x}$  και  $t$  είναι σταθερά. Για μικρά διανύσματα  $\mathbf{v}_1 = \varepsilon\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{v}_2 = \varepsilon\mathbf{j}$  και  $\mathbf{v}_3 = \varepsilon\mathbf{k}$  που ξεκινούν από το  $\mathbf{x}$ , έστω  $P(0)$  το παραλληλεπίπεδο που ορίζουν τα  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  και  $\mathbf{v}_3$ . Αποδείξτε ότι για μικρό θετικό  $\varepsilon$ , το  $P(0)$  μεταφέρεται από τη ροή σε ένα κατά προσέγγιση παραλληλεπίπεδο που ορίζεται από τα  $\mathbf{v}_1(t)$ ,  $\mathbf{v}_2(t)$  και  $\mathbf{v}_3(t)$  που δίνονται από τη σχέση (3).

## 5

# Διπλά και τριπλά ολοκληρώματα

Τόσο η παράγωγος όσο και το ολοκλήρωμα μπορούν να βασιστούν στην έννοια του *σημείου μετάβασης*. Για παράδειγμα, μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann όταν υπάρχει ένα σημείο μετάβασης μεταξύ του κάτω και του άνω αθροίσματος.

Alan Weinstein, 1982

## Συμπλήρωμα Ενότητας 5.2

### Εναλλακτικός ορισμός του ολοκληρώματος

Υπάρχει και μια άλλη προσέγγιση για τον ορισμό του ολοκληρώματος που βασίζεται στις κλιμακωτές συναρτήσεις, την οποία μπορεί να θέλει να αναφέρει ή να παρουσιάσει ο διδάσκων ώστε να την έχουν υπόψη τους οι πιο δυνατοί φοιτητές. Θα ξεκινήσουμε παρουσιάζοντας αυτόν τον (προαιρετικό) ορισμό.

Λέμε ότι μια συνάρτηση  $g(x, y)$  που ορίζεται στο  $R = [a, b] \times [c, d]$  είναι *κλιμακωτή συνάρτηση* αν υπάρχει μια διαμέριση

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

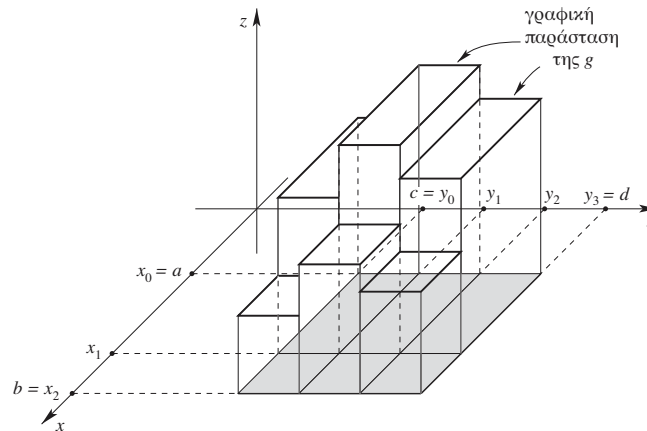
του κλειστού διαστήματος  $[a, b]$  και μια διαμέριση

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m < d$$

του κλειστού διαστήματος  $[c, d]$  τέτοιες ώστε, σε καθένα από τα  $mn$  ανοιχτά ορθογώνια

$$R_{ij} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j),$$

η συνάρτηση  $g(x, y)$  να έχει σταθερή τιμή  $k_{ij}$ . Το γράφημα μιας κλιμακωτής συνάρτησης παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.2.1.



ΣΧΗΜΑ 5.2.1. Η συνάρτηση  $g$  είναι κλιμακωτή συνάρτηση αφού είναι σταθερή σε κάθε υποορθογώνιο.

Θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\iint_R g(x, y) dx dy$$

μιας κλιμακωτής συνάρτησης επί ενός ορθογωνίου με τέτοιο τρόπο ώστε αν  $g(x, y) \geq 0$  στο  $R$ , το ολοκλήρωμα να ισούται με τον όγκο του χωρίου  $V$  κάτω από το γράφημα. Αφού το τμήμα του  $V$  που βρίσκεται πάνω από το ορθογώνιο  $R_{ij}$  έχει ύψος  $k_{ij}$  και εμβαδόν βάσης  $(x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1})$ , ο όγκος του συγκεκριμένου τμήματος είναι  $k_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1})$  ή  $k_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$  όπου  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  και  $\Delta y_j = y_i - y_{i-1}$ , όπως στον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής. Ο όγκος του  $V$  είναι το άθροισμα όλων των  $k_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$  για τιμές του  $i$  από 1 έως  $n$  και τιμές του  $j$  από 1 έως  $m$  (συνολικά  $nm$  το πλήθος όροι). Συμβολίζουμε αυτό το άθροισμα με

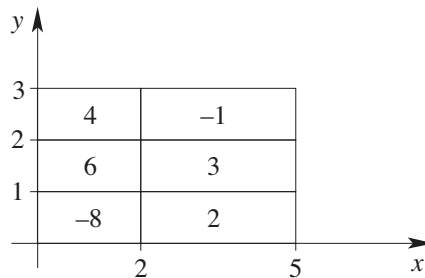
$$\sum_{i=1, j=1}^{n, m} \cdot$$

Στηρίζομενοι σε αυτόν τον γεωμετρικό οδηγό, ορίζουμε ότι

$$\iint_R g(x, y) dx dy = \sum_{i=1, j=1}^{n, m} k_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

για κάθε κλιμακωτή συνάρτηση  $g$ , ανεξάρτητα από το αν οι τιμές  $k_{ij}$  της συνάρτησης είναι όλες μη αρνητικές ή όχι.

**Παράδειγμα 1.** Έστω ότι οι τιμές που παίρνει η  $g$  στα ορθογώνια είναι αυτές που παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.2.2. Υπολογίστε ο ολοκλήρωμα της  $g$  επί του ορθογωνίου  $R = [0, 5] \times [0, 3]$ .



ΣΧΗΜΑ 5.2.2. Βρείτε το  $\iint_D g(x, y) dx dy$  αν η  $g$  παίρνει αυτές τις τιμές.

**Λύση.** Το ολοκλήρωμα της  $g$  είναι το άθροισμα των γινομένων των τιμών της  $g$  επί τα εμβαδά των ορθογωνίων:

$$\begin{aligned} \iint_D g(x, y) dx dy &= -8 \times 2 + 2 \times 3 + 6 \times 2 \\ &\quad + 3 \times 3 + 4 \times 2 - 1 \times 3 = 16. \end{aligned} \quad \diamond$$

Ασφαλώς, οι συναρτήσεις που θέλουμε να ολοκληρώσουμε συνήθως δεν είναι κλιμακωτές συναρτήσεις. Για να ορίσουμε τα ολοκληρώματά τους, χρησιμοποιούμε μια συγκριτική μέθοδο που ανάγεται στον Αρχιμήδη.

Αν  $f_1(x, y)$  και  $f_2(x, y)$  είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις ορισμένες επί ενός ορθογωνίου  $R$ , τότε κάθε εύλογος ορισμός του διπλού ολοκληρώματος θα πρέπει να δίνει για την  $f_2$  τιμή μεγαλύτερη από αυτήν που δίνει για την  $f_1$  αν  $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$  παντού στο  $R$ . Συνεπώς, αν  $f$  είναι οποιαδήποτε συνάρτηση την οποία θέλουμε να ολοκληρώσουμε επί του  $R$  και  $g$  και  $h$  είναι κλιμακωτές συναρτήσεις επί του  $R$  τέτοιες ώστε  $g(x, y) \leq f(x, y) \leq h(x, y)$  για κάθε  $(x, y)$  στο  $R$ , ο αριθμός  $\iint_R f(x, y) dx dy$  τον οποίο προσπαθούμε να ορίσουμε πρέπει να βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς  $\iint_R g(x, y) dx dy$  και  $\iint_R h(x, y) dx dy$  οι οποίοι έχουν ήδη οριστεί. Αυτή η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί το ολοκλήρωμα μπορεί να μετατραπεί σε ορισμό αν την αναδιατυπώσουμε ως εξής.

**Εναλλακτικός ορισμός του διπλού ολοκληρώματος.** Μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα ορθογώνιο  $R$  καλείται *ολοκληρώσιμη* στο  $R$  αν, για οποιονδήποτε θετικό αριθμό  $\epsilon$ , υπάρχουν κλιμακωτές συναρτήσεις  $g(x, y)$  και  $h(x, y)$  με  $g(x, y) \leq f(x, y) \leq h(x, y)$  για κάθε  $(x, y)$  στο  $R$  τέτοιες ώστε η διαφορά

$$\iint_R h(x, y) dx dy - \iint_R g(x, y) dx dy$$

να είναι μικρότερη από  $\epsilon$ . Θα καλούμε αυτού του είδους τις κλιμακωτές συναρτήσεις  $g$  και  $h$  «περιβάλλουσες συναρτήσεις». Όταν ισχύει αυτή η συνθήκη, αποδεικνύεται ότι υπάρχει ένας μόνο αριθμός  $I$  με την ιδιότητα ότι

$$\iint_R g(x, y) dx dy \leq I \leq \iint_R h(x, y) dx dy$$

για περιβάλλουσες συναρτήσεις  $g$  και  $h$  όπως παραπάνω. Ο αριθμός  $I$  καλείται **ολοκλήρωμα** της  $f$  επί του  $R$  και συμβολίζεται με  $\iint_R f(x, y) dx dy$ .

**Παράδειγμα 2.** Έστω  $R$  το ορθογώνιο  $0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3$ , και έστω  $f(x, y) = x^2 y$ . Επιλέξτε μια κλιμακωτή συνάρτηση  $h(x, y) \geq f(x, y)$  για να αποδείξετε ότι  $\iint_R f(x, y) dx dy \leq 25$ .

**Λύση.** Το ολοκλήρωμα της σταθερής συνάρτησης  $h(x, y) = 12 \geq f(x, y)$  είναι  $12 \times 4 = 48$ , άρα παίρνουμε την πολύ χοντρική εκτίμηση  $\iint_R f(x, y) dx dy \leq 48$ . Για να πάρουμε μια καλύτερη, διαιρούμε το  $R$  σε τέσσερα κομμάτια:

$$\begin{aligned} R_1 &= [0, 1] \times [1, 2], & R_3 &= [1, 2] \times [1, 2], \\ R_2 &= [0, 1] \times [2, 3], & R_4 &= [1, 2] \times [2, 3]. \end{aligned}$$

Έστω  $h$  η συνάρτηση που προκύπτει αν πάρουμε τη μέγιστη τιμή της  $f$  σε κάθε υποορθογώνιο (υπολογισμένη στην άνω δεξιά γωνία), δηλαδή

$$h(x, y) = 2 \text{ στο } R_1, 3 \text{ στο } R_2, 8 \text{ στο } R_3 \text{ και } 12 \text{ στο } R_4.$$

Επομένως, το ολοκλήρωμα της  $h$  είναι

$$\iint_R h(x, y) dx dy = 2 \times 1 + 3 \times 1 + 8 \times 1 + 12 \times 1 = 25.$$

Αφού  $h \geq f$ , παίρνουμε

$$\iint_R f(x, y) dx dy \leq 25. \quad \diamond$$

**Εναλλακτική απόδειξη της αναγωγής σε διαδοχικά ολοκληρώματα.** Η μέθοδος που στηρίζεται στα άνω και κάτω αθροίσματα μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την απόδειξη της αναγωγής σε διαδοχικά ολοκληρώματα. Ακολουθεί αυτή η (προαιρετική) απόδειξη. Αρχικά θα ασχοληθούμε με τις κλιμακωτές συναρτήσεις. Έστω  $g$  μια κλιμακωτή συνάρτηση, με  $g(x, y) = k_{ij}$  στο ορθογώνιο  $(t_{i-1}, t_i) \times (s_{j-1}, s_j)$ , οπότε

$$\iint_D g(x, y) dx dy = \sum_{t=1, j=1}^{n, m} k_{ij} \Delta t_i \Delta s_j.$$

Αν διατάξουμε τους όρους  $k_{ij} \Delta t_i \Delta s_j$  του αθροίσματος σε έναν ορθογώνιο πίνακα, μπορούμε να τους αθροίσουμε αρχικά κατά γραμμή και κατόπιν να αθροίσουμε τα μερικά αυτά αθροίσματα, ακριβώς όπως στο βιβλίο (βλ. Σχήμα 5.2.3):

Ο συντελεστής  $\sum_{j=1}^n k_{ij} \Delta t_i$  του  $\Delta s_j$  στο άθροισμα της  $j$ -οστής γραμμής ισούται με  $\int_a^b g(x, y) dx$  για κάθε  $y$  με  $s_{j-1} < y < s_j$ , αφού, για σταθερό  $y$ , η  $g(x, y)$  είναι κλιμακωτή συνάρτηση του  $x$ . Άρα το ολοκλήρωμα  $\int_a^b g(x, y) dx$  είναι κλιμακωτή συνάρτηση του  $y$ , και το ολοκλήρωμά του ως προς  $y$  είναι το εξής άθροισμα:

$$\int_c^d \left[ \int_a^b g(x, y) dx \right] dy = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{t=1}^n k_{ij} \Delta t_i \right) \Delta s_j = \iint_D g(x, y) dx dy.$$

$$\begin{array}{rcl}
k_{11}\Delta t_1\Delta s_1 k_{21}\Delta t_2\Delta s_1 \dots k_{n1}\Delta t_n\Delta s_1 & \rightarrow & \left( \sum_{i=1}^n k_{i1}\Delta t_i \right) \Delta s_1 \\
k_{12}\Delta t_1\Delta s_2 k_{22}\Delta t_2\Delta s_2 \dots k_{n2}\Delta t_n\Delta s_2 & \rightarrow & \left( \sum_{i=1}^n k_{i2}\Delta t_i \right) \Delta s_2 \\
\vdots & & \vdots \\
k_{1m}\Delta t_1\Delta s_m k_{2m}\Delta t_2\Delta s_m \dots k_{nm}\Delta t_n\Delta s_m & \rightarrow & \left( \sum_{i=1}^n k_{im}\Delta t_i \right) \Delta s_m
\end{array} \quad \downarrow$$

$$\frac{\sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n k_{ij}\Delta t_i \right) \Delta s_j}{}$$

ΣΧΗΜΑ 5.2.3. Αναγωγή σε διαδοχικά ολοκληρώματα.

Με αντίστοιχο τρόπο, αθροίζοντας πρώτα κατά στήλες και κατόπιν κατά γραμμές, παίρνουμε

$$\iint_D g(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_c^d g(x, y) dy \right] dx.$$

Άρα το θεώρημα ισχύει για κλιμακωτές συναρτήσεις.

Έστω τώρα ότι η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη στο  $D = [a, b] \times [c, d]$  και ας υποθέσουμε ότι το διαδοχικό ολοκλήρωμα  $\int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx$  υπάρχει. Θα συμβολίσουμε αυτό το ολοκλήρωμα με  $S_0$  και θα δείξουμε ότι κάθε κάτω άθροισμα της  $f$  στο  $D$  είναι μικρότερο ή ίσο από το  $S_0$ , ενώ κάθε άνω άθροισμα είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το  $S_0$ , οπότε το  $S_0$  πρέπει να είναι το ολοκλήρωμα της  $f$  επί του  $D$ .

Για να προχωρήσουμε, θεωρούμε ότι  $g$  είναι οποιαδήποτε κλιμακωτή συνάρτηση τέτοια ώστε

$$g(x, y) \leq f(x, y) \quad (1)$$

για κάθε  $(x, y)$  στο  $D$ . Ολοκληρώνοντας την (1) ως προς  $y$  και χρησιμοποιώντας την «μονοτονία» του ολοκληρώματος μίας μεταβλητής, παίρνουμε

$$\int_c^d g(x, y) dy \leq \int_c^d f(x, y) dy \quad (2)$$

για κάθε  $x$  στο  $[a, b]$ . Ολοκληρώνοντας την (2) ως προς  $x$  και χρησιμοποιώντας ξανά τη μονοτονία, παίρνουμε

$$\int_a^b \left[ \int_c^d g(x, y) dy \right] dx \leq \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx. \quad (3)$$

Αφού η  $g$  είναι κλιμακωτή συνάρτηση, από το πρώτο μέρος της απόδειξης έπεται ότι το αριστερό μέλος της (3) ισούται με το κάτω άθροισμα  $\iint_D g(x, y) dx dy$ . Το δεξιό μέλος της (3) είναι απλώς  $S_0$ , άρα δείξαμε ότι κάθε κάτω άθροισμα είναι μικρότερο ή ίσο από το  $S_0$ . Η απόδειξη ότι κάθε άνω άθροισμα είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το  $S_0$  είναι παρόμοια, οπότε έχουμε τελειώσει.



## 5.6 Τεχνικά θεωρήματα ολοκλήρωσης

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται οι βασικές ιδέες των αποδείξεων της ύπαρξης και της προσθετικότητας του ολοκληρώματος που διατυπώθηκαν στην Ενότητα 5.2 του βιβλίου. Για τις αποδείξεις αυτές απαιτείται γνώση πιο προχωρημένων εννοιών από όσες χρειάζονται για το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου.

**Ομοιόμορφη συνέχεια.** Σε αυτό το σημείο αυτό θα χρειαστούμε την έννοια της ομοιόμορφης συνέχειας και της πληρότητας των πραγματικών αριθμών, ζητήματα που καλύπτονται πληρέστερα σε εισαγωγικά μαθήματα μαθηματικής ανάλυσης ή θεωρίας πραγματικών συναρτήσεων.

**Ορισμός.** Έστω  $D \subset \mathbb{R}^n$  και  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ . Υπενθυμίζουμε ότι η  $f$  καλείται συνεχής στο  $\mathbf{x}_0 \in D$  αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει αριθμός  $\delta > 0$  τέτοιος ώστε για  $\mathbf{x} \in D$  και  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$  να έχουμε  $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ . Λέμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $D$  αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του  $D$ .

Η συνάρτηση  $f$  καλείται **ομοιόμορφα συνεχής** στο  $D$  αν για κάθε αριθμό  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε αν  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$  και  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$  να έχουμε  $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon$ .

Η βασική διαφορά μεταξύ συνέχειας και ομοιόμορφης συνέχειας είναι ότι στη συνέχεια το  $\delta$  μπορεί να εξαρτάται και από το  $\mathbf{x}_0$  εκτός από το  $\varepsilon$ , ενώ στην ομοιόμορφη συνέχεια το  $\delta$  εξαρτάται μόνο από το  $\varepsilon$ . Επομένως κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση είναι και συνεχής. Ένα παράδειγμα συνάρτησης που είναι συνεχής αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής δίνεται στην Άσκηση 2 αυτού του συμπληρώματος. Η διάκριση μεταξύ της έννοιας της συνέχειας και της ομοιόμορφης συνέχειας μπορεί να διατυπωθεί και διαφορετικά: Για μια συνάρτηση  $f$  που είναι συνεχής αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής δεν μπορούμε να επιλέξουμε το  $\delta$  ανεξάρτητα από το σημείο του πεδίου ορισμού (το  $\mathbf{x}_0$  στον ορισμό). Ο ορισμός της ομοιόμορφης συνέχειας λέει ξεκάθαρα ότι αν μας δοθεί ένα  $\varepsilon > 0$ , μπορούμε να βρούμε ένα  $\delta$  ανεξάρτητο από οποιοδήποτε σημείο του  $D$ .

Υπενθυμίζουμε από την Ενότητα 3.3 ότι ένα σύνολο  $D \subset \mathbb{R}^n$  είναι **φραγμένο** αν υπάρχει αριθμός  $M > 0$  τέτοιος ώστε  $\|\mathbf{x}\| \leq M$  για κάθε  $\mathbf{x} \in D$ . Ένα σύνολο είναι **κλειστό** αν περιέχει όλα τα συνοριακά του σημεία. Άρα ένα σύνολο είναι φραγμένο αν υπάρχει κάποια (μεγάλη) μπάλα που το περιέχει πλήρως. Το θεώρημα που ακολουθεί λέει ότι υπό ορισμένες συνθήκες μια συνεχής συνάρτηση είναι και ομοιόμορφα συνεχής.

**Θεώρημα. Αρχή της ομοιόμορφης συνέχειας.** Κάθε συνάρτηση που είναι συνεχής σε ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο  $D$  του  $\mathbb{R}^n$  είναι ομοιόμορφα συνεχής στο  $D$ .

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος θα μας έκανε να απομακρυνθούμε πολύ από το στόχο μας,<sup>1</sup> όμως μπορούμε να αποδείξουμε μια ειδική περίπτωση του, η οποία είναι αρκετή για τις περισσότερες περιπτώσεις που μας ενδιαφέρουν.

**Απόδειξη ειδικής περίπτωσης.** Υποθέτουμε ότι  $D = [a, b]$  είναι ένα κλειστό διάστημα της ευθείας των πραγματικών αριθμών, ότι η  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής, ότι η

<sup>1</sup>Η απόδειξη υπάρχει σε βιβλία μαθηματικής ανάλυσης. Βλ. για παράδειγμα J. Marsden και M. Hoffman, *Elementary Classical Analysis*, 2η έκδοση, Freeman, New York, 1993, ή W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3η έκδοση, McGraw-Hill, New York, 1976.

$df/dx$  υπάρχει στο ανοιχτό διάστημα  $(a, b)$  και ότι η  $df/dx$  είναι φραγμένη (δηλαδή υπάρχει σταθερά  $C > 0$  τέτοια ώστε  $|df(x)/dx| \leq C$  για κάθε  $x$  στο  $(a, b)$ ). Για να δείξουμε ότι από αυτές τις συνθήκες έπεται ότι η  $f$  είναι ομοιόμορφα συνεχής, χρησιμοποιούμε το θεώρημα μέσης τιμής ως εξής: Έστω ότι μας δίνεται ένα  $\varepsilon > 0$  και έστω ότι τα  $x$  και  $y$  ανήκουν στο  $D$ . Από το θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$$

για κάποιο  $c$  ανάμεσα στο  $x$  και το  $y$ . Επειδή έχουμε υποθέσει ότι η παράγωγος είναι φραγμένη,

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|.$$

Έστω  $\delta = \varepsilon/C$ . Αν  $|x - y| < \delta$ , τότε

$$|f(x) - f(y)| < C \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

Άρα η  $f$  είναι ομοιόμορφα συνεχής. (Προσέξτε ότι το  $\delta$  δεν εξαρτάται ούτε από το  $x$  ούτε από το  $y$ , το οποίο είναι κρίσιμο κομμάτι του ορισμού.)

Αυτός ο τρόπος απόδειξης μπορεί να ακολουθηθεί και για χωρία του  $\mathbb{R}^n$  που είναι κυρτά, δηλαδή για χωρία  $D$  όπου, για οποιαδήποτε δύο σημεία  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  του  $D$ , το ευθύγραμμο τμήμα  $\mathbf{c}(t) = t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , που τα συνδέει ανήκει επίσης στο  $D$ . Θεωρούμε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη (σε ένα ανοιχτό σύνολο που περιέχει το  $D$ ) και ότι  $\|\nabla f(\mathbf{x})\| \leq C$  για κάποια σταθερά  $C$ . Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στη συνάρτηση  $h(t) = f(\mathbf{c}(t))$ , παίρνουμε ένα σημείο  $t_0$  τέτοιο ώστε

$$h(1) - h(0) = [h'(t_0)][1 - 0]$$

ή

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) - h'(t_0) = \nabla f(\mathbf{c}(t_0)) \cdot \mathbf{c}'(t_0) = \nabla f(\mathbf{c}(t_0)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

λόγω του κανόνα της αλυσίδας. Άρα από την ανισότητα Cauchy-Schwarz,

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq \|\nabla f(\mathbf{c}(t_0))\| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq C \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Στη συνέχεια, όπως παραπάνω, δεδομένου  $\varepsilon > 0$ , μπορούμε να θέσουμε  $\delta = \varepsilon/C$ .  $\square$

**Πληρότητα.** Θα προχωρήσουμε τώρα στην έννοια της *ακολουθίας Cauchy* πραγματικών αριθμών. Στον ορισμό των αθροισμάτων Riemann πήραμε μια ακολουθία αριθμών  $\{S_n\}$ ,  $n = 1, \dots$ . Θα ήταν ωραίο να μπορούσαμε να πούμε ότι αυτή η ακολουθία αριθμών συγκλίνει στο  $S$  (ή έχει όριο το  $S$ ), αλλά πώς μπορούμε να πάρουμε ένα τέτοιο όριο; Γενικά, δεν γνωρίζουμε τίποτα παραπάνω για την  $S_n$  πέρα από το ότι είναι το άθροισμα Riemann μιας (φερ' ειπείν, συνεχούς) συνάρτησης, αλλά, μολονότι δεν το έχουμε αποδείξει ακόμη, η πληροφορία αυτή θα πρέπει να είναι αρκετή για να είμαστε βέβαιοι ότι συγκλίνει.

Άρα πρέπει να προσδιορίσουμε μια ιδιότητα των ακολουθιών που να διασφαλίζει ότι συγκλίνουν. Θα ορίσουμε μια κλάση ακολουθιών που καλούνται ακολουθίες Cauchy, και κατόπιν θα θεωρήσουμε ως αξίωμα του συστήματος των πραγματικών

αριθμών ότι κάθε τέτοια ακολουθία συγκλίνει σε ένα όριο.<sup>2</sup> Η διαπίστωση, τον δέκατο ένατο αιώνα, ότι ένα τέτοιο αξίωμα ήταν απαραίτητο για τη θεμελίωση του απειροστικού λογισμού αποτέλεσε σημαντικό σταθμό στην ιστορία των μαθηματικών και προετοίμασε τον δρόμο για τη σύγχρονη αυστηρή ανάπτυξη της μαθηματικής ανάλυσης. Θα αναφέρουμε περισσότερα πάνω σε αυτό σε λίγο.

**Ορισμός.** Λέμε ότι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών  $\{S_n\}$ ,  $n = 1, \dots$ , ικανοποιεί το κριτήριο Cauchy αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $N$  τέτοιο ώστε για κάθε  $m, n \geq N$  να έχουμε  $|S_n - S_m| < \varepsilon$ .

Αν μια ακολουθία  $S_n$  συγκλίνει σε ένα όριο  $S$ , τότε η  $S_n$  είναι ακολουθία Cauchy. Για να το επιβεβαιώσουμε χρησιμοποιούμε τον ορισμό: Για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $N$  τέτοιο ώστε για κάθε  $n \geq N$  να έχουμε  $|S_n - S| < \varepsilon$ . Δεδομένου  $\varepsilon > 0$ , επιλέγουμε  $N_1$  τέτοιο ώστε για  $n \geq N_1$  να έχουμε  $|S_n - S| < \varepsilon/2$  (χρησιμοποιούμε τον ορισμό με το  $\varepsilon/2$  στη θέση του  $\varepsilon$ ). Επομένως, αν  $n, m \geq N_1$ , τότε

$$|S_n - S_m| = |S_n - S + S - S_m| \leq |S_n - S| + |S - S_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

άρα αποδείξαμε τον ισχυρισμό. Το θεώρημα της πληρότητας λέει ότι ισχύει και το αντίστροφο:

**Θεώρημα πληρότητας των πραγματικών αριθμών.** Κάθε ακολουθία Cauchy  $\{S_n\}$  συγκλίνει σε κάποιο όριο  $S$ .

**Ιστορικό σημείωμα.** Ο Augustin Louis Cauchy (1789–1857), ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς όλων των εποχών, όρισε αυτό που σήμερα καλούμε ακολουθίες Cauchy στο βιβλίο του *Cours d'analyse*, που εκδόθηκε το 1821. Το βιβλίο αυτό ήταν μια βασική εργασία πάνω στη θεμελίωση της μαθηματικής ανάλυσης, μολονότι, με τα σημερινά κριτήρια, θα θεωρούσαμε πως είναι κάπως πρόχειρα γραμμένο. Ο Cauchy γνώριζε ότι μια συγκλίνουσα ακολουθία ήταν «Cauchy» και είχε κάνει την παρατήρηση ότι μια ακολουθία Cauchy συγκλίνει. Δεν είχε κάποια απόδειξη, ούτε θα μπορούσε να έχει, αφού μια τέτοια απόδειξη απαιτεί την αυστηρή ανάπτυξη του συστήματος των πραγματικών αριθμών που επιτεύχθηκε μόλις το 1872 από τον Γερμανό μαθηματικό Georg Cantor (1845–1918).

Είναι πλέον σαφές τι πρέπει να κάνουμε για να διασφαλίσουμε ότι τα αθροίσματα Riemann  $\{S_n\}$  μιας, φερ' ειπείν, συνεχούς συνάρτησης επί ενός ορθογωνίου συγκλίνουν σε κάποιο όριο  $S$ , αποδεικνύοντας έτσι ότι οι συνεχείς συναρτήσεις επί ορθογωνίων είναι ολοκληρώσιμες: πρέπει να δείξουμε ότι η  $\{S_n\}$  είναι ακολουθία Cauchy. Για να το αποδείξουμε, θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της ομοιόμορφης συνέχειας. Η ολοκληρωσιμότητα των συνεχών συναρτήσεων θα αποτελέσει συνέπεια των δύο λημμάτων που ακολουθούν.

**Λήμμα 1.** Αν  $f$  είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα ορθογώνιο  $R$  του επιπέδου και  $\{S_n\}$  μια ακολουθία αθροισμάτων Riemann της  $f$ , τότε η  $\{S_n\}$  συγκλίνει σε κάποιον αριθμό  $S$ .

<sup>2</sup>Στα βιβλία μαθηματικής ανάλυσης, όπως είναι αυτά που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη υποσημείωση, μερικές φορές χρησιμοποιούνται διαφορετικά αξιώματα, όπως η ιδιότητα του ελάχιστου άνω φράγματος. Στην περίπτωση αυτή, το αξίωμα της πληρότητας μετατρέπεται σε θεώρημα.

**Απόδειξη.** Δεδομένου ενός ορθογωνίου  $R \subset \mathbb{R}^2$ ,  $R = [a, b] \times [c, d]$ , έχουμε την ορθογώνια διαμέριση  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ,  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$  του  $R$ , που αναφέραμε στην Ενότητα 5.2 του βιβλίου. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\Delta x = x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n}, \quad \Delta y = y_{k+1} - y_k = \frac{d-c}{n},$$

και

$$S_n = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta x \Delta y,$$

όπου  $\mathbf{c}_{jk}$  είναι ένα αυθαίρετα επιλεγμένο σημείο του  $R_{jk} = [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$ . Η ακολουθία  $\{S_n\}$  καθορίζεται μόνο από την επιλογή των σημείων  $\mathbf{c}_{jk}$ .

Για τις ανάγκες της απόδειξης θα χρησιμοποιήσουμε έναν ελαφρώς πιο σύνθετο αλλά πολύ ακριβή συμβολισμό: θέτουμε

$$\Delta x^n = \frac{b-a}{n} \quad \text{και} \quad \Delta y^n = \frac{d-c}{n}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτόν τον συμβολισμό, έχουμε

$$S_n = \sum_{j,k}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta x^n \Delta y^n. \quad (1)$$

Για να δείξουμε ότι η  $\{S_n\}$  ικανοποιεί το κριτήριο Cauchy, πρέπει να δείξουμε ότι δεδομένου  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $N$  τέτοιο ώστε για κάθε  $n, m \geq N$  να έχουμε  $|S_n - S_m| \leq \varepsilon$ . Σύμφωνα με την αρχή της ομοιόμορφης συνέχειας, η  $f$  είναι ομοιόμορφα συνεχής στο  $R$ . Επομένως, δεδομένου  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε για  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R$ ,  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$  να έχουμε  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon/[2 \text{εμβαδόν}(R)]$  (η ποσότητα  $\varepsilon/[2 \text{εμβαδόν}(R)]$  χρησιμοποιείται στη θέση του  $\varepsilon$  στον ορισμό). Έστω ότι το  $N$  είναι τόσο μεγάλο ώστε για οποιοδήποτε  $m \geq N$  η διάμετρος (το μήκος της διαγωνίου) οποιοδήποτε υπο-ορθογωνίου  $R_{jk}$  της  $m$ -οστής ορθογώνιας διαμέρισης του  $R$  να είναι μικρότερη από  $\delta$ . Άρα αν τα  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  είναι σημεία του ίδιου υπο-ορθογωνίου, θα έχουμε την ανισότητα  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon/[2 \text{εμβαδόν}(R)]$ .

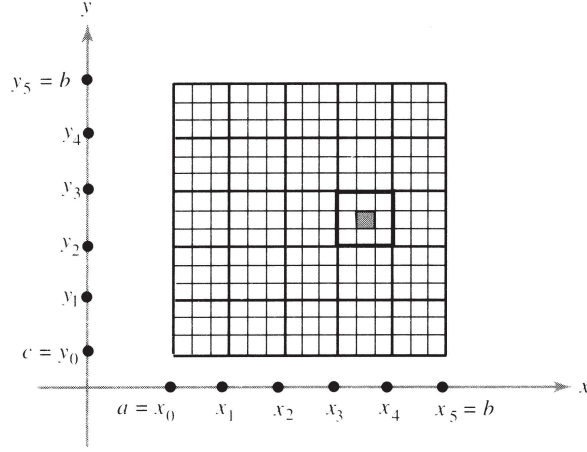
Επιλέγουμε σταθερά  $m, n \geq N$ . Θα δείξουμε ότι  $|S_n - S_m| < \varepsilon$ . Με αυτό αποδεικνύεται ότι η  $\{S_n\}$  είναι ακολουθία Cauchy και επομένως συγκλίνει. Θεωρούμε την  $mn$ -οστή = ( $m$  επί  $n$ )-οστή ορθογώνια διαμέριση του  $R$ . Έχουμε

$$S_{mn} = \sum_{r,t} f(\tilde{\mathbf{c}}_{rt}) \Delta x^{mn} \Delta y^{mn},$$

όπου  $\tilde{\mathbf{c}}_{rt}$  είναι ένα σημείο του  $rt$ -οστού υπο-ορθογωνίου. Προσέξτε ότι κάθε υπο-ορθογώνιο της  $mn$ -οστής διαμέρισης είναι υπο-ορθογώνιο και της  $m$ -οστής και της  $n$ -οστής ορθογώνιας διαμέρισης (βλ. Σχήμα 5.6.1).

Θα συμβολίσουμε τα υπο-ορθογώνια της  $mn$ -οστής υποδιαίρεσης με  $\tilde{R}_{rt}$  και τα υπο-ορθογώνια της  $n$ -οστής υποδιαίρεσης με  $R_{jk}$ . Άρα για κάθε  $\tilde{R}_{rt}$  έχουμε ότι  $\tilde{R}_{rt} \subset R_{jk}$  για κάποιο  $jk$ , οπότε μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (1) ως

$$S_n = \sum_{j,k}^{n-1} \left( \sum_{\tilde{R}_{rt} \subset R_{jk}} f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta x^{mn} \Delta y^{mn} \right). \quad (1')$$



ΣΧΗΜΑ 5.6.1. Το σκιασμένο κουτί είναι ένα υπο-ορθογώνιο της  $mn$ -οστής διαμέρισης και το κουτί με το έντονο περίγραμμα ένα υπο-ορθογώνιο της  $m$ -οστής διαμέρισης.

Εδώ χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι

$$\sum_{\tilde{R}_{rt} \subset R_{jk}} f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta x^{mn} \Delta y^{mn} = f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta x^n \Delta y^n,$$

όπου το άθροισμα υπολογίζεται ως προς όλα τα υπο-ορθογώνια της  $mn$ -οστής υποδιαίρεσης που περιέχονται σε ένα συγκεκριμένο ορθογώνιο  $R_{jk}$  της  $n$ -οστής υποδιαίρεσης. Έχουμε επίσης την ταυτότητα

$$S_{mn} = \sum_{r,t}^{mn-1} f(\tilde{\mathbf{c}}_{rt}) \Delta x^{mn} \Delta y^{mn}. \quad (2)$$

Αυτή η σχέση μπορεί να γραφτεί και ως

$$S_{mn} = \sum_{j,k} \sum_{\tilde{R}_{rt} \subset R_{jk}} f(\tilde{\mathbf{c}}_{rt}) \Delta x^{mn} \Delta y^{mn}, \quad (2')$$

όπου στην εξίσωση (2') αθροίζουμε πρώτα ως προς τα υπο-ορθογώνια της  $mn$ -οστής διαμέρισης που περιέχονται σε ένα συγκεκριμένο  $R_{jk}$  και στη συνέχεια αθροίζουμε ως προς  $j, k$ . Αφαιρώντας την εξίσωση (2') από την εξίσωση (1'), παίρνουμε

$$\begin{aligned} |S_n - S_{mn}| &= \left| \sum_{j,k} \sum_{\tilde{R}_{rt} \subset R_{jk}} [f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta x^{mn} \Delta y^{mn} - f(\tilde{\mathbf{c}}_{rt}) \Delta x^{mn} \Delta y^{mn}] \right| \\ &\leq \sum_{j,k} \sum_{\tilde{R}_{rt} \subset R_{jk}} |f(\mathbf{c}_{jk}) - f(\tilde{\mathbf{c}}_{rt})| \Delta x^{mn} \Delta y^{mn}. \end{aligned}$$

Λόγω του τρόπου με τον οποίο επιλέξαμε τα  $\delta$  και  $N$ , έχουμε  $|f(\mathbf{c}_{jk}) - f(\tilde{\mathbf{c}}_{rt})| < \varepsilon/[2 \text{εμβαδόν}(R)]$ , οπότε η παραπάνω ανισότητα γράφεται

$$|S_n - S_{mn}| \leq \sum_{j,k} \sum_{\tilde{R}_{rt} \subset R_{jk}} \frac{\varepsilon}{2 \text{εμβαδόν}(R)} \Delta x^{mn} \Delta y^{mn} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Άρα  $|S_n - S_{mn}| < \varepsilon/2$ , και με αντίστοιχο τρόπο αποδεικνύεται ότι  $|S_n - S_{mn}| < \varepsilon/2$ . Δεδομένου ότι

$$|S_n - S_m| = |S_n - S_{mn} + S_{mn} - S_m| \leq |S_n - S_{mn}| + |S_{mn} - S_m| < \varepsilon$$

για  $m, n \geq N$ , δείξαμε ότι η  $\{S_n\}$  ικανοποιεί το κριτήριο Cauchy και άρα έχει ένα όριο  $S$ .  $\square$

Έχουμε ήδη σημειώσει ότι κάθε άθροισμα Riemann εξαρτάται από την επιλογή μιας συλλογής σημείων  $\mathbf{c}_{jk}$ . Για να δείξουμε ότι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα ορθογώνιο  $R$  είναι ολοκληρώσιμη, πρέπει να αποδείξουμε επιπλέον ότι το όριο  $S$  που βρήκαμε στο Λήμμα 1 είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων  $\mathbf{c}_{jk}$ .

**Λήμμα 2.** Το όριο  $S$  στο Λήμμα 1 δεν εξαρτάται από την επιλογή των σημείων  $\mathbf{c}_{jk}$ .

**Απόδειξη.** Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο ακολουθίες άθροισμάτων Riemann  $\{S_n\}$  και  $\{S_n^*\}$  που προκύπτουν μέσω της επιλογής δύο διαφορετικών συνόλων σημείων, φερ' ειπείν των  $\mathbf{c}_{jk}$  και  $\mathbf{c}_{jk}^*$  σε κάθε  $n$ -οστή διαμέριση. Από το Λήμμα 1 γνωρίζουμε ότι η  $\{S_n\}$  συγκλίνει σε κάποιον αριθμό  $S$  και ότι η  $\{S_n^*\}$  πρέπει να συγκλίνει και αυτή σε κάποιον αριθμό, φερ' ειπείν  $S^*$ . Θέλουμε να δείξουμε ότι  $S = S^*$ . Θα το κάνουμε αποδεικνύοντας ότι δεδομένου οποιουδήποτε  $\varepsilon > 0$ ,  $|S - S^*| < \varepsilon$ , από το οποίο έπεται ότι το  $S$  πρέπει να ισούται με το  $S^*$  (γιατί;).

Για να ξεκινήσουμε, γνωρίζουμε ότι η  $f$  είναι ομοιόμορφα συνεχής στο  $R$ . Συνεπώς, δεδομένου  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει  $\delta$  τέτοιο ώστε  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon/[3 \text{εμβαδόν}(R)]$  για  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$ . Επιλέγουμε το  $N$  τόσο μεγάλο έτσι ώστε για  $n \geq N$  η διάμετρος κάθε υπο-ορθογωνίου της  $n$ -οστής κανονικής διαμέρισης να είναι μικρότερη από  $\delta$ . Αφού  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  και  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^* = S^*$ , μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε επιλέξει το  $N$  τόσο μεγάλο ώστε για  $n \geq N$  να έχουμε  $|S_n - S| < \varepsilon/3$  και  $|S_n^* - S^*| < \varepsilon/3$ . Επιπλέον, για  $n \geq N$ , από την ομοιόμορφη συνέχεια γνωρίζουμε ότι αν  $\mathbf{c}_{jk}$  και  $\mathbf{c}_{jk}^*$  είναι σημεία του ίδιου υπο-ορθογωνίου  $R_{jk}$  της  $n$ -οστής διαμέρισης, τότε  $|f(\mathbf{c}_{jk}) - f(\mathbf{c}_{jk}^*)| < \varepsilon/[3 \text{εμβαδόν}(R)]$ . Επομένως,

$$\begin{aligned} |S_n - S_n^*| &= \left| \sum_{j,k} f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta x^n \Delta y^n - \sum_{j,k} f(\mathbf{c}_{jk}^*) \Delta x^n \Delta y^n \right| \\ &\leq \sum_{j,k} |f(\mathbf{c}_{jk}) - f(\mathbf{c}_{jk}^*)| \Delta x^n \Delta y^n < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια γράφουμε

$$|S - S^*| = |S - S_n + S_n - S_n^* + S_n^* - S^*| \leq |S - S_n| + |S_n - S_n^*| + |S_n^* - S^*| < \varepsilon,$$

οπότε το λήμμα αποδείχθηκε.  $\square$

Με συνδυασμό των Λημμάτων 1 και 2 αποδεικνύεται το Θεώρημα 1 της Ενότητας 5.2 του βιβλίου:

**Θεώρημα 1 της Ενότητας 5.2 του βιβλίου.** *Κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη επί ενός ορθογωνίου  $R$  είναι ολοκληρώσιμη.*

**Ιστορικό σημείωμα.** Ο Cauchy παρουσίασε την πρώτη δημοσιευμένη απόδειξη αυτού του θεωρήματος στο έργο του *Résumé* το 1823, όπου επισημαίνει την ανάγκη απόδειξης της ύπαρξης του ολοκληρώματος ως ορίου ενός αθροίσματος. Στο συγκεκριμένο κείμενο αρχικά ασχολείται με τις συνεχείς συναρτήσεις (όπως και εμείς), αλλά σε ένα διάστημα  $[a, b]$ . (Η απόδειξη είναι ουσιαστικά η ίδια.) Ωστόσο, η απόδειξή του δεν ήταν αυστηρή, αφού δεν χρησιμοποιούσε την ομοιόμορφη συνέχεια, η οποία δεν υπήρχε ως έννοια εκείνη την εποχή.

Η έννοια του αθροίσματος Riemann  $S_n$  για μια συνάρτηση  $f$  ασφαλώς προϋπήρχε του Bernhard Riemann (1826–1866). Τα αθροίσματα φέρουν πιθανώς το όνομά του διότι ανέπτυξε μια θεωρητική προσέγγιση για τη μελέτη της ολοκλήρωσης σε ένα θεμελιώδες κείμενο πάνω στις τριγωνομετρικές σειρές το 1854. Η προσέγγισή του, μολοντί γενικεύτηκε αργότερα από τον Darboux (1875) και τον Stieltjes (1894), έμελλε να διαρκέσει πάνω από μισό αιώνα προτού επεκταθεί μέσω της θεωρίας που παρουσίασε στην μαθηματική κοινότητα ο Lebesgue το 1902. Η προσέγγιση της θεωρίας ολοκλήρωσης που εισήγαγε ο Lebesgue διδάσκεται συνήθως σε μεταπτυχιακά μαθήματα μαθηματικών.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2 της Ενότητας 5.2 αφήνεται στον αναγνώστη στις Ασκήσεις 4 έως 6 που υπάρχουν στο τέλος αυτής της ενότητας. Οι βασικές ιδέες περιέχονται ουσιαστικά στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.

**Θεώρημα προσθετικότητας.** Επόμενος στόχος μας είναι να παρουσιάσουμε μια απόδειξη της ιδιότητας (iv) του ολοκληρώματος της Ενότητας 5.2, συγκεκριμένα της προσθετικότητάς του. Ωστόσο, λόγω κάποιων τεχνικών δυσκολιών που ενέχει η απόδειξη αυτής της ιδιότητας στην πλήρη της γενικότητα, θα την αποδείξουμε μόνο για την περίπτωση όπου η  $f$  είναι συνεχής.

**Θεώρημα. Προσθετικότητα του ολοκληρώματος.** *Έστω  $R_1$  και  $R_2$  δύο ξένα μεταξύ τους ορθογώνια (ορθογώνια των οποίων η τομή δεν περιέχει κανένα ορθογώνιο) τέτοια ώστε το  $Q = R_1 \cup R_2$  να είναι και αυτό ένα ορθογώνιο, όπως στο Σχήμα 5.6.2. Αν  $f$  είναι μια συνάρτηση που είναι συνεχής στο  $Q$ , και συνεπώς και σε κάθε  $R_i$ , τότε*

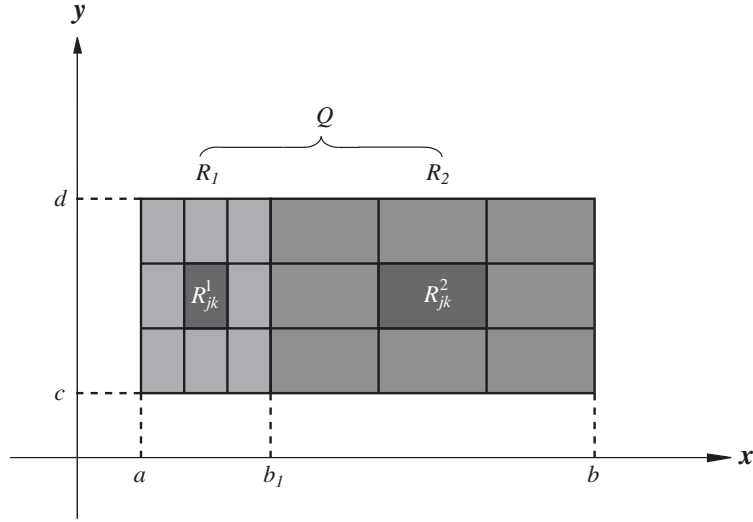
$$\iint_Q f = \iint_{R_1} f + \iint_{R_2} f. \quad (3)$$

**Απόδειξη.** Η απόδειξη στηρίζεται σε ιδέες που παρουσιάστηκαν ήδη στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.

Το γεγονός ότι η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη στα  $Q$ ,  $R_1$  και  $R_2$  έπεται από το Θεώρημα 1. Άρα και τα τρία ολοκληρώματα στην εξίσωση (3) υπάρχουν, οπότε χρειάζεται να αποδείξουμε μόνο την ισότητα.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$R_1 = [a, b_1] \times [c, d] \text{ και } R_2 = [b_1, b] \times [c, d]$$

ΣΧΗΜΑ 5.6.2. Στοιχεία μιας κανονικής διαμέρισης των  $R_1$  και  $R_2$ .

(βλ. Σχήμα 5.6.2). Πρέπει και πάλι να αναπτύξουμε τον κατάλληλο συμβολισμό. Θετούμε

$$\Delta x_1^n = \frac{b_1 - a}{n}, \quad \Delta x_2^n = \frac{b - b_1}{n}, \quad \Delta x^n = \frac{b - a}{n} \quad \text{και} \quad \Delta y^n = \frac{d - c}{n}.$$

Έστω

$$S_n^1 = \sum_{j,k} f(\mathbf{c}_{jk}^1) \Delta x_1^n \Delta y^n \quad (4)$$

$$S_n^2 = \sum_{j,k} f(\mathbf{c}_{jk}^2) \Delta x_2^n \Delta y^n \quad (5)$$

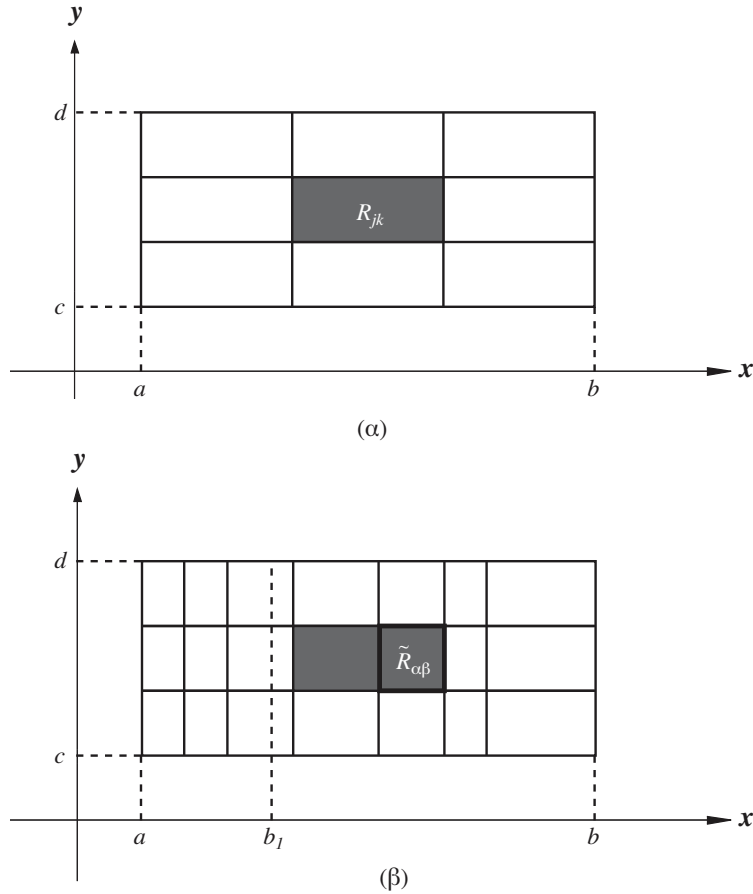
$$S_n = \sum_{j,k} f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta x^n \Delta y^n, \quad (6)$$

όπου τα  $\mathbf{c}_{jk}^1$ ,  $\mathbf{c}_{jk}^2$  και  $\mathbf{c}_{jk}$  είναι σημεία του  $jk$ -οστού υπο-ορθογωνίου της  $n$ -οστής κανονικής διαμέρισης των  $R_1$ ,  $R_2$  και  $Q$ , αντίστοιχα. Έστω  $S^i = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^i$ , όπου  $i = 1, 2$  και  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ . Πρέπει να δείξουμε ότι  $S = S^1 + S^2$ , το οποίο θα επιτύχουμε αποδεικνύοντας ότι για τυχόν  $\varepsilon > 0$ ,  $|S - S^1 - S^2| < \varepsilon$ .

Από την ομοιόμορφη συνέχεια της  $f$  στο  $Q$  γνωρίζουμε ότι, δεδομένου  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε για  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$  να έχουμε  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon$ . Έστω ότι το  $N$  είναι τόσο μεγάλο ώστε για κάθε  $n \geq N$  να έχουμε  $|S_n - S| < \varepsilon/3$ ,  $|S_n^i - S^i| < \varepsilon/3$ ,  $i = 1, 2$ , και αν  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  είναι οποιαδήποτε δύο σημεία οποιουδήποτε υπο-ορθογωνίου της  $n$ -οστής διαμέρισης των  $R_1$ ,  $R_2$  ή  $Q$  τότε  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon/[3 \text{εμβαδόν}(Q)]$ . Θεωρούμε τις  $n$ -οστές κανονικές διαμερίσεις των  $R_1$ ,  $R_2$  και  $Q$ . Αυτές σχηματίζουν



συλλογές υπο-ορθογωνίων τις οποίες θα συμβολίσουμε με  $R_{jk}^1, R_{jk}^2, R_{jk}$ , αντίστοιχα [βλ. Σχήματα 5.6.2 και 5.6.3(α)].



ΣΧΗΜΑ 5.6.3. (α) Μια κανονική διαμέριση του  $Q$ . (β) Οι κάθετες και οριζόντιες γραμμές αυτής της υποδιαίρεσης είναι η ένωση των κάθετων και οριζόντιων γραμμών των Σχημάτων 5.6.2 και 5.6.3(α).

Αν υπερθέσουμε την υποδιαίρεση του  $Q$  στις  $n$ -οστές υποδιαίρεσεις των  $R_1$  και  $R_2$ , παίρνουμε μια νέα συλλογή ορθογωνίων, φερ' ειπείν  $\tilde{R}_{\alpha\beta}$ ,  $\beta = 1, \dots, n$  και  $\alpha = 1, \dots, m$ , όπου  $m > n$ . βλ. Σχήμα 5.6.3(β).

Κάθε  $\tilde{R}_{\alpha\beta}$  περιέχεται σε κάποιο υπο-ορθογώνιο  $R_{jk}$  του  $Q$  και σε κάποιο υπο-ορθογώνιο της  $n$ -οστής διαμέρισης του  $R_1$  ή του  $R_2$ . Οι ισότητες (4), (5) και (6) που είδαμε παραπάνω μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$S_n^i = \sum_{j,k} \sum_{\tilde{R}_{\alpha\beta} \subset R_i} f(\mathbf{c}_{jk}^i) \text{εμβαδόν}(\tilde{R}_{\alpha\beta}) = \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \tilde{R}_{\alpha\beta} \subset R_i}} f(\tilde{\mathbf{c}}_{\alpha,\beta}^*) \text{εμβαδόν}(\tilde{R}_{\alpha\beta}).$$

όπου  $\tilde{\mathbf{c}}_{\alpha\beta} = \mathbf{c}_{\alpha\beta}^i$  αν  $\tilde{R}_{\alpha\beta} \subset R_{jk}^i$ ,  $i = 1, 2$ , και

$$S_n = \sum_{j,k} \sum_{\tilde{R}_{\alpha\beta} \subset R_{jk}} f(\mathbf{c}_{jk}) \text{εμβαδόν}(\tilde{R}_{\alpha\beta}) = \sum_{\alpha,\beta} f(\mathbf{c}_{\alpha\beta}^*) \text{εμβαδόν}(\tilde{R}_{\alpha\beta}).$$

όπου  $\mathbf{c}_{\alpha\beta}^* = \mathbf{c}_{jk}$  αν  $\tilde{R}_{\alpha\beta} \subset R_{jk}$ .

Για την περίπτωση που ο αναγνώστης συναντά για πρώτη φορά τον συμβολισμό με τους δείκτες, επισημαίνουμε ότι το

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \tilde{R}_{\alpha\beta} \subset R_i}}$$

σημαίνει ότι η άθροιση γίνεται ως προς εκείνα τα  $\alpha$  και  $\beta$  για τα οποία το αντίστοιχο ορθογώνιο  $\tilde{R}_{\alpha\beta}$  περιέχεται στο ορθογώνιο  $R_i$ .

Στη συνέχεια μπορούμε να χωρίσουμε το άθροισμα για το  $S_n$  σε δύο μέρη:

$$S_n = \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \tilde{R}_{\alpha\beta} \subset R_1}} f(\mathbf{c}_{\alpha\beta}^*) \text{εμβαδόν}(\tilde{R}_{\alpha\beta}) + \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \tilde{R}_{\alpha\beta} \subset R_2}} f(\mathbf{c}_{\alpha\beta}^*) \text{εμβαδόν}(\tilde{R}_{\alpha\beta}).$$

Από αυτές τις αναπαραστάσεις και την τριγωνική ανισότητα έπεται ότι

$$\begin{aligned} |S_n - S_n^1 - S_n^2| &\leq \left| \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \tilde{R}_{\alpha\beta} \subset R_1}} [f(\mathbf{c}_{\alpha\beta}^*) - f(\tilde{\mathbf{c}}_{\alpha\beta})] \text{εμβαδόν}(\tilde{R}_{\alpha\beta}) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \tilde{R}_{\alpha\beta} \subset R_2}} [f(\mathbf{c}_{\alpha\beta}^*) - f(\tilde{\mathbf{c}}_{\alpha\beta})] \text{εμβαδόν}(\tilde{R}_{\alpha\beta}) \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3 \text{εμβαδόν } Q} \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \tilde{R}_{\alpha\beta} \subset R_1}} \text{εμβαδόν}(\tilde{R}_{\alpha\beta}) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{3 \text{εμβαδόν } Q} \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \tilde{R}_{\alpha\beta} \subset R_2}} \text{εμβαδόν}(\tilde{R}_{\alpha\beta}) < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Σε αυτό το βήμα χρησιμοποιήσαμε την ομοιόμορφη συνέχεια της  $f$ . Επομένως,  $|S_n - S_n^1 - S_n^2| < \varepsilon/3$  για  $n \geq N$ . Όμως

$$|S - S_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |S_n^1 - S^1| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{και} \quad |S_n^2 - S^2| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Όπως στο Λήμμα 2, με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας προκύπτει ότι  $|S - S^1 - S^2| < \varepsilon$ , και έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε.  $\square$

**Παράδειγμα 1.** Έστω  $C$  το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης  $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Έστω  $\epsilon > 0$  τυχόν θετικός αριθμός. Δείξτε ότι το  $C$  μπορεί να τοποθετηθεί σε μια πεπερασμένη ένωση κουτιών  $B_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$  έτσι ώστε το  $C$  να μην περιέχει κάποιο συνοριακό σημείο του  $\cup B_i$  και να έχουμε  $\sum \text{εμβαδόν}(B_i) \leq \epsilon$ .

**Λύση.** Έστω  $\epsilon > 0$ . Αφού η  $f$  είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει  $\delta$  με  $0 < \delta < 1$  τέτοιο ώστε για  $|x - \omega| < \delta$  να έχουμε  $|f(x) - f(\omega)| < \epsilon/32$ . (Θα δούμε τον λόγο ύπαρξης του «32» στην πορεία) — ασφαλώς, στην πράξη κανείς καταστρώνει αρχικά την ιδέα και κάνοντας κατόπιν δοκιμές «ανακαλύπτει» ότι ο σωστός αριθμός που πρέπει να επιλέξει είναι πράγματι το 32. Θεωρούμε ότι  $n > 1/\delta$  και υποδιαιρούμε το διάστημα  $[a, b]$  σε  $2n$  ίσα μέρη με αντίστοιχη διαμέριση την  $x_0 < x_1 < \dots < x_{2n}$ . Έστω  $B_i$  το ορθογώνιο με κέντρο το  $(x_i, f(x_i))$ , πλάτος  $1/n$  και ύψος  $\epsilon/4$ . Το εμβαδόν κάθε ορθογώνιου είναι  $\epsilon/4n$ . Υπάρχουν  $(2n + 1)$  τέτοια ορθογώνια με συνολικό εμβαδόν

$$\left(\frac{\epsilon}{4n}\right)(2n + 1) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2n} < \epsilon.$$

Απομένει μόνο να επιβεβαιώσουμε ότι το  $C$  δεν περιέχει κάποιο συνοριακό σημείο του  $\cup_i B_i$ . Αν το γράφημα ακουμπάει την άνω ακμή κάποιου κουτιού  $B_i$ , τότε υπάρχει κάποιο  $(x, f(x)) \in B_i$  τέτοιο ώστε  $|f(x) - f(x_i)| \geq \epsilon/8$  (το  $\epsilon/8$  είναι το μισό του ύψους του  $B_i$ ). Λόγω όμως της ομοιόμορφης συνέχειας  $|f(x) - f(x_i)| < \epsilon/32$ , το οποίο είναι αντίφαση.

Με αντίστοιχο τρόπο, αν το  $C$  τέμνει μια κατακόρυφη πλευρά του  $B_i$  πρέπει να το κάνει σε ένα τμήμα που να ανήκει στο συμπλήρωμα του  $B_{i-1} \cup B_{i+1}$ . Αυτό αντιφάσκει και πάλι με την ομοιόμορφη συνέχεια.  $\diamond$

## Ασκήσεις

- Δείξτε ότι αν  $a$  και  $b$  είναι δύο αριθμοί τέτοιοι ώστε για κάθε  $\epsilon > 0$  να έχουμε  $|a - b| < \epsilon$ , τότε  $a = b$ .
- (α) Έστω  $f$  η συνάρτηση επί του ημιανοιχτού διαστήματος  $(0, 1]$  που ορίζεται από την  $f(x) = 1/x$ . Δείξτε ότι η  $f$  είναι συνεχής σε κάθε σημείο του  $(0, 1]$  αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής.  
(β) Γενικεύστε αυτό το παράδειγμα στο  $\mathbb{R}^2$ .
- Έστω  $R$  το ορθογώνιο  $[a, b] \times [c, d]$  και έστω  $f$  μια φραγμένη συνάρτηση που είναι ολοκληρώσιμη επί του  $R$ .  
(α) Δείξτε ότι η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη επί του  $[(a + b)/2, b] \times [c, d]$ .  
(β) Έστω  $N$  οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος. Δείξτε ότι η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη επί του  $[(a + b)/N, b] \times [c, d]$ .

Σκοπός των Ασκήσεων 4 έως 6 είναι να δοθεί μια απόδειξη του Θεωρήματος 2 της Ενότητας 5.2.

4. Έστω  $C$  το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης  $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Έστω  $\varepsilon > 0$  οποιοσδήποτε θετικός αριθμός. Δείξτε ότι το  $C$  μπορεί να τοποθετηθεί σε μια πεπερασμένη ένωση κουτιών  $B_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$  τέτοια ώστε το  $C$  να μην περιέχει κανένα συνοριακό σημείο του  $\cup B_i$  και  $\sum \text{εμβαδόν}(B_i) \leq \varepsilon$ . (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήσετε την αρχή της ομοιόμορφης συνέχειας που παρουσιάσαμε σε αυτή την ενότητα.)
5. Έστω  $R$  και  $B$  ορθογώνια και έστω ότι  $B \subset R$ . Θεωρήστε τη  $n$ -οστή κανονική διαμέριση του  $R$ , και έστω  $b_n$  το άθροισμα των εμβαδών όλων των ορθογώνιων της διαμέρισης που έχουν μη κενή τομή με το  $B$ . Δείξτε ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \text{εμβαδόν}(B)$ .
6. Έστω  $R$  ένα ορθογώνιο και  $C \subset R$  το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης  $\phi$ . Υποθέστε ότι η  $f: R \rightarrow \mathbb{R}$  είναι φραγμένη και συνεχής παντού εκτός από το  $C$ . Χρησιμοποιώντας τις Ασκήσεις 4 και 5 που προηγήθηκαν και τις τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν στην απόδειξη του Θεωρήματος 1 αυτής της ενότητας δείξτε ότι η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη επί του  $R$ .
7. (α) Χρησιμοποιώντας την αρχή της ομοιόμορφης συνέχειας δείξτε ότι αν η  $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής συνάρτηση, τότε είναι φραγμένη.
- (β) Γενικεύστε το ερώτημα (α) ώστε να δείξετε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση  $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι φραγμένη.
- (γ) Γενικεύστε το ερώτημα (β) ακόμη περισσότερο ώστε να δείξετε ότι αν η  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο  $D \subset \mathbb{R}^n$ , τότε η  $f$  είναι φραγμένη.

## 6

# Ολοκληρώματα επί καμπυλών και επιφανειών

Για να ολοκληρώσει τη διατριβή του «επί υφηγεσία», ο **Riemann** έπρεπε να κάνει μια διάλεξη. Προετοίμασε τρεις διαλέξεις, δύο πάνω στον ηλεκτρισμό και μία πάνω στη γεωμετρία. Ο Gauss έπρεπε να επιλέξει ποια από τις τρεις θα πραγματοποιούσε ο Riemann και, σε αντίθεση με ό,τι περίμενε ο Riemann, ο Gauss (ο επιβλέπων του) επέλεξε τη διάλεξη πάνω στη γεωμετρία. Η διάλεξη του Riemann *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Περί των υποθέσεων επί των οποίων θεμελιώνεται η γεωμετρία), που πραγματοποιήθηκε στις 10 Ιουνίου 1854, αποτελεί σημείο αναφοράς για τα μαθηματικά.

Η διάλεξη του Riemann περιλάμβανε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος, ο Riemann έθεσε το πρόβλημα του τρόπου ορισμού του  $n$ -διάστατου χώρου και κατέληξε δίνοντας τον ορισμό αυτού που σήμερα καλούμε χώρο Riemann. Ο Freudenthal γράφει:

*Διαθέτει συντομότερες καμπύλες, οι οποίες σήμερα καλούνται γεωδαισιακές και μοιάζουν με τις συνήθεις ευθείες γραμμές. Σε ένα σύστημα γεωδαισιακών συντεταγμένων μια τέτοια μετρική είναι σε προσέγγιση πρώτης τάξης επίπεδη ευκλείδεια, με τον ίδιο τρόπο που μια καμπύλη επιφάνεια, αν αγνοήσουμε τους όρους μεγαλύτερης τάξης, μοιάζει με το εφαπτόμενό της επίπεδο. Τα όντα που ζουν πάνω στην επιφάνεια μπορούν να ανακαλύψουν την καμπυλότητα του κόσμου τους και να την υπολογίσουν σε κάθε σημείο, παρατηρώντας τις αποκλίσεις από το θεώρημα του Πυθαγόρα.*

Το βασικό σημείο του πρώτου μέρους της διάλεξης του Riemann ήταν ο ορισμός του τανυστή καμπυλότητας. Το δεύτερο μέρος της διά-

λεξής του Riemann έθετε καίρια ερωτήματα πάνω στη σχέση της γεωμετρίας με τον κόσμο όπου ζούμε. Αναρωτήθηκε ποια είναι η διάσταση του πραγματικού χώρου και ποια γεωμετρία περιγράφει τον πραγματικό χώρο. Η διάλεξη ήταν πολύ προχωρημένη για την εποχή της και δεν έτυχε της δέουσας αναγνώρισης από τους επιστήμονες της εποχής εκείνης. Ο Monastyrsky γράφει:

*Από όσους άκουσαν τον Riemann, μόνο ο Gauss ήταν σε θέση να εκτιμήσει τη βαθύτητα των σκέψεων του Riemann. ... Η διάλεξη ξεπέρασε κάθε προσδοκία του και τον εξέπληξε σφόδρα. Επιστρέφοντας στη συνεδρίαση του διδακτικού προσωπικού της σχολής, μίλησε με τους θερμότερους επαίνους και σπάνιο ενθουσιασμό στον Wilhelm Weber για τη βαθύτητα των σκέψεων που είχε παρουσιάσει ο Riemann.*

Η διάλεξη δεν έγινε πλήρως κατανοητή παρά εξήντα χρόνια αργότερα. Ο Freudenthal γράφει:

*Η γενική θεωρία της σχετικότητας επιβεβαίωσε τη δουλειά του με πανηγυρικό τρόπο. Στο μαθηματικό σύστημα που παρουσίασε ο Riemann στη διάλεξή του, ο Einstein βρήκε το κατάλληλο πλαίσιο για να εντάξει τις ιδέες του για τη φυσική, την κοσμολογία και την κοσμογονία: και το πνεύμα της διάλεξης του Riemann περιείχε ακριβώς αυτό που χρειαζόταν η φυσική: τη μετρική δομή που καθορίζεται από τα δεδομένα.*

Από τον ιστότοπο για τον Riemann  
<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Riemann.html>

## Συμπλήρωμα 6.2A

### Ένα απαιτητικό παράδειγμα

**Παράδειγμα 2.** Υπολογίστε την τιμή του

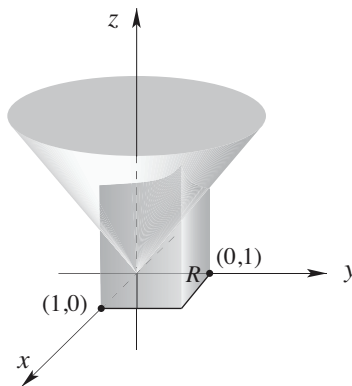
$$\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy,$$

όπου  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ .

**Λύση.** Το διπλό αυτό ολοκλήρωμα ισούται με τον όγκο της περιοχής που βρίσκεται κάτω από το γράφημα της συνάρτησης

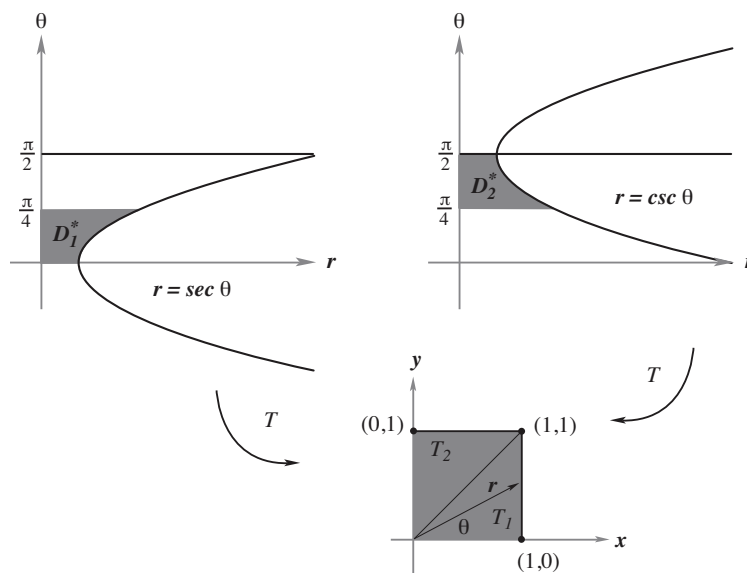
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

επί του ορθογωνίου  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ , δηλαδή ισούται με τον όγκο του τριδιάστατου χωρίου που απεικονίζεται στο Σχήμα 6.1.1.



ΣΧΗΜΑ 6.1.1. Όγκος του χωρίου κάτω από την  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  και πάνω από το ορθογώνιο  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ .

Στη μορφή στην οποία δίνεται το ολοκλήρωμα, είναι δύσκολο να υπολογιστεί η τιμή του. Αφού η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι μια απλή συνάρτηση του  $r^2 = x^2 + y^2$ , μπορούμε να δοκιμάσουμε να κάνουμε αλλαγή μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες. Έτσι θα απλοποιηθεί η ολοκληρωτέα ποσότητα, αλλά δυστυχώς όχι το πεδίο της ολοκλήρωσης. Ωστόσο, η απλοποίηση θα μας επιτρέψει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα. Για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2 του βιβλίου για τις πολικές συντεταγμένες, στηρίζομαστε στο Σχήμα 6.1.2.



ΣΧΗΜΑ 6.1.2. Ο μετασχηματισμός πολικών συντεταγμένων απεικονίζει το  $D_1^*$  στο τρίγωνο  $T_1$  και το  $D_2^*$  στο  $T_2$ .

Ο αναγνώστης μπορεί να επαληθεύσει ότι το  $R$  είναι η εικόνα του χωρίου  $D^* = D_1^* \cup D_2^*$  μέσω του  $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ , όπου για το  $D_1^*$  έχουμε  $0 \leq \theta \leq \frac{1}{4}\pi$  και  $0 \leq r \leq \sec \theta$ , ενώ για το  $D_2^*$  έχουμε  $\frac{1}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$  και  $0 \leq r \leq \csc \theta$ . Ο μετασχηματισμός  $T$  απεικονίζει το  $D_1^*$  επί ενός τριγώνου  $T_1$  και το  $D_2^*$  επί ενός τριγώνου  $T_2$ . Ο μετασχηματισμός  $T$  είναι 1-1 παντού εκτός αν  $r = 0$ , οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2. Από τη συμμετρία της  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  στο  $R$  βλέπουμε ότι

$$\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = 2 \iint_{T_1} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

Κάνοντας αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες, παίρνουμε

$$\iint_{T_1} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \iint_{D_1^*} \sqrt{r^2} r dr d\theta = \iint_{D_1^*} r^2 dr d\theta.$$

Στη συνέχεια, με διαδοχική ολοκλήρωση παίρνουμε

$$\iint_{D_1^*} r^2 dr d\theta = \int_0^{\pi/4} \left[ \int_0^{\sec \theta} r^2 dr \right] d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/4} \sec^3 \theta d\theta.$$

Ανατρέχοντας σε έναν πίνακα ολοκληρωμάτων (βλ. το πίσω μέρος του βιβλίου) για να βρούμε το  $\int \sec^3 x dx$ , έχουμε

$$\int_0^{\pi/4} \sec^3 \theta d\theta = \left[ \frac{\sec \theta \tan \theta}{2} \right]_0^{\pi/4} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sec \theta d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sec \theta d\theta.$$

Ανατρέχοντας ξανά στον πίνακα για το  $\int \sec x dx$ , βρίσκουμε

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sec \theta d\theta = \frac{1}{2} [\log |\sec \theta + \tan \theta|]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω και λαμβάνοντας υπόψη και τον παράγοντα  $\frac{1}{3}$ , παίρνουμε

$$\iint_{D_1^*} r^2 dr d\theta = \frac{1}{3} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}) \right] = \frac{1}{6} [\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})].$$

Πολλαπλασιάζοντας επί 2, παίρνουμε την απάντηση

$$\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \frac{1}{3} [\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})]. \quad \diamond$$

Αντί να χρησιμοποιήσουμε την αντικατάσταση  $T$ , εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να διαιρέσουμε το αρχικό τετράγωνο σε δύο τρίγωνα  $T_1$  και  $T_2$  όπως στο βιβλίο, να γράψουμε το ολοκλήρωμα επί του  $T_1$  σαν διπλό ολοκλήρωμα (πρώτα ως προς  $y$  και κατόπιν ως προς  $x$ ), στο ολοκλήρωμα ως προς  $y$  να κάνουμε την αντικατάσταση  $y = xv$  και κατόπιν να χρησιμοποιήσουμε το ολοκλήρωμα 43 του πίνακα ολοκληρωμάτων που υπάρχει στο πίσω μέρος του βιβλίου.

Ακολουθεί ένα ακόμη παράδειγμα χρήσης του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών.



**Άσκηση 15.** Υπολογίστε την τιμή του

$$\iint_B \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dx dy$$

όπου  $B$  είναι το εσωτερικό του τριγώνου με κορυφές τα σημεία  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  και  $(1, 0)$ .

**Λύση.** Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών  $u = y - x$ ,  $v = y + x$ , οπότε παίρνουμε  $|\partial(x, y)/\partial(u, v)| = 1/2$ . Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \iint_B \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dx dy &= \iint_{B'} \exp\left(\frac{u}{v}\right) \frac{1}{2} du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-v}^v \exp\left(\frac{u}{v}\right) du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( v \exp\left(\frac{u}{v}\right) \Big|_{-v}^v \right) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 v(e - e^{-1}) dv = \frac{1}{4}(e - e^{-1}). \quad \diamond \end{aligned}$$

## Συμπλήρωμα 6.2B

### Το γκαουσιανό ολοκλήρωμα

Στόχος μας σε αυτό το συμπλήρωμα είναι να αποδείξουμε την ισότητα των εξής δύο ορίων:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{R_a} e^{-(x^2+y^2)} dx dy,$$

την οποία χρησιμοποιήσαμε για να υπολογίσουμε τον τύπο του γκαουσιανού ολοκληρώματος. Στο βιβλίο δείξαμε ότι το

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

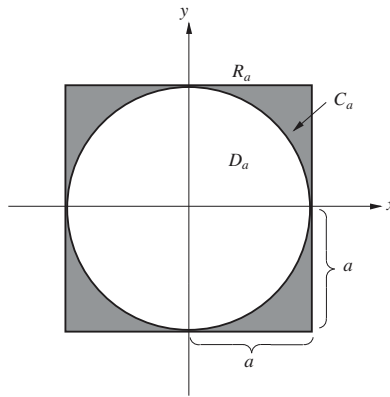
υπάρχει, υπολογίζοντας απευθείας την τιμή του. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι το

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left( \iint_{R_a} e^{-(x^2+y^2)} dx dy - \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \right)$$

ισούται με μηδέν. Το όριο ισούται με

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{C_a} e^{-(x^2+y^2)} dx dy,$$

όπου  $C_a$  είναι το χωρίο μεταξύ των  $R_a$  και  $D_a$  (βλ. Σχήμα 6.1.3).



ΣΧΗΜΑ 6.1.3. Η περιοχή  $C_a$  βρίσκεται ανάμεσα στο τετράγωνο  $R_a$  και τον κύκλο  $D_a$ .

Στο χωρίο  $C_a$ ,  $\sqrt{x^2 + y^2} \geq a$  (η ακτίνα του  $D_a$ ), οπότε  $e^{-(x^2+y^2)} \leq e^{-a^2}$ . Επομένως,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \iint_{C_a} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{C_a} e^{-a^2} dx dy \\ &= e^{-a^2} \text{εμβαδόν}(C_a) = e^{-a^2} (4a^2 - \pi a^2) = (4 - \pi)a^2 e^{-a^2}. \end{aligned}$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι  $\lim_{a \rightarrow \infty} a^2 e^{-a^2} = 0$ . Με βάση όμως τον κανόνα του l'Hôpital,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} a^2 e^{-a^2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \left( \frac{a^2}{e^{a^2}} \right) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left( \frac{2a}{2ae^{a^2}} \right) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{a^2}} = 0,$$

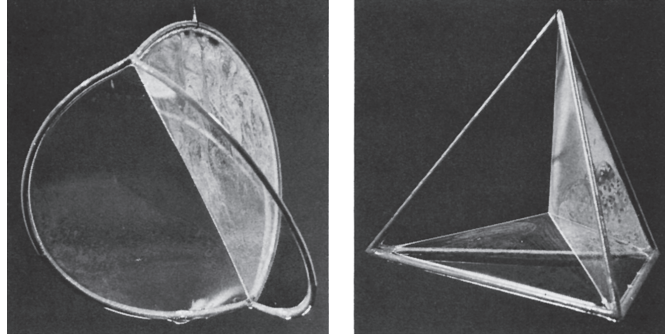
όπως απαιτείται.

## Ολοκληρώματα επί διαδρομών και επιφανειών

### Συμπλήρωμα Ενότητας 7.4 Το πρόβλημα του Plateau

Θα ολοκληρώσουμε αυτή την ενότητα περιγράφοντας το συναρπαστικό κλασικό πρόβλημα εμβαδού του Plateau, το οποίο έχει μακρά ιστορία στα μαθηματικά. Ο Βέλγος φυσικός Joseph Plateau (1801–1883) πραγματοποίησε πολλά πειράματα από το 1820 έως το 1869 πάνω στην επιφανειακή τάση και τα τριχοειδή φαινόμενα, πειράματα που είχαν τεράστιο αντίκτυπο εκείνη την εποχή και επαναλήφθηκαν από σημαντικούς φυσικούς του δέκατου ένατου αιώνα, όπως από τον Michael Faraday (1791–1867). Το όνομα του Plateau δόθηκε στο αντίστοιχο σύνολο μαθηματικών προβλημάτων που σχετίζονται με τις σαπωνομεμβράνες το 1904 από τον μεγάλο Γάλλο μαθηματικό Henri Lebesgue (1875-1941).

Αν βυθίσουμε ένα σύρμα σε διάλυμα σαπουνιού ή γλυκερίνης και κατόπιν το αποτραβήξουμε, θα σχηματιστεί μια σαπωνομεμβράνη που θα εκτείνεται επί του σύρματος. Μερικά παραδείγματα παρουσιάζονται στο Σχήμα 7.4.1, αν και ίσως θελήσετε να κάνετε το πείραμα και μόνοι σας. Ο Plateau έθεσε το εξής μαθηματικό ερώτημα: Για δεδομένο σύνορο (σύρμα), πώς μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη μιας τέτοιας επιφάνειας (σαπωνομεμβράνης), και πόσες επιφάνειες μπορούν να υπάρξουν; Η αρχή της φυσικής που διέπει αυτά τα φαινόμενα είναι ότι η φύση τείνει να ελαχιστοποιεί το εμβαδόν, δηλαδή η επιφάνεια που σχηματίζεται θα πρέπει να είναι μια επιφάνεια ελάχιστου εμβαδού μεταξύ όλων των δυνατών επιφανειών που έχουν τη δεδομένη καμπύλη ως σύνορο. Πρόκειται για ένα ακόμη παράδειγμα της αρχής της δράσης των Maupertuis και Leibniz (πρβλ. Ενότητα 3.3).

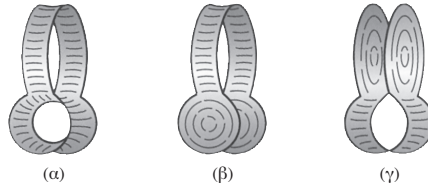


ΣΧΗΜΑ 7.4.1. Δύο σαπωνομεμβράνες επί σύρματος.

Για δισκοειδείς σαπωνομεμβράνες, το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Έστω  $D \subset \mathbb{R}^2$  ο μοναδιαίος δίσκος που ορίζεται ως το σύνολο  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  και έστω  $\partial D$  το σύνορό του. Υποθέτουμε επίσης ότι η εικόνα  $\Gamma$  της  $c: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι μια απλή κλειστή καμπύλη, όπου η  $\Gamma$  αντιπροσωπεύει ένα σύρμα στο  $\mathbb{R}^3$ .

Έστω  $\mathcal{BS}$  το σύνολο όλων των απεικονίσεων  $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  που είναι κλάσης  $C^1$ , που είναι 1-1 στο  $\partial D$  και για τις οποίες  $\Phi(\partial D) = \Gamma$ . Κάθε  $\Phi \in \mathcal{BS}$  αντιπροσωπεύει μια παραμετρική  $C^1$  «δισκοειδή» επιφάνεια που «εκτείνεται» επί του σύρματος  $\Gamma$ .

Οι σαπωνομεμβράνες του Σχήματος 7.4.1 δεν είναι δισκοειδείς, αλλά αντιπροσωπεύουν ένα σύστημα πολλαπλών δισκοειδών επιφανειών. Στο Σχήμα 7.4.2 παρουσιάζεται ένα περίγραμμα που αποτελεί σύνορο δύο δισκοειδών και μιας μη δισκοειδούς επιφάνειας.



ΣΧΗΜΑ 7.4.2. Επιφάνειες από σαπωνομεμβράνες. Οι (β) και (γ) είναι δισκοειδείς, ενώ η (α) δεν είναι.

Για κάθε  $\Phi \in \mathcal{BS}$ , θεωρούμε το εμβαδόν της επιφάνειας εικόνας, συγκεκριμένα, το  $A(\Phi) = \iint_D \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{v}\| \, du \, dv$ . Το εμβαδόν αυτό είναι μια συνάρτηση που απεικονίζει κάθε παραμετρική επιφάνεια στο εμβαδόν της. Ο Plateau διερωτήθηκε αν το  $A$  έχει ελάχιστο στο  $\mathcal{BS}$ : δηλαδή, υπάρχει κάποια  $\Phi_0$  για την οποία  $A(\Phi_0) \leq A(\Phi)$  για κάθε  $\Phi \in \mathcal{BS}$ ; Δυστυχώς, οι μέθοδοι που παρουσιάζονται σε αυτό το βιβλίο δεν μας αρκούν για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα. Μπορούμε να χειριστούμε προβλήματα εύρεσης ελαχίστων πραγματικών συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, αλλά σε καμία περίπτωση δεν μπορούμε να φανταστούμε το  $\mathcal{BS}$  σαν ένα χωρίο του  $\mathbb{R}^n$  για οποιοδήποτε  $n$ !

Μελετώντας τις επιφάνειες ελάχιστου εμβαδού, ο Weierstrass έδειξε ότι αν υπήρχε ένα ελάχιστο

$$\Phi_0(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

θα έπρεπε να ικανοποιεί (ύστερα από κατάλληλες κανονικοποιήσεις) τις μερικές διαφορικές εξισώσεις

$$(i) \nabla^2 \Phi_0 = 0$$

$$(ii) \frac{\partial \Phi_0}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Phi_0}{\partial v} = 0$$

$$(iii) \left\| \frac{\partial \Phi_0}{\partial u} \right\| = \left\| \frac{\partial \Phi_0}{\partial v} \right\|$$

όπου  $\|\mathbf{w}\|$  είναι η «νόρμα» ή μήκος του διανύσματος  $\mathbf{w}$ . Αυτό το παράδειγμα καταδεικνύει τη στενή σχέση μεταξύ των προβλημάτων μεγίστων και ελαχίστων (του λογισμού μεταβολών) και των μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Για περισσότερα από 70 χρόνια, μαθηματικοί όπως ο Riemann, ο Weierstrass, ο H. A. Schwarz, ο Darboux και ο Lebesgue έσπαζαν το κεφάλι τους για να λύσουν τον πρόβλημα που έθεσε ο Plateau. Το 1931, το πρόβλημα λύθηκε τελικά όταν ο Jesse Douglas έδειξε ότι υπάρχει μια τέτοια  $\Phi_0$ . Ωστόσο, πολλά ερωτήματα σχετικά με τις σαπωνομεμβράνες παραμένουν άλυτα, και η ερευνητική αυτή περιοχή παραμένει ενεργή μέχρι και σήμερα.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Για περισσότερες πληροφορίες πάνω στο συναρπαστικό αυτό θέμα, ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί το *The Parsimonious Universe: Shape and Form in the Natural World*, των S. Hildebrandt και A. Tromba, Springer-Verlag, New York/Heidelberg, 1995.

## 8

# Τα ολοκληρωτικά θεωρήματα της διανυσματικής ανάλυσης

Ο George Green (1793–1841), αυτοδίδακτος Άγγλος μαθηματικός, καταπιάστηκε με τη μελέτη του στατικού ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού με αυστηρό μαθηματικό τρόπο. Το 1828, ο Green εξέδωσε ιδιωτικά ένα βιβλιαράκι με τίτλο *An essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism* (Δοκίμιο πάνω στην εφαρμογή της μαθηματικής ανάλυσης στις θεωρίες του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού). Το βιβλίο αυτό δεν έτυχε προσοχής παρά μόνο όταν το ανακάλυψε ο Sir William Thomson (Lord Kelvin, 1824–1907), αναγνώρισε τη μεγάλη αξία του και άρχισε να το δημοσιεύει το 1850 στο *Journal für Mathematik*. Ο Green, ο οποίος είχε μάθει πολλά από τα άρθρα του Poisson, μετέφερε επίσης την έννοια της συνάρτησης δυναμικού στον ηλεκτρισμό και τον μαγνητισμό.

Morris Klein

*Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*

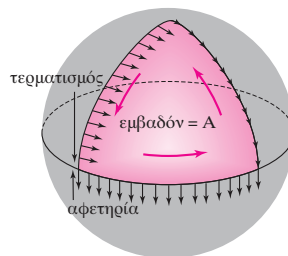
## Συμπλήρωμα Ενότητας 8.2

### Αλλαγή προσανατολισμού των αστροναυτών

**Αλλαγή προσανατολισμού των αστροναυτών.** Ένα ακόμη παράδειγμα που μπορεί να μας βοηθήσει να αποκτήσουμε μια εικόνα αυτού του φαινομένου είναι να φαντα-

στούμε τους αστροναύτες που θέλουν να αλλάξουν τον προσανατολισμό τους σε περιβάλλον ελεύθερου χώρου. Όπως στην περίπτωση της γάτας που πέφτει, η κίνηση αυτή μπορεί να επιτευχθεί μέσω εσωτερικών περιστροφών, ή *αλλαγών σχήματος*. Για παράδειγμα, μπορούμε να φανταστούμε τους αστροναύτες να κουνούν τα χέρια τους σχεδόν όπως κουνάει κανείς τα χέρια του για να ανακατέψει ένα υγρό μέσα σε μια μεγάλη κανάτα. Έχει τα χέρια του τεντωμένα μπροστά, ώστε να βρίσκονται σε ένα οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τους ώμους, παράλληλο στο πάτωμα· οι παλάμες σφίγγουν η μία την άλλη και παραμένουν σε αυτό το οριζόντιο επίπεδο καθώς ανακατεύουν το υγρό κινούμενες κυκλικά. Στο σημείο της μέγιστης έκτασης των χεριών, η αδράνεια του σώματος γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα είναι επίσης μέγιστη. Λόγω της διατήρησης της στροφορμής το σώμα πρέπει να περιστραφεί κατά τρόπο αντίθετο και ανάλογο αυτού της κίνησης των χεριών. Καθώς όμως τα χέρια γυρίζουν γύρω γύρω και αλλάζουν θέση, η αδράνεια του σώματος μειώνεται. Αντιδρώντας σε αυτό, το σώμα ελαττώνει και αυτό την κίνησή του. Αρα, κάθε φορά που τα χέρια πραγματοποιούν έναν πλήρη κύκλο, το σώμα πραγματοποιεί μια καθαρή περιστροφή κατά φορά αντίθετη από την φορά της κίνησης των χεριών. Όταν επιτευχθεί ο επιθυμητός προσανατολισμός, ο αστροναύτης πρέπει απλά να σταματήσει να κουνάει τα χέρια του ώστε να περιέλθει σε ηρεμία. Η επιπλέον κίνηση που επιτυγχάνεται καλείται μερικές φορές *γεωμετρική φάση*.

**Σύνδεση με τη μη ευκλείδεια γεωμετρία.** Η θεωρία των γεωμετρικών φάσεων εμφανίζεται με ενδιαφέροντα τρόπο και στη μη ευκλείδεια γεωμετρία—όπως στη γεωμετρία των τριγώνων που σχεδιάζονται πάνω σε σφαίρα. Ένας απλός τρόπος να εξηγήσουμε τη σύνδεση είναι ο εξής. Εκτείνετε το χέρι σας τεντώνοντας τον αγκώνα, αλλά επιτρέποντας την περιστροφική κίνηση της άρθρωσης του ώμου. Κινήστε το χέρι σας κατά μήκος τριών μέγιστων κύκλων που σχηματίζουν ένα τρίγωνο πάνω στη σφαίρα. Κατά τη διάρκεια της κίνησης κατά μήκος κάθε τόξου, έχετε πάντα τον αντίχειρά σας *παράλληλο*· ο αντίχειρας θα πρέπει δηλαδή να κινείται έτσι ώστε να σχηματίζει *σταθερή* γωνία με την κατεύθυνση κίνησης κατά μήκος κάθε τόξου και να μην περιστρέφεται κατά την μετάβαση από το ένα τόξο στο άλλο. Αφού ολοκληρώσετε την κίνηση κατά μήκος του τριγώνου, ο αντίχειράς σας θα επιστρέψει περιστραμμένος κατά κάποια γωνία σε σχέση με την αρχική του θέση (βλ. Σχήμα 8.2.1). Βλέπετε στο Σχήμα 8.2.1 ότι η γωνία περιστροφής είναι  $90^\circ$  (ή  $\pi/2$  rad) και ότι το ίδιο συμβαίνει όταν κάνετε οι ίδιοι το πείραμα;



ΣΧΗΜΑ 8.2.1. Η παράλληλη κίνηση του αντίχειρά σας κατά μήκος ενός σφαιρικού τριγώνου έχει ως αποτέλεσμα μια μετατόπιση φάσης.

Για γενικά σφαιρικά τρίγωνα, η γωνία αυτή (σε rad) δίνεται από τη σχέση  $\Theta = \Delta - \pi$ , όπου  $\Delta$  είναι το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου. Το γεγονός ότι η  $\Theta$  είναι αυστηρά θετική (!) είναι μία από τις βασικές αλήθειες της μη ευκλείδειας γεωμετρίας — το άθροισμα των γωνιών ενός ορθογώνιου τριγώνου σε μια σφαίρα είναι μεγαλύτερο από  $\pi$ ! Αυτή η γωνία σχετίζεται επίσης με το εμβαδόν  $A$  που περικλείει το τρίγωνο μέσω της σχέσης  $\Theta = A/r^2$ , όπου  $r$  είναι η ακτίνα της σφαίρας. Η περιστροφική μετατόπιση του αντίχειρα κατά την κυκλική του πορεία κατά μήκος του σφαιρικού τριγώνου συνδέεται άμεσα με την καμπυλότητα της σφαίρας και με το εμβαδόν που περικλείει η διαγραφόμενη διαδρομή. Προσέξτε αρχικά ότι για ένα σφαιρικό τρίγωνο που είναι το  $1/8$  της σφαίρας,  $A = 4\pi r^2/8 = \pi r^2/2$ . Επομένως,  $A/r^2 = \pi/2$ . Προσέξτε επίσης ότι όταν  $r \rightarrow \infty$  η σφαίρα γίνεται πιο επίπεδη και άρα προσεγγίζει το ευκλείδειο επίπεδο, στην οποία περίπτωση  $\Theta = 0$ .

Η κυκλική πορεία του αντίχειρα κατά μήκος της κλειστής διαδρομής είναι αντίστοιχη με τις κυκλικές εσωτερικές κινήσεις που κάνει η γάτα κατά την πτώση της: η κατά  $90^\circ$  αλλαγή κατεύθυνσης του αντίχειρα ύστερα από την ολοκλήρωση μιας διαδρομής είναι αντίστοιχη με την αλλαγή προσανατολισμού της γάτας κατά  $180^\circ$ . Εξετάζοντας σε μεγαλύτερο βάθος τα σχετικά μαθηματικά διαπιστώνουμε ότι, στην πραγματικότητα, και οι δύο περιπτώσεις αποτελούν εκφάνσεις του ίδιου φαινομένου (που καλείται *ολονομία*) — και το θεώρημα του Stokes είναι το κλειδί για την κατανόησή του.

## Συμπλήρωμα Ενότητας 8.3

### Ακριβή διαφορικά

Η βασική μαθηματική ιδέα είναι ότι, για να λύσουμε μια διαφορική εξίσωση των μεταβλητών  $(x, y)$  της μορφής

$$P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0, \quad (1)$$

κάνουμε τα εξής: αρχικά ελέγχουμε αν το  $P dx + Q dy$  είναι **ακριβές**, δηλαδή αν το αντίστοιχο διανυσματικό πεδίο  $P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$  είναι συντηρητικό. Αν είναι, τότε υπάρχει συνάρτηση  $f(x, y)$  τέτοια ώστε

$$P = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι η συνθήκη της ακρίβειας είναι να ισχύει

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

και ότι αυτό αντιστοιχεί σε ισότητα των μεικτών μερικών παραγώγων της  $f$ .

Αν η εξίσωση είναι ακριβής και βρούμε μια αντίστοιχη  $f$ , τότε η συνάρτηση  $f(x, y) = \text{σταθερά}$  ορίζει πεπλεγμένα τις λύσεις ως σύνολα στάθμης της  $f$ . Μπορούμε να ελέγξουμε εύκολα αυτόν τον ισχυρισμό με πεπλεγμένη παραγωγή ως εξής: Αν τα  $x$  και  $y$  είναι



συναρτήσεις του  $t$  και ανήκουν στην επιφάνεια σταθερά  $= f(x, y)$ , τότε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη και χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt}.$$

Μάλιστα, αυτός είναι ένας πιθανός τρόπος ερμηνείας της εξίσωσης (1). Αν το  $y$  είναι συνάρτηση του  $x$  και παραγωγίσουμε με αντίστοιχο τρόπο την εξίσωση σταθερά  $= f(x, y)$  ως προς  $x$  και χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα της αλυσίδας με αντίστοιχο τρόπο, παίρνουμε ακριβώς την εξίσωση (1).

**Παράδειγμα 1.** Λύστε την παρακάτω διαφορική εξίσωση με τους δεδομένους περιορισμούς:

$$\cos y \sin x + \sin y \cos x \frac{dy}{dx} = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

**Λύση.** Η εξίσωση είναι ακριβής, αφού

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos y \sin x) = -\sin y \sin x,$$

και

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\sin y \cos x) = -\sin y \cos x.$$

Η συνάρτηση  $f(x, y)$  για την οποία  $P = \partial f / \partial x$  και  $Q = \partial f / \partial y$  μπορεί να βρεθεί με ολοκλήρωση:

$$\int P dx = \int \cos y \sin x dx = -\cos y \cos x + g(y) + C_1,$$

$$\int Q dy = \int \sin y \cos x dy = -\cos y \cos x + h(x) + C_2,$$

όπου  $g(y)$  είναι μια συνάρτηση μόνο του  $y$  (η οποία θα εμφανιστεί όταν ολοκληρώσουμε την  $Q$  ως προς  $y$ ), η  $h(x)$  είναι μια συνάρτηση μόνο του  $x$  (η οποία θα εμφανιστεί όταν ολοκληρώσουμε την  $P$  ως προς  $x$ ), και τα  $C_1$  και  $C_2$  είναι δύο σταθερές. Συγκρίνοντας αυτά τα δύο αποτελέσματα, βρίσκουμε ότι  $f(x, y) = -\cos y \cos x = C$ , μια σταθερά. Αφού  $y = 0$  όταν  $x = \pi/4$ , βρίσκουμε ότι  $C = -\cos 0 \cdot \cos(\pi/4) = -1/\sqrt{2}$ , οπότε η λύση ορίζεται από την  $\cos y \cos x = 1/\sqrt{2}$ .  $\diamond$

Μερικές φορές μπορούμε να κάνουμε μια εξίσωση ακριβή πολλαπλασιάζοντάς την με έναν κατάλληλο παράγοντα. Αυτού του είδους οι παράγοντες καλούνται **ολοκληρωτικοί παράγοντες**.

**Παράδειγμα 2.** Λύστε την εξίσωση

$$x \frac{dy}{dx} = xy^2 + y$$

χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό παράγοντα  $1/y^2$ .

**Λύση.** Ο ολοκληρωτικός παράγοντας  $1/y^2$  κάνει την εξίσωση ακριβή. Για να το επιβεβαιώσουμε, αρχικά πολλαπλασιάζουμε και κατόπιν ελέγχουμε αν η εξίσωση είναι ακριβής. Η εξίσωση είναι

$$\frac{x}{y^2} \frac{dy}{dx} - x - \frac{1}{y} = 0.$$

Έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( -x - \frac{1}{y} \right) = \frac{1}{y^2}$$

και

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{y^2} \right) = \frac{1}{y^2}.$$

Άρα η εξίσωση είναι ακριβής. Για να βρούμε μια αντιπαράγωγο, γράφουμε

$$\int \left( -x - \frac{1}{y} \right) dx = -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{y} + g_1(y), \quad (2)$$

$$\int \frac{x}{y^2} dy = -\frac{x}{y} + g_2(x). \quad (3)$$

Συγκρίνοντας τις (2) και (3), βλέπουμε ότι αν  $g_2(x) = -x^2/2$  και  $g_1(y) = C$ , σταθερά, τότε έχουμε λύσει την εξίσωση, οπότε η εξίσωση ορίζεται από τις καμπύλες στάθμης της  $f$ , δηλαδή

$$f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C. \quad \diamond$$

## Συμπλήρωμα Ενότητας 8.5

### Συναρτήσεις του Green

#### Κάποιες διαφορικές εξισώσεις της μηχανικής και της τεχνολογίας

Λέγεται ότι ο Ισάακ Νεύτωνας είχε πει: «Τα πάντα στη φύση ανάγονται σε διαφορικές εξισώσεις». Την άποψη αυτή παράφρασε ο Max Planck (βλ. Ιστορικό σημείωμα της Ενότητας 3.3): «... Η σημερινή φυσική, όπως είναι οργανωμένη θεωρητικά, διέπεται πλήρως από ένα σύστημα χωροχρονικών διαφορικών εξισώσεων».

Σε αυτή την ενότητα θα εφαρμόσουμε τα κεντρικά θεωρήματα της διανυσματικής ανάλυσης για να συναγάγουμε τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τη μεταφορά θερμότητας, τον ηλεκτρομαγνητισμό και τη κίνηση κάποιων ρευστών.

Δεν πρέπει να ξεχνάμε τη σημασία αυτών των προβλημάτων για τη σύγχρονη τεχνολογία. Για παράδειγμα, για την κατασκευή ενός σύγχρονου αεροσκάφους ή για τον σχεδιασμό ενός υποβρυχίου απαραίτητη προϋπόθεση είναι η καλή κατανόηση των ρευστών και η ικανότητα εκτέλεσης υπολογισμών για την επίλυση των αντίστοιχων εξισώσεων. Για παράδειγμα, η ροή του αέρα (του ρευστού στην προκειμένη περίπτωση) πάνω

από τα φτερά ενός αεροσκάφους είναι πολύ ιδιαίτερη, παρότι οι εξισώσεις που την περιγράφουν είναι σχετικά απλές. Σε αυτή την ενότητα θα συναγάγουμε μια ελαφρώς εξιδανικευμένη μορφή αυτών των εξισώσεων. Με αντίστοιχο τρόπο, οι εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητισμού, όπως θα δούμε στις επόμενες παραγράφους, παίζουν κεντρικό ρόλο στην τηλεπικοινωνιακή βιομηχανία: τα ασύρματα δίκτυα, η τηλεόραση και σε μεγάλο βαθμό η λειτουργία των σύγχρονων ηλεκτρονικών συσκευών, συμπεριλαμβανομένων των υπολογιστών, στηρίζεται σε αυτές και σε σχετικές με αυτές θεμελιώδεις εξισώσεις.

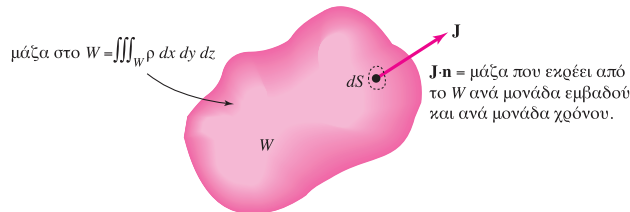
## Αρχές διατήρησης

Ως προετοιμασία για τον ορισμό των εξισώσεων ενός ρευστού, θα εξετάσουμε αρχικά μια σημαντική εξίσωση που καλείται εξίσωση *διατήρησης*. Για τα ρευστά εκφράζει τη διατήρηση της μάζας, ενώ για την ηλεκτρομαγνητική θεωρία εκφράζει τη διατήρηση του φορτίου. Θα την χρησιμοποιήσουμε στην εξίσωση διάδοσης της θερμότητας και στον ηλεκτρομαγνητισμό.

Έστω  $\mathbf{V}(t, x, y, z)$  ένα  $C^1$  διανυσματικό πεδίο στο  $\mathbb{R}^3$  για κάθε  $t$ , και έστω  $\rho(t, x, y, z)$  μια  $C^1$  πραγματική συνάρτηση. Όταν λέμε ότι η *αρχή διατήρησης της ενέργειας* ισχύει για τα  $\mathbf{V}$  και  $\rho$ , εννοούμε ότι η συνθήκη

$$\frac{d}{dt} \iiint_W \rho dV = - \iint_{\partial W} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS$$

ισχύει για όλα τα χωρία  $W$  του  $\mathbb{R}^3$ , όπου  $\mathbf{J} = \rho \mathbf{V}$  (βλ. Σχήμα 8.5.1).



ΣΧΗΜΑ 8.5.1. Ο ρυθμός μεταβολής της μάζας στο  $W$  ισούται με τον ρυθμό με τον οποίο η μάζα διέρχεται από το  $\partial W$ .

Αν φανταστούμε το  $\rho$  σαν πυκνότητα μάζας (το  $\rho$  θα μπορούσε να είναι και πυκνότητα φορτίου) —δηλαδή μάζα ανά μονάδα όγκου— και το  $\mathbf{V}$  σαν το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού, η συνθήκη λέει απλά ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνολικής μάζας μέσα στο  $W$  ισούται με τον ρυθμό εισροής της μάζας στο  $W$ . Υπενθυμίζουμε ότι το  $\iint_{\partial W} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS$  καλείται *ροή* του  $\mathbf{J}$ . Θα χρειαστούμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 8.5.1.** Αν  $\mathbf{V}$  είναι ένα ομαλό διανυσματικό πεδίο και  $\rho$  ένα βαθμωτό πεδίο στο  $\mathbb{R}^3$ , η αρχή διατήρησης της μάζας για τα  $\mathbf{V}$  και  $\rho$  είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

δηλαδή

$$\rho \operatorname{div} \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (1')$$

όπου το  $\operatorname{div} \mathbf{J}$  σημαίνει ότι υπολογίζουμε το  $\operatorname{div} \mathbf{J}$  κρατώντας το  $t$  σταθερό, ενώ το  $\partial \rho / \partial t$  σημαίνει ότι παραγωγίζουμε το  $\rho$  ως προς  $t$  για  $x, y, z$  σταθερά.

**Απόδειξη.** Αρχικά παρατηρούμε ότι μεταφέροντας την παραγωγή μέσα στο ολοκλήρωμα παίρνουμε

$$\frac{d}{dt} \iiint_W \rho \, dx \, dy \, dz = \iint_W \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dx \, dy \, dz.$$

Επιπλέον, από το θεώρημα απόκλισης, έχουμε

$$\iint_{\partial W} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_W \operatorname{div} \mathbf{J} \, dV.$$

Επομένως η αρχή διατήρησης της ενέργειας είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη

$$\iiint_W \left( \operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \, dx \, dy \, dz = 0.$$

Αφού αυτή η σχέση πρέπει να ισχύει για όλα τα χωρία  $W$ , είναι ισοδύναμη με την  $\mathbf{J} + \partial \rho / \partial t = 0$ .  $\square$

Η εξίσωση  $\operatorname{div} \mathbf{J} + \partial \rho / \partial t = 0$  καλείται *εξίσωση συνέχειας*. Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι, χρησιμοποιώντας τον τύπο αλλαγής μεταβλητών, μπορούμε να δείξουμε ότι η αρχή διατήρησης της μάζας είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη

$$\frac{d}{dt} \iiint_{W_t} \rho \, dV = 0,$$

όπου  $W_t$  είναι η εικόνα του  $W$  που προκύπτει αν μετακινήσουμε κάθε σημείο του  $W$  κατά μήκος των καμπυλών ροής του  $\mathbf{V}$  για χρονικό διάστημα  $t$ . Αυτό το αποτέλεσμα είναι μια ειδική περίπτωση του *θεωρήματος μεταφοράς* που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια.

## Το θεώρημα μεταφοράς

Το θεώρημα μεταφοράς είναι μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή του θεωρήματος απόκλισης που θα χρειαστούμε για να συναγάγουμε τις εξισώσεις ενός ρευστού.

**Θεώρημα 8.5.2.** Έστω  $\mathbf{F}$  ένα διανυσματικό πεδίο στο  $\mathbb{R}^3$  και έστω ότι συμβολίζουμε τη καμπύλη ροής του  $\mathbf{F}$  που ξεκινάει από το  $\mathbf{x}$  ύστερα από χρονικό διάστημα  $t$  με  $\phi(\mathbf{x}, t)$ . (Βλ. διαδίκτυακό συμπλήρωμα Ενότητας 4.4 για περισσότερες πληροφορίες.) Αν  $J(\mathbf{x}, t)$  είναι η ιακωβιανή της απεικόνισης  $\phi_t: \mathbf{x} \mapsto \phi(\mathbf{x}, t)$  για σταθερό  $t$ , τότε

$$\frac{\partial}{\partial t} J(\mathbf{x}, t) = [\operatorname{div} \mathbf{F}(\phi(\mathbf{x}, t))] J(\mathbf{x}, t).$$

Για δεδομένη συνάρτηση  $f(x, y, z, t)$  και χωρίο  $W \subset \mathbb{R}^3$ , ισχύει το θεώρημα μεταφοράς:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{W_t} f(x, y, z, t) dx dy dz = \iiint_{W_t} \left( \frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div} \mathbf{F} \right) dx dy dz,$$

όπου  $W_t = \phi_t(W)$ , το οποίο είναι το χωρίο που μετακινείται με τη ροή, και όπου

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} f \cdot \mathbf{F}.$$

είναι η υλική παράγωγος.

Για  $f = 1$ , από το Θεώρημα 8.5.2 έπεται ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα (πράγμα που δικαιολογεί τη χρήση του όρου *ασυμπίεστο*):

1.  $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$
2.  $\text{όγκος}(W_t) = \text{όγκος}(W)$
3.  $J(\mathbf{x}, t) = 1$

Έστω  $\phi$ ,  $J$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $f$  όπως τα ορίσαμε παραπάνω. Το θεώρημα μεταφοράς μπορεί να γραφτεί και σε διανυσματική μορφή ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{W_t} (f\mathbf{F}) dx dy dz \\ = \iiint_{W_t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (f\mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot \nabla (f\mathbf{F}) + (f\mathbf{F}) \operatorname{div} \mathbf{F} \right] dx dy dz, \end{aligned}$$

όπου  $\mathbf{F} \cdot \nabla (f\mathbf{F})$  είναι ο  $3 \times 3$  πίνακας παραγώγων  $\mathbf{D}(f\mathbf{F})$  εφαρμοσμένος στο διάνυσμα στήλη  $\mathbf{F}$ . Σε καρτεσιανές συντεταγμένες, το  $\mathbf{F} \cdot \nabla \mathbf{G}$  είναι το διάνυσμα με  $i$ -οστή συνιστώσα την

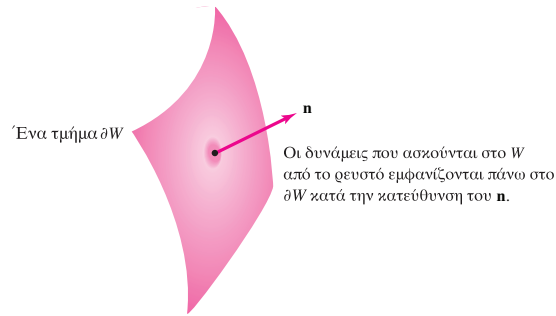
$$\sum_{j=1}^3 F_j \frac{\partial G^i}{\partial x^j} = F_1 \frac{\partial G^i}{\partial x} + F_2 \frac{\partial G^i}{\partial y} + F_3 \frac{\partial G^i}{\partial z}.$$

Θα αφήσουμε τις αποδείξεις των παραπάνω αποτελεσμάτων, οι οποίες είναι επεκτάσεις των συλλογισμών που χρησιμοποιήσαμε για να αποδείξουμε το Θεώρημα 8.5.1, στον αναγνώστη (βλ. ασκήσεις).

## Ορισμός της εξίσωσης του Euler για ένα ιδανικό ρευστό

Η εξίσωση συνέχειας δεν μας αρκεί για να προσδιορίσουμε πλήρως την κίνηση ενός ρευστού — χρειαζόμαστε επιπλέον συνθήκες.

Τα ρευστά που περιγράφει η εξίσωση συνέχειας μπορεί να είναι συμπίεσιμα. Αν  $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$  (περίπτωση ασυμπίεστου ρευστού) και το  $\rho$  είναι σταθερό, η εξίσωση (1') έπεται αυτομάτως. Εν γένει όμως, ακόμα και για ασυμπίεστα ρευστά, η εξίσωση δεν έπεται αυτομάτως, διότι το  $\rho$  μπορεί να εξαρτάται από τα  $(x, y, z)$  και  $t$ . Επομένως,

ΣΧΗΜΑ 8.5.2. Η δύναμη που ασκείται στο  $\partial W$  ανά μονάδα εμβαδού είναι  $-\rho \mathbf{n}$ .

ακόμη και αν ισχύει η εξίσωση  $\operatorname{div} \mathbf{V}$ , η  $\operatorname{div} (\rho \mathbf{V}) \neq 0$  ενδέχεται να εξακολουθεί να ισχύει.

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε την εξίσωση του Euler για ένα ιδανικό ρευστό. Θεωρούμε ένα μη ιζώδες ρευστό που κινείται σε έναν χώρο με πεδίο ταχυτήτων  $\mathbf{V}$ . Όταν λέμε ότι το ρευστό είναι *ιδανικό*, εννοούμε ότι αν  $W$  είναι οποιοδήποτε τμήμα του ρευστού, οι δυνάμεις πίεσης ασκούνται πάνω στο σύνορο του  $W$  κατά τη διεύθυνση του κάθετου διανύσμάτος του. Θεωρούμε ότι η δύναμη ανά μονάδα εμβαδού που ασκείται στο  $\partial W$  είναι  $-\rho \mathbf{n}$ , όπου  $p(x, y, z, t)$  είναι μια συνάρτηση που καλείται *πίεση* (βλ. Σχήμα 8.5.2). Άρα η συνολική δύναμη πίεσης που ασκείται στο  $W$  είναι

$$\mathbf{F}_{\partial W} = \text{δύναμη} = - \iint_{\partial W} p \mathbf{n} dS.$$

Η ποσότητα αυτή είναι *διανυσματική*: η  $i$ -οστή συνιστώσα του  $\mathbf{F}_{\partial W}$  είναι το ολοκλήρωμα της  $i$ -οστής συνιστώσας του  $p \mathbf{n}$  επί της επιφάνειας  $\partial W$  (άρα πρόκειται για το επιφανειακό ολοκλήρωμα μιας πραγματικής συνάρτησης). Αν  $\mathbf{e}$  είναι οποιοδήποτε σταθερό διάνυσμα του χώρου, έχουμε

$$\mathbf{F}_{\partial W} \cdot \mathbf{e} = - \iint_{\partial W} p \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} dS,$$

το οποίο είναι το ολοκλήρωμα μιας βαθμωτής ποσότητας επί του  $\partial W$ . Από το θεώρημα απόκλισης και την ταυτότητα (7) του πίνακα των διανυσματικών ταυτοτήτων (Ενότητα 4.4) παίρνουμε

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_{\partial W} = - \iiint_W \operatorname{div} (p \mathbf{E}) dx dy dz = - \iiint_W (\operatorname{grad} p) \cdot \mathbf{E} dx dy dz,$$

οπότε

$$\mathbf{F}_{\partial W} = - \iiint_W \nabla p dx dy dz.$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον *δεύτερο νόμο του Νεύτωνα* σε ένα κινούμενο χωρίο  $W_t$ . Όπως στο θεώρημα μεταφοράς,  $W_t = \phi_t(W)$ , όπου  $\phi_t(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, t)$  είναι η ροή του

V. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του ρευστού στο  $W_t$  ισούται με τη δύναμη που ασκείται σε αυτό:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{W_t} \rho \mathbf{V} \, dx \, dy \, dz = \mathbf{F}_{\partial W_t} = \iiint_{W_t} \nabla p \, dx \, dy \, dz.$$

Εφαρμόζοντας τη διανυσματική μορφή του θεωρήματος μεταφοράς στο αριστερό μέλος, παίρνουμε

$$\iiint_{W_t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}) + \mathbf{V} \cdot \nabla (\rho \mathbf{V}) + p \mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{V} \right] dx \, dy \, dz = - \iiint_{W_t} \nabla p \, dx \, dy \, dz.$$

Επειδή το  $W_t$  είναι αυθαίρετο, αυτό είναι ισοδύναμο με

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}) + \mathbf{V} \cdot \nabla (\rho \mathbf{V}) + p \mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{V} = -\nabla p.$$

Απλοποιώντας με χρήση της εξίσωσης συνέχειας, συγκεκριμένα της σχέσης (1'), παίρνουμε

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla p. \quad (2)$$

Αυτή είναι η *εξίσωση του Euler για ένα ιδανικό ρευστό*. Για συμπίεσιμα ρευστά, το  $p$  είναι μια δεδομένη συνάρτηση του  $\rho$  (για παράδειγμα, για πολλά αέρια,  $p = A\rho^\gamma$  για σταθερές  $A$  και  $\gamma$ ). Από την άλλη πλευρά, αν το ρευστό είναι ασυμπίεστο, το  $\rho$  προσδιορίζεται από τη συνθήκη  $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ . Έτσι, οι εξισώσεις (1) και (2) περιγράφουν την κίνηση του ρευστού.

Τις εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση ενός ρευστού συνήγαγε πρώτος ο Leonhard Euler το 1755, σε ένα άρθρο με τίτλο «Γενικές αρχές της κίνησης των ρευστών». Ο Euler παρήγαγε θεμελιώδες έργο στη μηχανική καθώς και ιδιαίτερα πλούσιο έργο στα θεωρητικά μαθηματικά, με ένα μικρό τμήμα του οποίου ασχοληθήκαμε ήδη σε αυτό το βιβλίο· ουσιαστικά θεμελίωσε την περιοχή της αναλυτικής μηχανικής (σε αντιδιαστολή με τις μεθόδους που στηρίζονται στην ευκλείδεια γεωμετρία, τις οποίες χρησιμοποίησε ο Νεύτωνας). Σε αυτόν οφείλουμε τις εξισώσεις του άκαμπτου σώματος (εξισώσεις που εφαρμόζονται, για παράδειγμα, στους δορυφόρους που πέφτουν) και τη διατύπωση πολλών βασικών εξισώσεων της μηχανικής βάσει των αρχών του λογισμού μεταβολών, δηλαδή με χρήση των μεθόδων μεγίστων και ελαχίστων των πραγματικών συναρτήσεων. Ο Euler έγραψε το πρώτο πλήρες εγχειρίδιο απειροστικού λογισμού και συνεισέφερε κάτι σχεδόν σε όλους τους κλάδους των μαθηματικών. Έγραψε πολλά βιβλία και εκατοντάδες επιστημονικά άρθρα ακόμα και ύστερα από την ολική τύφλωσή του, ενώ όταν πέθανε, το 1783, εργαζόταν πάνω σε μια νέα πραγματεία πάνω στη μηχανική των ρευστών. Οι εξισώσεις του Euler για τα ρευστά τροποποιήθηκαν τελικά από τους Navier και Stokes ώστε να καλύπτουν τη συμπεριφορά των ιξωδών ρευστών· οι εξισώσεις των Navier–Stokes περιγράφονται σχεδόν σε όλα τα εγχειρίδια μηχανικής ρευστών.<sup>1</sup> Στον Stokes οφείλουμε σφαλώς και το θεώρημα του Stokes, ένα από τα βασικά αποτελέσματα που εξετάζουμε στο βιβλίο!

<sup>1</sup>Το Clay Foundation προσφέρει 1.000.000 δολάρια σε όποιον αποδείξει ότι οι εξισώσεις Navier–Stokes για τα ασυμπίεστα ρευστά έχουν ομαλές λύσεις για κάθε  $t > 0$  αν τα δεδομένα είναι ομαλά για  $t = 0$ .

## Διατήρηση της ενέργειας και ορισμός της εξίσωσης θερμότητας

Αν  $T(t, x, y, z)$  (μια  $C^2$  συνάρτηση) είναι η θερμοκρασία ενός σώματος τη χρονική στιγμή  $t$ , τότε  $\nabla T$  είναι η κλίση της θερμοκρασίας: Η θερμότητα «ρέει» κατά το διανυσματικό πεδίο  $-\nabla T = \mathbf{F}$ . Προσέξτε ότι η κατεύθυνση του  $\nabla T$  είναι η κατεύθυνση προς την οποία *αυξάνεται* η  $T$ . Επειδή η θερμότητα ρέει από τα θερμά προς τα ψυχρά σημεία, έχουμε προσθέσει ένα μείον ώστε να αποτυπώσουμε αυτό το φυσικά παρατηρούμενο φαινόμενο. Η πυκνότητα ενέργειας, δηλαδή η ενέργεια ανά μονάδα όγκου, είναι  $c\rho_0 T$ , όπου  $c$  είναι μια σταθερά (που καλείται ειδική θερμότητα) και  $\rho_0$  είναι η πυκνότητα μάζας, την οποία θεωρούμε σταθερή. Το *διάνυσμα ροής ενέργειας* ορίζεται ως  $\mathbf{J} = k\mathbf{F}$ , όπου  $k$  είναι μια σταθερά που καλείται *αγωγιμότητα*.

Στη συνέχεια κάνουμε την υπόθεση ότι η ενέργεια διατηρείται. Αυτό σημαίνει ότι τα  $\mathbf{J}$  και  $\rho = c\rho_0 T$  θα πρέπει να ικανοποιούν την αρχή διατήρησης της μάζας, όπου τον ρόλο της «μάζας» παίζει το  $\rho$  (προσέξτε ότι είναι *πυκνότητα ενέργειας*, όχι μάζα), δηλαδή

$$\frac{d}{dt} \iiint_W \rho \, dV = - \iint_{\partial W} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Από το Θεώρημα 11 προκύπτει ότι αυτό είναι ισοδύναμο με

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Όμως

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \operatorname{div} (-k\nabla T) = -k\nabla^2 T.$$

(Υπενθυμίζουμε ότι  $\nabla^2 T = \partial^2 T / \partial^2 x + \partial^2 T / \partial^2 y + \partial^2 T / \partial^2 z$ , όπου  $\nabla^2$  είναι ο τελεστής Laplace). Συνεχίζοντας, έχουμε

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial (c\rho_0 T)}{\partial t} = c\rho_0 \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Επομένως η εξίσωση  $\operatorname{div} \mathbf{J} + \partial \rho / \partial t = 0$  γίνεται

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c\rho_0} \nabla^2 T = \kappa \nabla^2 T, \quad (3)$$

όπου το  $\kappa = k/c\rho_0$  καλείται *συντελεστής διάχυσης*. Η εξίσωση (3) είναι η σημαντική *εξίσωση θερμότητας*.

Ακριβώς όπως οι εξισώσεις (1) και (2) περιγράφουν τη ροή ενός ιδανικού ρευστού, η εξίσωση (3) περιγράφει τη διάδοση της θερμότητας με την εξής έννοια. Αν  $T(0, x, y, z)$  είναι μια δεδομένη αρχική κατανομή θερμοκρασίας, τότε ορίζεται μια μοναδική  $T(t, x, y, z)$  που ικανοποιεί την εξίσωση (3). Με άλλα λόγια, η αρχική συνθήκη για  $t = 0$  καθορίζει το αποτέλεσμα για  $t > 0$ . Προσέξτε ότι αν η  $T$  δεν μεταβάλλεται με το χρόνο (περίπτωση σταθερής κατάστασης), τότε πρέπει να έχουμε  $\nabla^2 T = 0$  (εξίσωση του Laplace).



Στη συνέχεια θα δείξουμε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη διανυσματική ανάλυση για να λύσουμε διαφορικές εξισώσεις με μια μέθοδο που καλείται *θεωρία δυναμικού* ή *μέθοδος της συνάρτησης του Green*.<sup>2</sup>

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση Poisson

$$\nabla^2 u = \rho$$

ως προς  $u(x, y, z)$ , όπου  $\rho(x, y, z)$  είναι μια δεδομένη συνάρτηση. Υπενθυμίζουμε ότι η συγκεκριμένη εξίσωση προκύπτει από τον νόμο του Gauss αν  $\mathbf{E} = \nabla u$ , καθώς και στο πρόβλημα του προσδιορισμού του βαρυτικού δυναμικού από μια δεδομένη κατανομή μάζας.

Μια συνάρτηση  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  με τις ιδιότητες

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \text{και} \quad \nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4)$$

(στην παραπάνω έκφραση το  $\mathbf{y}$  διατηρείται σταθερό), δηλαδή μια συνάρτηση που αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης με το  $\delta$  στη θέση του  $\rho$ , καλείται *συνάρτηση του Green* για τη συγκεκριμένη διαφορική εξίσωση. Το  $\rho(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση δέλτα του Dirac, η οποία «ορίζεται» ως εξής:<sup>3</sup>

$$(i) \quad \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0 \text{ για } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$$

και

$$(ii) \quad \iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1.$$

Η συνάρτηση αυτή χαρακτηρίζεται από την ακόλουθη ιδιότητα, η οποία έπεται από τις ιδιότητες (i) και (ii): Για οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση  $f(x)$ ,

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{y}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = f(\mathbf{x}). \quad (5)$$

Η ιδιότητα αυτή καλείται μερικές φορές *ιδιότητα «κοσκινίσματος»* της  $\delta$ .

**Θεώρημα 1.** Αν η  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση  $\nabla^2 u = \rho$  με την  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  στη θέση του  $\rho$ , τότε η

$$u(\mathbf{x}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (6)$$

είναι λύση της  $\nabla^2 u = \rho$ .

<sup>2</sup>Η παρουσίαση δεν θα είναι αυστηρή. Για περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί άλλα βιβλία αναφοράς, όπως τα G.F.D. Duff και D. Naylor, *Differential Equations of Applied Mathematics*, Wiley, New York, 1966, και R. Courant και D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*. Τόμοι I και II, John Wiley & Sons Inc., New York, 1989. Wiley Classics Library, ανατύπωση του πρωτοτύπου του 1962, έκδοση Wiley-Interscience.

<sup>3</sup>Ο ορισμός αυτός δεν είναι ακριβής. Παρόλα αυτά, εδώ αρκεί να θεωρήσουμε ότι η  $\delta$  είναι μια συμβολική έκφραση που χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα της εξίσωσης (4). Για έναν προσεκτικότερο ορισμό της  $\delta$  βλ. τις αναφορές της προηγούμενης υποσημείωσης.

**Απόδειξη.** Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\nabla^2 \iiint_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} &= \iiint_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} && \text{λόγω της (4)} \\ &= \rho(\mathbf{x}) && \text{λόγω της (5)}\end{aligned}$$

□

Η «συνάρτηση»  $\rho(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$  αντιπροσωπεύει ένα μοναδιαίο φορτίο συγκεντρωμένο σε ένα σημείο [βλ. συνθήκες (i) και (ii) παραπάνω]. Άρα η  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  αντιπροσωπεύει το δυναμικό στο  $\mathbf{x}$  λόγω ενός φορτίου τοποθετημένου στο  $\mathbf{y}$ .

**Συνάρτηση του Green στο  $\mathbb{R}^3$ .** Ισχυριζόμαστε ότι η εξίσωση (4) ικανοποιείται αν επιλέξουμε

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}.$$

Προφανώς,  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ . Για να ελέγξουμε το δεύτερο μέρος της εξίσωσης (4), πρέπει να επαληθεύσουμε ότι η  $\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  έχει τις εξής δύο ιδιότητες της συνάρτησης  $\delta$ :

(i)  $\nabla^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$  για  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$

και

(ii)  $\iiint_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1$ .

Θα εξηγήσουμε τη σημασία της ιδιότητας (ii) στην πορεία της ανάλυσης που ακολουθεί. Η ιδιότητα (i) ισχύει διότι η κλίση της  $G$  είναι

$$\nabla G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{r}}{4\pi r^3}, \quad (7)$$

όπου  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$  είναι το διάνυσμα από το  $\mathbf{y}$  στο  $\mathbf{x}$  και  $r = \|\mathbf{r}\|$  (βλ. Άσκηση 30, Ενότητα 4.4), και συνεπώς για  $r \neq 0$  έχουμε  $\nabla \cdot \nabla G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$  (όπως στην προαναφερθείσα άσκηση). Για την ιδιότητα (ii), έστω  $B$  μια μπάλα γύρω από το  $\mathbf{x}$ . Από την ιδιότητα (i),

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \iiint_B \nabla^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Αυτό, με τη σειρά του, ισούται με

$$\iint_{\partial B} \nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} dS,$$

λόγω του Θεωρήματος του Gauss. Επομένως, χρησιμοποιώντας την (7), παίρνουμε

$$\iint_{\partial B} \nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\partial B} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{4\pi r^3} dS = 1,$$

το οποίο αποδεικνύει την ιδιότητα (ii). Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 1, μια λύση της  $\nabla^2 u = \rho$  είναι η

$$u(\mathbf{x}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{-\rho(\mathbf{y})}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y}. \quad (8)$$

**Συνάρτηση του Green στις δύο διαστάσεις.** . Αν είμαστε στο επίπεδο αντί στο  $\mathbb{R}^3$ , μπορούμε με αντίστοιχο τρόπο να δείξουμε ότι

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \log \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad (9)$$

οπότε μια λύση της εξίσωσης  $\nabla^2 u = \rho$  είναι η

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \rho(\mathbf{y}) \log \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| d\mathbf{y}.$$

**Ταυτότητες του Green.** Θα στρέψουμε τώρα την προσοχή μας στο πρόβλημα της χρήσης των συναρτήσεων του Green για να λύσουμε την εξίσωση του Poisson σε ένα φραγμένο χωρίο με δεδομένες συνοριακές συνθήκες. Για να το κάνουμε, χρειαζόμαστε την πρώτη και τη δεύτερη ταυτότητα του Green, οι οποίες προκύπτουν από το θεώρημα απόκλισης (βλ. Άσκηση 15, Ενότητα 8.4). Ξεκινάμε με την ταυτότητα

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS,$$

όπου  $V$  είναι ένα χωρίο του χώρου,  $S$  το σύνορό του και  $\mathbf{n}$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα με κατεύθυνση προς τα έξω. Αντικαθιστώντας το  $\mathbf{F}$  με  $f\nabla g$ , όπου  $f$  και  $g$  είναι βαθμωτές συναρτήσεις, παίρνουμε

$$\iiint_V \nabla f \cdot \nabla g dV + \iiint_V f \nabla^2 g dV = \iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS, \quad (10)$$

όπου  $\partial g / \partial n = \nabla g \cdot \mathbf{n}$ . Αυτή είναι η **πρώτη ταυτότητα του Green**. Αν αντιμετωπίσουμε απλώς τις  $f$  και  $g$  και αφαιρέσουμε το αποτέλεσμα από την εξίσωση (10), παίρνουμε τη **δεύτερη ταυτότητα του Green**,

$$\iiint_V (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV = \iint_S \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS, \quad (11)$$

την οποία θα χρησιμοποιήσουμε σε λίγο.

**Συναρτήσεις του Green για φραγμένα χωρία.** Θεωρούμε την εξίσωση Poisson  $\nabla^2 u = \rho$  σε κάποιο χωρίο  $V$  και τις αντίστοιχες εξισώσεις για τη συνάρτηση του Green:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \text{και} \quad \nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Εισάγοντας τις  $u$  και  $G$  στη δεύτερη ταυτότητα του Green (11), παίρνουμε

$$\iiint_V (u \nabla^2 G - G \nabla^2 u) dV = \iint_S \left( f \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS.$$

Επιλέγοντας ως μεταβλητή ολοκλήρωσης το  $\mathbf{y}$  και χρησιμοποιώντας την  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ , παίρνουμε

$$\iiint_V [u(\mathbf{y})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rho(\mathbf{y})] d\mathbf{y} = \iint_S \left( u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS,$$

και λόγω της εξίσωσης (5),

$$u(\mathbf{x}) = \iiint_V G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \iint_S \left( u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \quad (12)$$

Σημειωτέον ότι για μη φραγμένο χωρίο, αυτό ταυτίζεται με το προηγούμενο αποτέλεσμα, την εξίσωση (6), για όλο τον χώρο. Η εξίσωση (12) μας επιτρέπει να λύσουμε ως προς  $u$  σε ένα φραγμένο χωρίο όπου  $\rho = 0$  ενσωματώνοντας τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί η  $u$  στο  $S$ .

Αν  $\rho = 0$ , η εξίσωση (12) γίνεται

$$u = \iint_S \left( u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS,$$

ή, σε πλήρη ανάπτυξη,

$$u(\mathbf{x}) = \iint_S \left[ u(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) \right] dS, \quad (13)$$

όπου η  $u$  εμφανίζεται και στα δύο μέλη της εξίσωσης και η μεταβλητή ολοκλήρωσης είναι το  $\mathbf{y}$ . Το κρίσιμο σημείο είναι ότι για να υπολογίσουμε την τιμή του ολοκληρώματος χρειάζεται να γνωρίζουμε μόνο τη συμπεριφορά της  $u$  στο  $S$ . Συνήθως, είτε δίνεται η  $u$  στο σύνορο (**πρόβλημα Dirichlet**), είτε δίνεται η  $\partial u / \partial n$  στο σύνορο (**πρόβλημα Neumann**). Αν γνωρίζουμε την  $u$  στο σύνορο, θέλουμε να κάνουμε το  $G \partial u / \partial n$  να μηδενίζεται στο σύνορο ώστε να μπορέσουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα. Επομένως, αν δίνεται η  $u$  στο  $S$  πρέπει να βρούμε μια  $G$  τέτοια ώστε η  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  να μηδενίζεται όποτε το  $\mathbf{y}$  ανήκει στο  $S$ . Μια τέτοια συνάρτηση καλείται **συνάρτηση Dirichlet του Green για το χωρίο  $V$** . Αντιθέτως, αν δίνεται η  $\partial u / \partial n$  στο  $S$ , πρέπει να βρούμε μια  $G$  τέτοια ώστε η  $\partial G / \partial n$  να μηδενίζεται στο  $S$ . Μια τέτοια συνάρτηση καλείται **συνάρτηση Neumann του Green**.

Επομένως, μια συνάρτηση Dirichlet του Green  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  ορίζεται για  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{y}$  στο τριδιάστατο χωρίο  $V$  και ικανοποιεί τις εξής τρεις συνθήκες:

(α)  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ,

(β)  $\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ ,

(γ)  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  όταν το  $\mathbf{y}$  ανήκει στο  $S$ , το σύνορο του χωρίου  $V$ .

[Προσέξτε ότι, λόγω της συνθήκης (α), στις συνθήκες (β) και (γ) μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τις μεταβλητές  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{y}$  χωρίς να μεταβληθεί η συνθήκη.]

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η συνθήκη (α) είναι ουσιαστικά συνέπεια των συνθηκών (β) και (γ), αν οι (β) και (γ) ισχύουν και αυτές όταν αντιμεταθέσουμε τα  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{y}$ .

Για να το επιβεβαιώσουμε, κρατάμε σταθερά τα  $\mathbf{y}$  και  $\mathbf{w}$  και χρησιμοποιούμε την εξίσωση (11) με  $f(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  και  $g(\mathbf{x}) = G(\mathbf{w}, \mathbf{x})$ . Λόγω της συνθήκης (β),

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \text{και} \quad \nabla^2 g(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{w}),$$

και, λόγω της συνθήκης (γ), οι  $f$  και  $g$  μηδενίζονται όταν το  $\mathbf{x}$  ανήκει στο  $S$ , οπότε το δεξί μέλος της εξίσωσης (11) είναι ίσο με μηδέν. Στο αριστερό μέλος, αντικαθιστώντας τις  $f(\mathbf{x})$  και  $g(\mathbf{x})$ , παίρνουμε

$$\iiint_V [G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{w}) - G(\mathbf{w}, \mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})] d\mathbf{x} = 0,$$

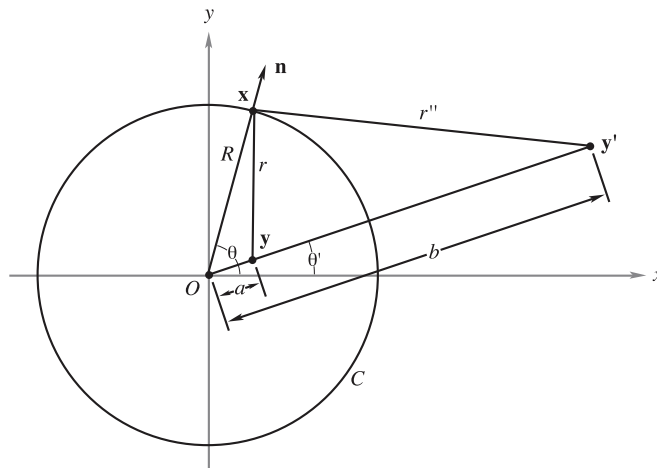
από την οποία προκύπτει

$$G(\mathbf{w}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{w}),$$

που είναι η ζητούμενη συμμετρία της  $G$ . Αυτό σημαίνει, ουσιαστικά, ότι αν οι (β) και (γ) ισχύουν όταν αντιμετωπίσουμε τα  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{y}$ , δεν είναι απαραίτητο να ελέγξουμε τη συνθήκη (α). (Αυτό το αποτέλεσμα καλείται μερικές φορές *αρχή της αμοιβαιότητας*.)

Άρα η επίλυση οποιουδήποτε συγκεκριμένου προβλήματος Dirichlet ή Neumann ανάγεται στην εύρεση των εξισώσεων του Laplace σε ολόκληρο το  $\mathbb{R}^2$  ή  $\mathbb{R}^3$ , συγκεκριμένα των εξισώσεων (8) και (9).

**Συνάρτηση του Green για δίσκο.** Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των συναρτήσεων του Green στις δύο διαστάσεις για να κατασκευάσουμε την συνάρτηση Dirichlet του Green για έναν δίσκο ακτίνας  $R$  (βλ. Σχήμα 8.5.3). Αυτό θα μας επιτρέψει να λύσουμε την  $\nabla^2 u = 0$  (ή την  $\nabla^2 u = \rho$ ) με δεδομένη την  $u$  στον κύκλο που αποτελεί το σύνορο του δίσκου.



ΣΧΗΜΑ 8.5.3. Η γεωμετρία της κατασκευής της συνάρτησης του Green για έναν δίσκο.

Στο Σχήμα 8.5.3 έχουμε σχεδιάσει το σημείο  $\mathbf{x}$  επάνω στην περιφέρεια διότι εκεί θέλουμε να μηδενίζεται η  $G$ . [Σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία, η  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  θα

πρέπει να μηδενίζεται όταν είτε το  $\mathbf{x}$  είτε το  $\mathbf{y}$  ανήκουν στον  $C$ . Για αρχή, επιλέξουμε να ανήκει στον  $C$  το  $\mathbf{x}$ .] Η συνάρτηση του Green  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  που θα βρούμε θα ισχύει, ασφαλώς, για όλα τα  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  που ανήκουν στον δίσκο. Το σημείο  $\mathbf{y}'$  είναι η «ανάκλαση» του σημείου  $\mathbf{y}$  στο χωρίο εκτός του κύκλου, ώστε να έχουμε  $ab = R^2$ . Όταν  $\mathbf{x} \in C$ , λόγω της ομοιότητας των τριγώνων  $\mathbf{xOy}$  και  $\mathbf{xOy}'$ ,

$$\frac{r}{R} = \frac{r''}{b}, \quad \text{δηλαδή} \quad r = \frac{r''R}{b} = \frac{r''a}{R}.$$

Επομένως, αν επιλέξουμε ως συνάρτηση του Green την

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \left( \log r - \log \frac{r''a}{R} \right), \quad (14)$$

βλέπουμε ότι η  $G$  είναι μηδέν αν το  $\mathbf{x}$  ανήκει στον  $C$ . Αφού η ποσότητα  $r''a/R$  ισούται με  $r$  όταν το  $\mathbf{y}$  ανήκει στον  $C$ , η  $G$  μηδενίζεται και όταν το  $\mathbf{y}$  ανήκει στον  $C$ . Αν μπορούσαμε να δείξουμε ότι η  $G$  ικανοποιεί την  $\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  στον κύκλο, τότε θα έχουμε αποδείξει ότι η  $G$  είναι πράγματι η συνάρτηση Dirichlet του Green. Από την εξίσωση (9) γνωρίζουμε ότι  $\nabla^2(\log r)/2\pi = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ , οπότε

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}'),$$

αλλά το  $\mathbf{y}'$  βρίσκεται πάντα έξω από τον κύκλο, άρα το  $\mathbf{x}$  δεν μπορεί να ισούται ποτέ με το  $\mathbf{y}'$  οπότε το  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}')$  είναι πάντα μηδέν. Επομένως

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

άρα η  $G$  είναι η συνάρτηση Dirichlet του Green για τον δίσκο.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε το πρόβλημα της επίλυσης της

$$\nabla^2 u = 0$$

σε αυτόν τον κύκλο αν  $u(R, \theta) = f(\theta)$  είναι η δεδομένη συνοριακή συνθήκη. Από την εξίσωση (13) έχουμε μια λύση:

$$u = \int_C \left( u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

Όμως  $G = 0$  στον  $C$ , οπότε απομένει το ολοκλήρωμα

$$u = \int_C u \frac{\partial G}{\partial n} ds,$$

όπου μπορούμε να αντικαταστήσουμε την  $u$  με την  $f(\theta)$ , αφού το ολοκλήρωμα υπολογίζεται επί του  $C$ . Άρα το πρόβλημα της επίλυσης του προβλήματος Dirichlet στον κύκλο ανάγεται στην εύρεση της  $\partial G/\partial n$ . Από την εξίσωση (14) προκύπτει ότι

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{1}{r''} \frac{\partial r''}{\partial n} \right).$$

Όμως

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \nabla r \cdot \mathbf{n} \quad \text{και} \quad \nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r},$$

όπου  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ , άρα

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r} = \frac{r \cos(nr)}{r} = \cos(nr),$$

όπου  $(nr)$  είναι η γωνία που σχηματίζουν τα  $\mathbf{n}$  και  $\mathbf{r}$ . Με αντίστοιχο τρόπο,

$$\frac{\partial r''}{\partial n} = \cos(nr'').$$

Στο τρίγωνο  $\mathbf{x}\mathbf{y}O$ , από τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε  $a^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos(nr)$ , ενώ στο τρίγωνο  $\mathbf{x}\mathbf{y}'O$  έχουμε  $b^2 = (r'')^2 + R^2 - 2r''R \cos(nr'')$ , οπότε

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \cos(nr) = \frac{R^2 + r^2 - a^2}{2rR} \quad \text{και} \quad \frac{\partial r''}{\partial n} = \cos(nr'') = \frac{R^2 + (r'')^2 - a^2}{2(r'')R}$$

Επομένως

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{R^2 + r^2 - a^2}{2rR} - \frac{R^2 + (r'')^2 - a^2}{2(r'')R} \right].$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση μεταξύ  $r$  και  $r''$  όταν το  $\mathbf{x}$  ανήκει στον  $C$ , παίρνουμε

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\mathbf{x} \in C} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{R^2 - a^2}{Rr^2} \right).$$

Άρα η λύση μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_C f(\theta) \frac{R^2 - a^2}{Rr^2} ds.$$

Ας τη γράψουμε σε πιο χρήσιμη μορφή. Παρατηρούμε ότι στο τρίγωνο  $\mathbf{x}\mathbf{y}O$  μπορούμε να γράψουμε

$$r = [a^2 + R^2 - 2aR \cos(\theta - \theta')]^{1/2},$$

όπου  $\theta$  και  $\theta'$  είναι οι πολικές γωνίες των  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{y}$ , αντίστοιχα. Δεύτερον, η λύση πρέπει να ισχύει για όλα τα  $\mathbf{y}$  στον κύκλο· άρα η απόσταση του  $\mathbf{y}$  από την αρχή των αξόνων πρέπει να γίνει πλέον μεταβλητή, την οποία θα ονομάσουμε  $r'$ . Τέλος, παρατηρούμε ότι  $ds = R d\theta$  στον  $C$ , οπότε μπορούμε να γράψουμε τη λύση σε πολικές συντεταγμένες ως

$$u(r', \theta') = \frac{R^2 - (r')^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta) d\theta}{(r')^2 + R^2 - 2r'R \cos(\theta - \theta')}.$$

Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως **εξίσωση του Poisson στις δύο διαστάσεις**.<sup>4</sup> Σαν άσκησις, ο αναγνώστης θα πρέπει να τη χρησιμοποιήσει για να γράψει τη λύση της  $\nabla^2 u = \rho$  όπου  $u$  είναι δεδομένη συνάρτηση  $f(\theta)$  στο σύνορο.

<sup>4</sup>Η διάσημη αυτή σχέση μπορεί να προκύψει και με άλλους τρόπους. Για τη μέθοδο των μιγαδικών μεταβλητών, βλ. J. Marsden και M. Hoffman, Basic Complex Analysis, 2η έκδοση, Freeman, New York, 1987, σελ. 195. Για τη μέθοδο των σειρών Fourier, βλ. J. Marsden, Elementary Classical Analysis, Freeman, New York, 1974, σελ. 466.

## Ασκήσεις

1. Αποδείξτε με απευθείας συλλογισμούς (ή χρησιμοποιώντας την απόδειξη του Θεωρήματος 1 του διαδικτυακού συμπληρώματος της Ενότητας 4.4) ότι

$$\frac{\partial}{\partial t} J(\mathbf{x}, t) = [\operatorname{div} \mathbf{F}(\phi(\mathbf{x}, t))]J(\mathbf{x}, t).$$

2. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών και την Άσκηση 1, δείξτε ότι αν  $f(x, y, z, t)$  είναι δεδομένη συνάρτηση και  $W \subset \mathbb{R}^3$  οποιοδήποτε χωρίο, τότε ισχύει η εξίσωση μεταφοράς:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{W_t} f(x, y, z, t) dx dy dz = \iiint_{W_t} \left( \frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div} \mathbf{F} \right) dx dy dz,$$

όπου  $W_t = \phi_t(W)$ , το οποίο είναι το χωρίο που μετακινείται με τη ροή, και όπου  $Df/Dt = \partial f/\partial t + \nabla f \cdot \mathbf{F}$  είναι η υλική παράγωγος.

3. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση μεταφοράς, δείξτε ότι η

$$\frac{d}{dt} \iiint_{W_t} \rho dx dy dz = 0$$

είναι ισοδύναμη με την αρχή διατήρησης της μάζας.

4. Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 3 και το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών, δείξτε ότι η  $\rho(\mathbf{x}, t)$  μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της ιακωβιανής  $J(\mathbf{x}, t)$  της απεικόνισης ροής  $\phi(\mathbf{x}, t)$  και της  $\rho(\mathbf{x}, 0)$  μέσω της εξίσωσης

$$\rho(\mathbf{x}, t)J(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, 0).$$

Τι μπορείτε να συμπεράνετε για την περίπτωση ασυμπίεστης ροής;

5. Αποδείξτε τη διανυσματική μορφή του θεωρήματος μεταφοράς, συγκεκριμένα,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{W_t} (f\mathbf{F}) dx dy dz = \\ \iiint_{W_t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (f\mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot \nabla (f\mathbf{F}) + (f\mathbf{F}) \operatorname{div} \mathbf{F} \right] dx dy dz, \end{aligned}$$

όπου  $\mathbf{F} \cdot \nabla (f\mathbf{F})$  είναι ο  $3 \times 3$  πίνακας παραγώγων  $\mathbf{D}(f\mathbf{F})$  εφαρμοσμένος στο διάνυσμα στήλη  $\mathbf{F}$ . Σε καρτεσιανές συντεταγμένες,  $\mathbf{F} \cdot \nabla \mathbf{G}$  είναι το διάνυσμα που έχει ως  $i$ -οστή συνιστώσα την

$$\sum_{j=1}^3 F_j \frac{\partial G^i}{\partial x_j} = F_1 \frac{\partial G^i}{\partial x} + F_2 \frac{\partial G^i}{\partial y} + F_3 \frac{\partial G^i}{\partial z}.$$



6. Έστω  $\mathbf{V}$  ένα διανυσματικό πεδίο με ροή  $\phi(\mathbf{x}, t)$  και έστω ότι τα  $\mathbf{V}$  και  $\rho$  ικανοποιούν την αρχή διατήρησης της μάζας. Έστω  $W_t$  το χωρίο που μεταφέρεται με τη ροή. Αποδείξτε την ακόλουθη εκδοχή του θεωρήματος μεταφοράς:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{W_t} \rho f \, dx \, dy \, dz = \iiint_{W_t} \rho \frac{Df}{Dt} \, dx \, dy \, dz.$$

7. (Νόμος του Bernoulli)

- (α) Έστω ότι τα  $\mathbf{V}$ ,  $\rho$  ικανοποιούν την αρχή διατήρησης της μάζας και την εξίσωση (2) (εξίσωση του Euler για ένα ιδανικό ρευστό). Υποθέτουμε ότι το  $\mathbf{V}$  είναι αστρόβιλο, και συνεπώς ότι  $\mathbf{V} = \nabla\phi$  για μια συνάρτηση  $\phi$ . Δείξτε ότι αν  $C$  είναι μια διαδρομή που συνδέει δύο σημεία  $P_1$  και  $P_2$ , τότε

$$\left( \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\mathbf{V}\|^2 \right) \Big|_{P_1}^{P_2} + \int_C \frac{dp}{\rho} = 0.$$

[ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Ίσως χρειαστείτε τη διανυσματική ταυτότητα  $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = \frac{1}{2}\nabla(\|\mathbf{V}\|^2) + (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V}$ .]

- (β) Αν στο ερώτημα (α) το  $\mathbf{V}$  είναι στάσιμο —δηλαδή  $\partial\mathbf{V}/\partial t = 0$ — και το  $\rho$  είναι σταθερό, δείξτε ότι η ποσότητα

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{V}\|^2 + \frac{p}{\rho}$$

είναι σταθερή στον χώρο. Συμπεράνετε ότι, σε αυτή την περίπτωση, υψηλότερη πίεση συνδέεται με χαμηλότερη ταχύτητα του ρευστού.

8. Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 7, δείξτε ότι αν η  $\phi$  ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace  $\nabla^2\phi = 0$ , τότε η  $\mathbf{V} = \nabla\phi$  είναι μια στάσιμη λύση της εξίσωσης του Euler για ένα ιδανικό ασυμπίεστο υγρό σταθερής πυκνότητας.
9. Επαληθεύστε ότι από τις εξισώσεις του Maxwell έπεται η εξίσωση συνέχειας για τα  $\mathbf{J}$  και  $\rho$ .
10. (α) Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του Σχήματος 8.5.3, δείξτε ότι το πρόβλημα του Dirichlet για μια σφαίρα ακτίνας  $R$  στις τρεις διαστάσεις έχει την εξής συνάρτηση του Green:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{R}{ar''} - \frac{1}{r} \right).$$

- (β) Αποδείξτε την εξίσωση του Poisson στις τρεις διαστάσεις:

$$u(\mathbf{y}) = \frac{R(R^2 - a^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{f(\theta, \phi) \sin\phi \, d\theta \, d\phi}{(R^2 - a^2 - 2Ra \cos\gamma)^{3/2}}.$$

11. Έστω  $H$  ο άνω ημιχώρος  $z \geq 0$ . Για ένα σημείο  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  του  $H$ , έστω  $R(\mathbf{x}) = (x, y, -z)$  η ανάκλαση του  $\mathbf{x}$  ως προς το επίπεδο  $xy$ . Έστω  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -1/(4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)$  η συνάρτηση του Green για όλο το  $\mathbb{R}^3$ .

(α) Επαληθεύστε ότι η συνάρτηση  $\tilde{G}$  που ορίζεται από την

$$\tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G(R(\mathbf{x}), \mathbf{y})$$

είναι η συνάρτηση του Green για τη λαπλασιανή στον  $H$ .

(β) Γράψτε έναν τύπο για τη λύση  $u$  του προβλήματος

$$\nabla^2 u = \rho \text{ στο } H \quad \text{και} \quad u(x, y, 0) = \phi(x, y).$$

Στις Ασκήσεις 12 έως 18 παρουσιάζονται ενδεικτικές εφαρμογές του διανυσματικού λογισμού στα κρουστικά κύματα.<sup>5</sup>

12. Θεωρήστε την εξίσωση

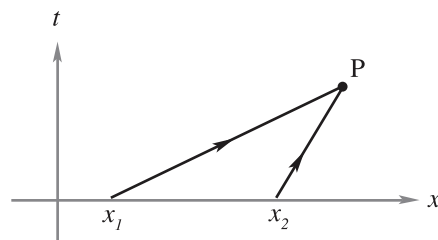
$$u_t + uu_x = 0$$

για μια συνάρτηση  $u(x, t)$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,  $t \geq 0$ , όπου  $u_t = \partial u / \partial t$  και  $u_x = \partial u / \partial x$ . Έστω  $u(x, 0) = u_0(x)$  η δεδομένη τιμή της  $u$  για  $t = 0$ . Οι καμπύλες  $(x(s), t(s))$  του επιπέδου  $xt$  που ορίζονται από τις

$$\dot{x} = u, \quad \dot{t} = 1$$

καλούνται **χαρακτηριστικές καμπύλες** (η τελεία δηλώνει παραγώγιση ως προς  $s$ ).

- (α) Δείξτε ότι η  $u$  είναι σταθερή κατά μήκος κάθε χαρακτηριστικής καμπύλης δείχνοντας ότι  $\dot{u} = 0$ .
- (β) Δείξτε ότι οι κλίσεις των χαρακτηριστικών καμπυλών δίνονται από την  $dt/dx = 1/u$  και χρησιμοποιήστε το για να δείξετε ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι ευθείες που καθορίζονται από τα αρχικά δεδομένα.
- (γ) Υποθέστε ότι  $x_1 < x_2$  και  $u_0(x_1) > u_0(x_2) > 0$ . Δείξτε ότι οι δύο χαρακτηριστικές καμπύλες που διέρχονται από τα σημεία  $(x_1, 0)$  και  $(x_2, 0)$  τέμνονται σε ένα σημείο  $P = (\bar{x}, \bar{t})$  με  $\bar{t} > 0$ . Δείξτε ότι από αυτό σε συνδυασμό με το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) έπεται ότι η λύση δεν μπορεί να είναι συνεχής στο  $P$  (βλ. Σχήμα 8.5.4).



ΣΧΗΜΑ 8.5.4. Χαρακτηριστικές καμπύλες της εξίσωσης  $u_t + uu_x = 0$ .

(δ) Υπολογίστε το  $\bar{t}$ .

<sup>5</sup>Για επιπλέον λεπτομέρειες, συμβουλευτείτε τα A. J. Chorin και J. E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, 3η έκδοση, Springer-Verlag, New York, 1992, και P. D. Lax, «The Formation and Decay of Shock Waves,» *Am. Math. Monthly* 79 (1972): 227- 241. Ευχαριστούμε πολύ τον Joel Smoller που πρότεινε αυτή τη σειρά ασκήσεων.

13. Επαναλάβετε την Άσκηση 12 για την εξίσωση

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (15)$$

όπου  $f'' > 0$  και  $f'(u_0(x_2)) > 0$ . Στην περίπτωση αυτή, οι χαρακτηριστικές καμπύλες ορίζονται από τις  $\dot{x} = f'(u)$ ,  $\dot{t} = 1$ . Λέμε ότι η εξίσωση (15) είναι σε **μορφή απόκλισης**. (Αυτή η άσκηση δείχνει ότι εν γένει είναι αδύνατο να έχουμε συνεχή λύση — ανεξάρτητα από την ομαλότητα της  $f$ !)

14. (Ασθενείς λύσεις) Δεδομένου ότι εξισώσεις σαν αυτές της Άσκησης 13 εμφανίζονται σε πολλές φυσικές εφαρμογές [στη δυναμική αερίων, στη μαγνητοϋδροδυναμική, στη μη γραμμική οπτική (λείζερ)] και επειδή θα ήταν βολικό να υπάρχει μια λύση για κάθε χρονική στιγμή  $t$ , είναι επιθυμητό να ερμηνεύσουμε με διαφορετικό τρόπο την εξίσωση έτσι ώστε να έχει νόημα όταν αναπτύσσονται ασυνέχειες. Για αυτό τον σκοπό, έστω  $\phi = \phi(x, t)$  μια συνάρτηση  $C^1$ . Έστω  $D$  ένα ορθογώνιο του επιπέδου  $xy$  που ορίζεται από τις  $-a \leq x \leq a$  και  $0 \leq t \leq T$  για το οποίο  $\phi(x, t) = 0$  για  $x = \pm a$ ,  $x = T$  και για κάθε  $(x, t)$  του άνω ημιεπιπέδου στο εξωτερικό του  $D$ . Έστω  $u$  μια «γνήσια» λύση της εξίσωσης (15).

(α) Δείξτε ότι

$$\iint_{t \geq 0} [u\phi_t + f(u)\phi_x] dx dt + \int_{t=0} u_0(x)\phi(x, 0) dx = 0. \quad (16)$$

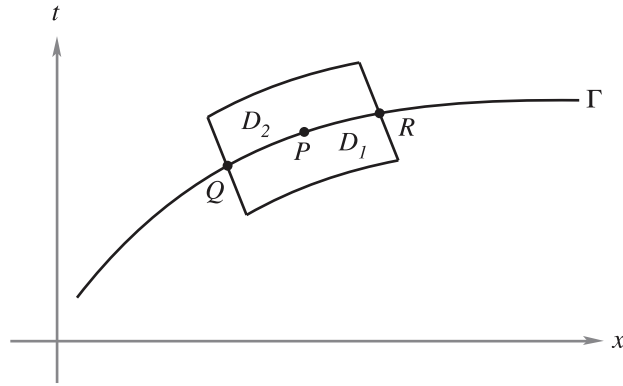
(ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Ξεκινήστε με την  $\iint_D [u_t + f(u)_x]\phi dx dt = 0$ .)

Άρα, αν η  $u$  είναι ομαλή λύση, τότε η εξίσωση (16) ισχύει για όλες τις παραπάνω  $\phi$ . Καλούμε τη συνάρτηση  $u$  **ασθενή λύση** της εξίσωσης (15) αν η εξίσωση (16) ισχύει για κάθε τέτοια  $\phi$ .

(β) Δείξτε ότι αν η  $u$  είναι μια ασθενής λύση που είναι  $C^1$  σε ένα ανοιχτό σύνολο  $\Omega$  του άνω ημιεπιπέδου  $xt$ , τότε η  $u$  είναι γνήσια λύση της εξίσωσης (15) στο  $\Omega$ .

15. (Η **συνθήκη άλματος**, γνωστή στη δυναμική αερίων και ως **συνθήκη Rankine-Hugoniot**.) Είναι προφανές ότι ο ορισμός της ασθενούς λύσης που δώσαμε στην Άσκηση 14 επιτρέπει ασυνεχείς λύσεις. Ωστόσο, ο αναγνώστης θα διαπιστώσει τώρα ότι δεν είναι επιτρεπτό οποιοδήποτε είδος ασυνέχειας, καθώς υπάρχει σχέση μεταξύ της καμπύλης ασυνέχειας και των τιμών της λύσης εκατέρωθεν της ασυνέχειας.

Έστω  $u$  μια (ασθενής) λύση της εξίσωσης (15) και ας υποθέσουμε ότι  $\Gamma$  είναι μια ομαλή καμπύλη του επιπέδου  $xt$  τέτοια ώστε η  $u$  να πραγματοποιεί «άλματα» εγκαρσίως της καμπύλης  $\Gamma$ , δηλαδή η  $u$  είναι κλάσης  $C^1$  εκτός από τις ασυνέχειες άλματος εγκαρσίως της  $\Gamma$ . Καλούμε αυτή τη  $\Gamma$  **κρουστικό κύμα**. Επιλέγουμε ένα σημείο  $P \in \Gamma$  και κατασκευάζουμε, κοντά στο  $P$ , ένα «ορθογώνιο»  $D = D_1 \cup D_2$ , όπως στο Σχήμα 8.5.5. Επιλέγουμε τη  $\phi$  έτσι ώστε να μηδενίζεται στο  $D$  και στο εξωτερικό του  $D$ .

ΣΧΗΜΑ 8.5.5. Η λύση  $u$  εκτελεί άλμα από την τιμή  $u_1$  στην τιμή  $u_2$  εγκαρσώς της  $\Gamma$ .

(α) Δείξτε ότι

$$\iint_D [u\phi_t + f(u)\phi_x] dx dt = 0$$

και

$$\iint_{D_1} [u\phi_t + f(u)\phi_x] dx dt = \iint_{D_1} [(u\phi)_t + (f(u)\phi)_x] dx dt.$$

(β) Υποθέστε ότι η τιμή της  $u$  πραγματοποιεί άλμα από την τιμή  $u_1$  στην τιμή  $u_2$  εγκαρσώς της  $\Gamma$  έτσι ώστε όταν το  $(x, t)$  τείνει σε ένα σημείο  $(x_0, t_0)$  της  $\Gamma$  από το  $\partial D_i$ , το  $u(x, t)$  να τείνει στην τιμή  $u_i(x_0, t_0)$ . Δείξτε ότι

$$0 = \int_{\partial D_1} \phi[-u dx + f(u) dt] + \int_{\partial D_2} \phi[-u dx + f(u) dt]$$

και συμπεράνετε ότι

$$0 = \int_{\Gamma} \phi([-u] dx + [f(u)] dt),$$

όπου με  $[ \alpha(u) ] = \alpha(u_2) - \alpha(u_1)$  συμβολίζουμε ένα άλμα κατά  $\alpha(u)$  εγκαρσώς της  $\Gamma$ .(γ) Αν η καμπύλη  $\Gamma$  ορίζει πεπλεγμένα το  $x$  σαν συνάρτηση του  $t$  και το  $\partial D$  τέμνει την  $\Gamma$  στα  $Q = (x(t_1), t_1)$  και  $R = (x(t_2), t_2)$ , δείξτε ότι

$$0 = \int_Q^R \phi([-u] dx + [f(u)] dt) = \int_{t_1}^{t_2} \phi \left( [-u] \frac{dx}{dt} + [f(u)] \right) dt.$$

(δ) Δείξτε ότι στο σημείο  $P$  της  $\Gamma$ ,

$$[u] \cdot s = [f(u)], \quad (17)$$

όπου  $s = dx/dt$  στο  $P$ . Ο αριθμός  $s$  καλείται *ταχύτητα* της ασυνέχειας. Η εξίσωση (17) καλείται *συνθήκη άλματος*: είναι η σχέση που πρέπει να ικανοποιεί κάθε ασυνεχής λύση.

16. (Απώλεια μοναδικότητας) Ένα μειονέκτημα που έχει η αποδοχή ασθενών λύσεων είναι η απώλεια της μοναδικότητας. (Στη δυναμική αερίων, κάποιες μαθηματικές λύσεις είναι ξένες προς το πρόβλημα και απορρίπτονται για φυσικούς λόγους. Για παράδειγμα, οι ασθενείς λύσεις κρουστικών κυμάτων αραιώσης απορρίπτονται διότι δηλώνουν ότι η εντροπία μειώνεται εγκαρσίως της ασυνέχειας.) Θεωρήστε την εξίσωση

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, \quad \text{με αρχικά δεδομένα} \quad u(x, 0) = \begin{cases} -1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0. \end{cases}$$

Δείξτε ότι για κάθε  $\alpha \geq 1$ , η  $u_\alpha$  που ορίζεται ως

$$u_\alpha(x, t) = \begin{cases} 1, & x \leq \frac{1-\alpha}{2}t \\ -\alpha, & \frac{1-\alpha}{2}t \leq x \leq 0 \\ \alpha, & 0 \leq x \leq \frac{\alpha-1}{2}t \\ -1, & \frac{\alpha-1}{2}t < x. \end{cases}$$

είναι μια ασθενής λύση. (Αποδεικνύεται ότι αν  $f'' > 0$ , μπορούμε να ανακτήσουμε τη μοναδικότητα επιβάλλοντας έναν επιπλέον περιορισμό στις λύσεις. Επομένως, υπάρχει μια μοναδική λύση που ικανοποιεί την εξίσωση «εντροπίας»

$$\frac{u(x+a, t) - u(x, t)}{a} \leq \frac{E}{t}$$

για κάποιο  $E > 0$  και για κάθε  $a \neq 0$ . Άρα για σταθερό  $t$ , η  $u(x, t)$  μπορεί να πραγματοποιήσει μόνο «άλμα προς τα κάτω» καθώς αυξάνεται το  $x$ . Στο παράδειγμά μας, αυτό ισχύει μόνο για τη λύση με  $\alpha = 1$ .)

17. (Η λύση της εξίσωσης (15) εξαρτάται από την εκάστοτε χρησιμοποιούμενη μορφή απόκλισης.) Η εξίσωση  $u_t + uu_x = 0$  μπορεί να γραφτεί με τις εξής δύο μορφές απόκλισης:

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0. \quad (\text{i})$$

$$\left(\frac{1}{2}u^2\right)_t + \left(\frac{1}{3}u^3\right)_x = 0. \quad (\text{ii})$$

Δείξτε ότι μια ασθενής λύση της εξίσωσης (i) δεν είναι κατ' ανάγκη ασθενής λύση της εξίσωσης (ii). [ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Οι εξισώσεις έχουν διαφορετικές συνθήκες άλματος: Στην εξίσωση (i) έχουμε  $s = \frac{1}{2}(u_2 + u_1)$ , ενώ στην εξίσωση (ii) έχουμε  $s = \frac{2}{3}(u_2^2 + u_1u_1 + u_1^2)/(u_2 + u_1)$ .]

18. (Μη αμεταβλητότητα ασθενών λύσεων ως προς μη γραμμικούς μετασχηματισμούς.) Θεωρήστε την εξίσωση (15) όπου  $f'' > 0$ .

(α) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός  $v = f'(u)$  μετατρέπει αυτή την εξίσωση στην

$$v_t + vv_x = 0. \quad (18)$$

(β) Δείξτε ότι ο παραπάνω μετασχηματισμός δεν απεικονίζει κατ' ανάγκη ασυνεχείς λύσεις της εξίσωσης (15) σε ασυνεχείς λύσεις της εξίσωσης (18). (ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Ελέγξτε τις συνθήκες άλματος. Για την εξίσωση (18), από την  $s[v] = \frac{1}{2}[v^2]$  έπεται ότι  $s[f'(u)] = \frac{1}{2}[f'(u)^2]$ , ενώ για την εξίσωση (15),  $s[u] = [f(u)]$ .)

19. Απαιτούνται γνώσεις μιγαδικών αριθμών. Δείξτε ότι ο τύπος του Poisson στις δύο διαστάσεις μπορεί να γραφτεί ως

$$u(r', \theta') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \frac{r^2 - |z'|^2}{|re^{i\theta} - z'|^2} d\theta,$$

όπου  $z' = r'e^{i\theta'}$ .

# Επιλεγμένες απαντήσεις και λύσεις για το επιπλέον περιεχόμενο

## 2.7 Μερικά τεχνικά θεωρήματα παραγωγίσισης

1.  $Df(x, y, z) = \begin{bmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & -\sin y & 0 \\ 0 & 0 & \cos z \end{bmatrix}.$

Ο  $Df$  είναι διαγώνιος πίνακας αν κάθε συνιστώσα συνάρτηση  $f_i$  εξαρτάται μόνο από το  $x_i$ .

3. (α) Θεωρούμε ότι  $A = B = C = \mathbb{R}$  με  $f(x) = 0$  και  $g(x) = 0$  αν  $x \neq 0$  και  $g(0) = 1$ , οπότε  $w = 0$  και  $g(f(x)) = 1$  για κάθε  $x$ .

(β) Αν  $\epsilon > 0$ , έστω  $\delta_1$  και  $\delta_2$  αρκετά μικρά ώστε να έχουμε  $D_{\delta_1}(\mathbf{y}_0) \subset B$  και  $\|g(\mathbf{y}) - \mathbf{w}\| < \epsilon$  για  $\mathbf{y} \in B$  και  $0 < \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| < \delta_2$ . Αφού  $g(\mathbf{y}_0) = \mathbf{w}$ , ο περιορισμός  $\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|$  μπορεί να παραλειφθεί. Έστω  $\delta$  αρκετά μικρό ώστε να έχουμε  $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| < \min(\delta_1, \delta_2)$  για  $\mathbf{x} \in A$  και  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ . Για τέτοια  $\mathbf{x}$  έχουμε  $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| < \delta_1$ , οπότε  $f(\mathbf{x}) \in B$  και η  $g(f(\mathbf{x}))$  ορίζεται. Επιπλέον,  $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| < \delta_2$ , οπότε  $\|g(f(\mathbf{x})) - \mathbf{w}\| < \epsilon$ .

5. Θεωρούμε ότι  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  και κρατάμε σταθερό έναν δείκτη  $k$ , οπότε

$$f(\mathbf{x}) = a_{kk}x_k^2 + \sum_{i=1 \neq k}^n a_{ki}x_kx_i + \sum_{j=1 \neq k}^n a_{kj}x_kx_j + [\text{όροι που δεν περιέχουν το } x_k]$$

και συνεπώς

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = 2a_{kk}x_k + \sum_{i \neq k} a_{ki}x_i + \sum_{i \neq k} a_{ki}x_i = 2 \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = (2\mathbf{A}\mathbf{x})_k.$$

Αφού οι  $k$ -οστές συνιστώσες είναι ίσες για κάθε  $k$ ,  $\nabla f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}\mathbf{x}$ .

7. Ο πίνακας  $\mathbf{T}$  των μερικών παραγώγων σχηματίζεται αν τοποθετήσουμε τα  $\mathbf{D}g(x_0)$  και  $\mathbf{D}h(y_0)$  το ένα δίπλα στο άλλο σε έναν πίνακα έτσι ώστε να έχουμε  $\mathbf{T}(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) = \mathbf{D}g(x_0)(x - x_0) + \mathbf{D}h(y_0)(y - y_0)$ . Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την τριγωνική ανισότητα και το γεγονός ότι το  $\|(x - x_0, y - y_0)\|$  είναι μεγαλύτερο από τα  $|x - x_0|$  και  $|y - y_0|$  για να δείξουμε ότι η ποσότητα  $\|f(x, y) - f(x_0, y_0) - \mathbf{T}(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)\|/\|(x - x_0, y - y_0)\|$  πηγαίνει στο 0.
9. Χρησιμοποιήστε τα θεωρήματα για τα όρια και το γεγονός ότι η συνάρτηση  $g(x) = \sqrt{|x|}$  είναι συνεχής. (Αποδείξτε το.)
11. Για τη συνέχεια στο  $(0, 0)$ , χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι

$$\left| \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \right| \leq \frac{|xy|}{(x^2)^{1/2}} = |y|$$

ή ότι  $|xy| \leq (x^2 + y^2)/2$ .

13. 0, βλ. Άσκηση 11.
15. Στον ορισμό, βάλτε το  $\mathbf{x}$  στον ρόλο του  $\mathbf{x}_0$  και το  $\mathbf{x} + \mathbf{h}$  στον ρόλο του  $\mathbf{x}$ .
17. Το διάνυσμα  $\mathbf{a}$  παίρνει τη θέση του  $\mathbf{x}_0$  στον ορισμό του ορίου ή στο Θεώρημα 6. Και στις δύο περιπτώσεις το όριο εξαρτάται μόνο από τις τιμές της  $f(\mathbf{x})$  για  $\mathbf{x}$  κοντά στο  $\mathbf{x}_0$ , όχι για  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ . Επομένως η  $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$  για  $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$  είναι σίγουρα αρκετή για να είναι ίσα τα όρια.
19. (α)  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} (f_1 + f_2)(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\| = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} f_1(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\| + \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}} f_2(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\| = 0$ .  
 (β) Έστω  $\epsilon > 0$ . Αφού η  $f$  είναι  $o(\mathbf{x})$ , υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε  $\|f(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\|\| < \epsilon/c$  για  $0 < \|\mathbf{x}\| < \delta$ . Έχουμε  $\|(gf)(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\|\| \leq \|g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\|\| < \epsilon$ , άρα  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} (gf)(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\| = 0$ .  
 (γ)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/|x| = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ , οπότε η  $f(x)$  είναι  $o(x)$ . Όμως το  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)/|x|$  δεν υπάρχει, αφού  $g(x)/|x| = \pm 1$  (καθώς το  $x$  είναι θετικό ή αρνητικό). Άρα η  $g(x)$  δεν είναι  $o(x)$ .

## Λύσεις επιλεγμένων ασκήσεων της Ενότητας 2.7

1. Έχουμε  $f(x, y, z) = (e^x, \cos y, \sin z) = (f_1, f_2, f_3)$ , οπότε

$$\mathbf{D}f(x, y, z) = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x & \partial f_1/\partial y & \partial f_1/\partial z \\ \partial f_2/\partial x & \partial f_2/\partial y & \partial f_2/\partial z \\ \partial f_3/\partial x & \partial f_3/\partial y & \partial f_3/\partial z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & -\sin y & 0 \\ 0 & 0 & \cos z \end{bmatrix}.$$



Ο  $\mathbf{D}f$  είναι διαγώνιος πίνακας όταν η  $f_1$  εξαρτάται μόνο από την πρώτη μεταβλητή, η  $f_2$  μόνο από τη δεύτερη, κ.ο.κ. Επομένως ο  $\mathbf{D}f$  είναι διαγώνιος αν η  $f_n$  είναι συνάρτηση μόνο της  $n$ -οστής μεταβλητής.

4. Μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση δεν είναι μόνο συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, αλλά το πιο σημαντικό, για δεδομένο  $\varepsilon > 0$ , μπορούμε να βρούμε ένα  $\delta$  για όλα τα  $\mathbf{x}_0$ . Αυτό διαφέρει από τη συνέχεια διότι στην περίπτωση της συνέχειας μπορεί να βρούμε ένα  $\delta$  το οποίο να λειτουργεί μόνο για ένα συγκεκριμένο  $\mathbf{x}_0$ . Μια συνεχής συνάρτηση δεν είναι απαραίτητα ομοιόμορφα συνεχής (παραδείγματα: η  $f(x) = 1/x^2$  στο  $\mathbb{R}^2$  και η  $g(x) = 1/x$  στο  $(0, 1]$ .)

(α) Αν ο  $\mathbf{T}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  είναι γραμμικός, τότε  $\|\mathbf{T}\mathbf{x}\| \leq M\|\mathbf{x}\|$ . Για δοθέν  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , έχουμε  $\|\mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| \leq M\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  από την Άσκηση 2(α). Αφού ο  $\mathbf{T}$  είναι γραμμικός,  $\|\mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{T}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}(\mathbf{y})\|$ . Έστω  $\delta = \varepsilon/M$ , οπότε για  $0 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \delta$ , έχουμε  $\|\mathbf{T}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}(\mathbf{y})\| \leq M\delta = \varepsilon$ . Προσέξτε ότι αυτή η απόδειξη είναι σωστή διότι τα  $\delta$  και  $\varepsilon$  δεν εξαρτώνται από την επιλογή κάποιου συγκεκριμένου σημείου του  $\mathbb{R}^n$ .

(β) Δεδομένου  $\varepsilon > 0$ , θέλουμε ένα  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε για  $0 < |x - x_0| < \delta$  να έχουμε  $|1/x^2 - 1/x_0^2| < \varepsilon$  για  $x$  και  $x_0$  στο  $(0, 1]$ . Κάνουμε πράξεις:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2} \right| &= \frac{|x_0^2 - x^2|}{x^2 x_0^2} = \frac{|x - x_0||x + x_0|}{x^2 x_0^2} \\ &= |x - x_0| \cdot \left| \frac{1}{x x_0^2} + \frac{1}{x_0 x^2} \right| < |x - x_0| \frac{2}{x^3} < \varepsilon \end{aligned}$$

(αν το  $x_0$  είναι το μικρότερο από τα  $x$  και  $x_0$ ), δηλαδή

$$\left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2} \right| \leq |x - x_0| \frac{2}{\{\min(x, x_0)\}^3}.$$

Προσέξτε ότι  $\min(x, x_0) > 0$ . Έστω  $\delta < (\varepsilon/2)\{\min(x, x_0)\}^3$ , οπότε για  $|x - x_0| < \delta$  έχουμε

$$\left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2} \right| < \delta \cdot \frac{2}{x^3} < \frac{\varepsilon}{2} x_0^3 \cdot \frac{2}{x_0^3} = \varepsilon.$$

Έχουμε δείξει μόνο ότι η  $f(x) = 1/x^2$  είναι συνεχής. Δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής αφού

$$\left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2} \right| = \frac{|x_0^2 - x^2|}{x^2 x_0^2} = \frac{|x - x_0||x + x_0|}{x^2 x_0^2},$$

οπότε για σταθερό  $\varepsilon$ , οποιοδήποτε  $\delta$  και αν επιλέξουμε, αυτή η ποσότητα τείνει στο  $\infty$  καθώς το  $x_0$  πηγαίνει στο 0.

7. Έχουμε  $f(x, y) = g(x) + h(y)$ . Αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε είναι ότι οι παρακάτω πίνακες ικανοποιούν την

$$\mathbf{D}f(x, y) = (\mathbf{D}g(x), \mathbf{D}h(y)).$$

Αφού οι  $g$  και  $h$  είναι παραγωγίσιμες στα  $x_0$  και  $y_0$ , αντίστοιχα, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|g(x) - g(x_0) - \mathbf{D}g(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0$$

και

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{|h(y) - h(y_0) - \mathbf{D}h(y - y_0)|}{|y - y_0|} = 0.$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την τριγωνική ανισότητα:

$$\begin{aligned} & |g(x) - g(x_0) + h(y) - h(y_0) - (\mathbf{D}g(x - x_0) + \mathbf{D}h(y - y_0))| \\ & \leq |g(x) - g(x_0) - \mathbf{D}g(x - x_0)| + |h(y) - h(y_0) - \mathbf{D}h(y - y_0)|. \end{aligned}$$

Αφού  $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \geq \|x - x_0\|$  και  $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \geq \|y - y_0\|$ , το άθροισμα των δύο ορίων είναι μεγαλύτερο από

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{|g(x) + h(y) - (g(x_0) + h(y_0)) - (\mathbf{D}g(x - x_0) + \mathbf{D}h(y - y_0))|}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|}.$$

Άρα το όριο πηγαίνει στο μηδέν, που σημαίνει ότι ο ορισμός της παραγωγισιμότητας για την  $f$  στο  $(x_0, y_0)$  ικανοποιείται.

11. Δεδομένου  $\varepsilon$ , παρατηρούμε ότι

$$\left| \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{1/2}} - 0 \right| \leq \left| \frac{xy}{x} \right| = |y|,$$

και γνωρίζουμε ότι  $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ . Έστω  $\delta = \varepsilon$ , οπότε για  $\|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$  έχουμε

$$\left| \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{1/2}} - 0 \right| < |y| < \varepsilon.$$

Επομένως  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$  και η  $f$  είναι συνεχής.

16. (α) Αν  $\mathbf{y}$  είναι ένα συνοριακό σημείο του ανοιχτού συνόλου  $A \subset \mathbb{R}^n$ , τότε κάθε ανοιχτή μπάλα με κέντρο το  $\mathbf{y}$  περιέχει σημεία του  $A$  και σημεία που δεν ανήκουν στο  $A$ . Άρα η τομή του  $A$  και της μπάλας  $D_\varepsilon(\mathbf{y})$  δεν είναι κενή. Συνεπώς,
- (i) το  $\mathbf{y}$  δεν ανήκει στο  $A$  αφού τα σημεία του  $A$  έχουν γειτονιές που περιέχονται στο  $A$ , και
  - (ii) το  $\mathbf{y}$  είναι το όριο μιας ακολουθίας από το  $A$ : επιλέγουμε  $\varepsilon = 1/n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , οπότε  $D_{(1/n)}(\mathbf{y}) \cap A \neq \emptyset$  για  $n = 1, 2, 3, \dots$

Επιλέγουμε ως  $\mathbf{x}_n$  ένα στοιχείο του  $D_{(1/n)}(\mathbf{y}) \cap A$ , οπότε το  $\mathbf{x}_n$  ανήκει στο  $A$  και  $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_n\| \leq 1/n$ , το οποίο τείνει στο μηδέν καθώς το  $n$  τείνει στο άπειρο. Υποθέτουμε ότι το  $\mathbf{y}$  δεν ανήκει στο  $A$ , αλλά υπάρχει μια ακολουθία  $\{\mathbf{x}_n\}$  στο  $A$  που συγκλίνει στο  $\mathbf{y}$ . Έστω  $\varepsilon > 0$ . Το  $\mathbf{y}$  είναι η τομή του  $D_\varepsilon(\mathbf{y})$  και του συνόλου όλων των σημείων που δεν ανήκουν στο  $A$ , άρα το δεξί μέλος δεν είναι κενό. Από την άλλη πλευρά, υπάρχει  $N$  τέτοιο ώστε για  $n \geq N$  να έχουμε  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}\| < \varepsilon$ , δηλαδή για  $n \geq N$  να έχουμε ότι το  $\mathbf{x}_n$  ανήκει στο  $D_\varepsilon(\mathbf{y})$ . Το  $\mathbf{x}_N$  ανήκει στο  $A$ , άρα το  $\mathbf{x}_N$  ανήκει στο  $D_\varepsilon(\mathbf{y}) \cap A$ . Επομένως το  $\mathbf{y}$  είναι συνοριακό σημείο του  $A$ .

- (β) Υποθέτουμε ότι  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}} f(\mathbf{x}) = b$ , δηλαδή για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε αν το  $\mathbf{x}$  ανήκει στο  $A$ , για  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$  να έχουμε  $\|f(\mathbf{x}) - b\| < \varepsilon$ . Έστω  $\{\mathbf{x}_n\}$  μια ακολουθία στο  $A$  που συγκλίνει στο  $\mathbf{y}$ . Κρατάμε σταθερό το  $\varepsilon > 0$ . Επιλέγουμε  $\delta > 0$  όπως παραπάνω. Επιλέγουμε το  $N$  έτσι ώστε για  $n \geq N$  να έχουμε  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}\| < \delta$ , οπότε για  $n \geq N$  έχουμε  $\|f(\mathbf{x}_n) - b\| < \varepsilon$ , άρα η ακολουθία  $\{f(\mathbf{x}_n)\}$  συγκλίνει στο  $b$ . (Το  $\mathbf{y}$  χρειάζεται να ανήκει στο σύνορο του  $A$  ώστε να διασφαλίσουμε την ύπαρξη της ακολουθίας  $\{\mathbf{x}_n\}$ .) Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι δεν ισχύει ότι  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}} f(\mathbf{x}) = b$ . Τότε υπάρχει  $\varepsilon > 0$  τέτοιο ώστε για κάθε  $\delta > 0$  να υπάρχει  $\mathbf{x}$  στο  $A$  με  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$ , αλλά  $\|f(\mathbf{x}) - b\| > \varepsilon$ . Επιλέγουμε  $\mathbf{x}_n$  στο  $A$  τέτοιο ώστε  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}\| < 1/n$ , αλλά  $\|f(\mathbf{x}_n) - b\| > \varepsilon$  για  $n = 1, 2, 3, \dots$  (που αντιστοιχεί σε  $\delta = 1/n$ ). Τότε το  $\mathbf{x}_n$  συγκλίνει στο  $\mathbf{y}$  (όπως στο ερώτημα (α)), αλλά η  $f(\mathbf{x})$  δεν συγκλίνει στο  $b$ . (Σημείωση: Αποδείξαμε το «αντιθετοαντίστροφο» του θεωρήματος. Παίρνουμε την *άρνηση* της υπόθεσης (προσέξτε τις αλλαγές στα «υπάρχει», «για κάθε» και στα σύμβολα ανισότητας) και αποδεικνύουμε την *άρνηση* του αποτελέσματος στο οποίο θέλουμε να καταλήξουμε. Η διαφορά μεταξύ αυτής της μεθόδου και της εις άτοπο απαγωγής είναι ότι δεν παίρνουμε την *άρνηση* της υπόθεσης.)
- (γ) Έστω  $U$  ανοιχτό στο  $\mathbb{R}^m$  με  $x$  στο  $U$ . Η απόδειξη προκύπτει από το ερώτημα (β). Συγκεκριμένα,

$$\lim_{x_n \rightarrow x} f(\mathbf{x}_n) = f(\mathbf{x}) \text{ σημαίνει ότι } f(\mathbf{x}_n) \rightarrow f(\mathbf{x})$$

για οποιαδήποτε ακολουθία  $\{\mathbf{x}_n\}$  που συγκλίνει στο  $\mathbf{x}$  στο  $U$ . Σύμφωνα με το ερώτημα (β), η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbf{x}$ .

### 3.4A Κριτήριο δεύτερης παραγώγου: Ακρότατα υπό συνθήκη

1. Είναι το γνωστό κριτήριο δεύτερης παραγώγου του λογισμού των συναρτήσεων μίας μεταβλητής.

### 4.1A Σημεία ισορροπίας στη μηχανική

1.  $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ .

3. Το  $(2, 1)$  είναι σημείο ασταθούς ισορροπίας.
5. Σημείο σταθερής ισορροπίας:  $(2 + m^2 g^2)^{-1/2}(-1, -1, -mg)$ .

**Λύση της Άσκησης 3.** Σύμφωνα με το Θεώρημα 14, τα κρίσιμα σημεία του δυναμικού  $V$  είναι τα σημεία ισορροπίας. Τα σημεία αυτά είναι τα σημεία μηδενισμού της κλίσης. Συγκεκριμένα,

$$\nabla V(x, y) = (2x + 4y - 8)\mathbf{i} + (4x - 2y - 6)\mathbf{j} = \mathbf{0}$$

μόνο αν  $2x + 4y - 8 = 0$  και  $4x - 2y - 6 = 0$ . Απλοποιώντας, παίρνουμε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned}x + 2y &= 4 \\ 2x - y &= 3\end{aligned}$$

του οποίου η λύση είναι  $x = 2, y = 1$ . Το κρίσιμο αυτό σημείο  $(2, 1)$  θα είναι σταθερό αν είναι αυστηρό τοπικό ελάχιστο του  $V$ . Χρησιμοποιώντας το δεύτερο κριτήριο (Θεώρημα 6), έχουμε

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(2, 1) = 2, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(2, 1) = -2, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(2, 1) = 4.$$

Άρα για την ορίζουσα έχουμε

$$D = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) - \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right)^2 = -20 < 0.$$

Επομένως το κριτήριο δεύτερης παραγώγου μάς λέει ότι το σημείο είναι σαγματικό σημείο, αλλά δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το σημείο είναι ευσταθές. (Στην πραγματικότητα είναι ασταθές, αλλά δεν έχουμε εξηγήσει αναλυτικά γιατί, οπότε είναι προτιμότερο να πούμε απλά ότι το κριτήριο ευστάθειας αποτυγχάνει.)  $\diamond$

## 4.1B Περιστροφές και ο τύπος της ηλιοφάνειας

1. (α)  $\mathbf{m}_0 = (1/\sqrt{6})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ ,  
 $\mathbf{n}_0 = (1/2\sqrt{3})(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$
- (β)  $\mathbf{r} = [\cos(\pi t/12)/2\sqrt{2} + \sin(\pi t/12)/4]\mathbf{i} + [-1/2\sqrt{2} + \cos(\pi t/12)/2\sqrt{2} + \sin(\pi t/12)/4]\mathbf{j} + [-1/2\sqrt{2} + \cos(\pi t/12)/\sqrt{2} - \sin(\pi t/12)/4]\mathbf{k}$
- (γ)  $(x, y, z) = (-1/2\sqrt{2})(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + (-\pi/48)(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})(t - 12)$
3. Το  $T_d$  θα ήταν μεγαλύτερο.
5. Ο «ακριβής» τύπος είναι  $-\tan l \sin \alpha = \cos(2\pi t/T_d)[\tan(2\pi t/T_y) \tan(2\pi t/T_d) - \cos \alpha]$ .
7.  $A = 9,4^\circ$ .
9. Ο ισημερινός θα δεχόταν περίπου εξαπλάσια ηλιακή ενέργεια από ό,τι το Παρίσι.

#### 4.4 Ροές και η γεωμετρία της απόκλισης

1. Αν  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\phi(\mathbf{x}, t) = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  και  $f = f(x_1, x_2, x_3, t)$ , εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(\phi(\mathbf{x}, t), t)) &= \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi(\mathbf{x}, t), t) \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + [\nabla f(\phi(\mathbf{x}, t), t)] \cdot [\mathbf{F}(\phi(\mathbf{x}, t))]. \end{aligned}$$

3. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του γινομένου, έχουμε

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{w}}{dt}.$$

Σε αυτό αντικαταστήστε την εξίσωση (2). Για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήστε την ταυτότητα  $A^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot A\mathbf{w}$ .

5. Λόγω της επιλογής των αξόνων,

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{F})(\mathbf{0}) = \omega \mathbf{k}.$$

Σύμφωνα με το βιβλίο,

$$\mathbf{v} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}$$

και συνεπώς

$$\mathbf{D}\mathbf{v}(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Από την άλλη πλευρά, σύμφωνα με τους ορισμούς των  $W$  και  $\nabla \times \mathbf{F}$ ,

$$\begin{aligned} W &= \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -(\nabla \times \mathbf{F})_z & (\nabla \times \mathbf{F})_y \\ (\nabla \times \mathbf{F})_z & 0 & -(\nabla \times \mathbf{F})_x \\ -(\nabla \times \mathbf{F})_y & (\nabla \times \mathbf{F})_x & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Λόγω της επιλογής των αξόνων συντεταγμένων, έχουμε

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Για να ερμηνεύσουμε το αποτέλεσμα παρατηρούμε ότι το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{v}$  αντιπροσωπεύει την περιστροφή γύρω από έναν σταθερό άξονα  $\mathbf{w}$ . Η ροή  $\psi(\mathbf{x}, t)$  του  $\mathbf{v}$  περιστρέφει σημεία αυτού του πεδίου και, για σταθερό  $t$ , η παράγωγός της  $\mathbf{D}_x\psi(\mathbf{x}, t)$  περιστρέφει και διανύσματα. Θεωρούμε τυχόν διάνυσμα  $\mathbf{Y}$  και θέτουμε  $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{D}_x\psi(\mathbf{x}, t)\mathbf{Y}$ . Καθώς το  $t$  αυξάνεται ή μειώνεται, το  $\mathbf{Y}(t)$  περιστρέφεται γύρω από το  $\mathbf{w}$  και

$$\left. \frac{d\mathbf{Y}}{dt} \right|_{t=0} = \mathbf{D}_x\mathbf{v}(\mathbf{0})\mathbf{Y}.$$

Αυτό μας δίνει τον ρυθμό μεταβολής του  $\mathbf{Y}$  καθώς μεταφέρεται (περιστρέφεται) από την  $\mathbf{D}_x\psi$ . Σύμφωνα με την Άσκηση 3, ο ρυθμός μεταβολής ενός διανύσματος  $\mathbf{x}$  στην αρχή των αξόνων που μεταφέρεται από την παράγωγο της ροής  $\phi(\mathbf{x}, t)$  του  $\mathbf{F}$  δίνεται από τη σχέση

$$\left. \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|_{t=0} = \mathbf{D}_x\mathbf{F}(\mathbf{0})\mathbf{x} = (S + W)\mathbf{x}.$$

Άρα αυτός ο ρυθμός μεταβολής του  $\mathbf{x}$  έχει δύο συνιστώσες: τον πίνακα παραμόρφωσης, ο οποίος επηρεάζει τα εσωτερικά γινόμενα, και τον πίνακα  $W$ . Άρα ο πίνακας  $W$  είναι ακριβώς ο ρυθμός μεταβολής των διανυσμάτων καθώς υφίστανται απειροστή περιστροφή γύρω από τον άξονα  $(\text{curl } \mathbf{F})(\mathbf{0}) = (\nabla \times \mathbf{F})(\mathbf{0})$  μέσω της απεικόνισης  $\mathbf{D}_x\psi(\mathbf{x}, t)$ .

[Ο πίνακας παραμόρφωσης  $S$  εμπεριέχει όλες τις μεταβολές μήκους και γωνίας που προκαλεί η ροή. Ειδικότερα, ο  $S$  περιλαμβάνει τις μεταβολές όγκου. Μάλιστα, το ίχνος του  $S$  είναι η απόκλιση:  $\text{tr } S = \text{div } \mathbf{F}(\mathbf{x})$ . (Το ίχνος ενός πίνακα είναι το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου του.) Το τμήμα του  $S$  χωρίς το ίχνος, δηλαδή το

$$S' = S - \frac{1}{3}(\text{tr } S)\mathbf{I}$$

όπου  $\mathbf{I}$  είναι ο  $3 \times 3$  μοναδιαίος πίνακας, καλείται *διάτμηση*.]

7. Η ευθεία  $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{v}$  μεταφέρεται στην καμπύλη  $\lambda \mapsto \phi(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{v}, t)$  ύστερα από χρονικό διάστημα  $t$ , το οποίο για μικρό  $\lambda$  προσεγγίζεται από την εφαπτόμενή της ευθεία, συγκεκριμένα,  $\lambda \mapsto \phi(\mathbf{x}, t) + \mathbf{D}_x\phi(\mathbf{x}, t) \cdot \lambda\mathbf{v}$ .

## 5.6 Μερικά τεχνικά θεωρήματα ολοκλήρωσης

1. Αν  $a \neq b$ , θέτουμε  $\epsilon = |a - b|/2$ .
3. Θετούμε  $e = 2d - c$ , ώστε να έχουμε  $d = (c + e)/2$ . Θεωρούμε τον κάθετο «διπλασιασμό» του  $R$  που ορίζεται από την  $Q = R \cup R_1$ , όπου  $R_1 = [a, b] \times [d, e]$ . Αν επεκτείνουμε την  $f$  στο  $Q$  θεωρώντας ότι η  $f$  είναι 0 στο πρόσθετο τμήμα, τότε η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη επί του  $Q$  λόγω προσθετικότητας. Η  $n$ -οστή κανονική διαμέριση του  $[(a+b)/2, b] \times [c, d]$  είναι μέρος της  $2n$ -οστής κανονικής διαμέρισης του  $Q$ . Για μεγάλο  $n$ , τα αθροίσματα Riemann αυτής της  $2n$ -οστής διαμέρισης δεν μπορούν να μεταβληθούν περισσότερο από  $\epsilon$  καθώς αλλάζουμε

τα σημεία των υπο-ορθογωνίων, ειδικότερα αν αλλάξουμε μόνο τα σημεία του  $[(a+b)/2, b] \times [c, d]$ . Αυτές οι αλλαγές αντιστοιχούν στις πιθανές αλλαγές των αθροισμάτων Riemann για τη  $n$ -οστή διαμέριση του  $[(a+b)/2, b] \times [c, d]$ . Ο συλλογισμός για το ερώτημα (β) είναι παρόμοιος.

5. Έστω  $R = [a, b] \times [c, d]$  και  $B = [e, f] \times [g, h]$ . Αφού τα ορθογώνια μιας διαμέρισης του  $R$  τέμνονται μόνο κατά μήκος των ακμών τους, μπορούμε να προσθέσουμε τα εμβαδά τους, και  $b_n$  είναι το εμβαδόν της ένωσης όλων των υπο-ορθογωνίων της  $n$ -οστής κανονικής διαμέρισης του  $R$  που τέμνουν το  $B$ . Αφού το  $B$  περιέχεται στην ένωση,  $\text{εμβαδόν}(B) \leq b_n$ . Από την άλλη πλευρά, αν  $(x, y)$  είναι η ένωση, τότε

$$e - (b-a)/n \leq x \leq f + (b-a)/n$$

και

$$g - (d-c)/n \leq y \leq h + (d-c)/n.$$

Αυτό οδηγεί στην

$$b_n \leq \text{εμβαδόν}(B) + 2[(b-a)/(h-g) + (d-c)/(f-e)]/n + 4(a-b)(d-c)/n^2.$$

Αφήνοντας το  $n \rightarrow \infty$  και συνδυάζοντας τις ανισότητες αποδεικνύουμε το ζητούμενο.

7. (α) Η στρατηγική είναι να κινηθούμε από σημείο σε σημείο εντός του  $[a, b]$  με μικρά βήματα, προσθέτοντας τις αλλαγές στην πορεία. Δεδομένου  $\epsilon > 0$ , η  $\phi$  είναι ομοιόμορφα συνεχής και συνεπώς υπάρχει  $\delta > 0$  για το οποίο  $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \epsilon$  όποτε  $|x - y| < \delta$ . Θεωρούμε ότι  $x \in [a, b]$  και εισάγουμε τα ενδιάμεσα σημεία  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = x$  με  $x_{i+1} - x_i < \delta$ . Αυτό μπορεί να γίνει με το πολύ  $[(b-a)/\delta] + 1$  τμήματα. Σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα,

$$|\phi(x) - \phi(a)| \leq \sum_{i=1}^n |\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})| \leq \left(\frac{b-a}{\delta} + 1\right) \epsilon.$$

Συνεπώς,  $|\phi(x)| \leq |\phi(a)| + [(b-a)/(\delta+1)]\epsilon$  για κάθε  $x \in [a, b]$ .

- (β) Χρησιμοποιήστε παρόμοιο συλλογισμό με αυτόν που ακολουθήσαμε στο ερώτημα (α), κινούμενοι με μικρά βήματα εντός του ορθογωνίου  $[a, b] \times [c, d]$ .
- (γ) Αυτό είναι δυσκολότερο, αφού το  $D$  μπορεί να αποτελείται από πολλά ασύνδετα τμήματα με αποτέλεσμα τα μικρά βήματα να μην μπορούν να πραγματοποιηθούν εντός του  $D$ . Παρόλα αυτά, δεδομένου  $\epsilon$ , υπάρχει  $\delta$  τέτοιο ώστε  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq \epsilon$  όταν τα  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{y}$  ανήκουν στο  $D$  και  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$ , λόγω της αρχής της ομοιόμορφης φραγής. Αφού το  $D$  είναι φραγμένο, μπορούμε να βρούμε έναν μεγάλο «κύβο»  $R$  με πλευρές μήκους  $L$  τέτοιον ώστε  $D \subset R$ . Διαμερίζουμε τον  $R$  σε υπο-κύβους διαιρώντας κάθε ακμή

σε  $m$  τμήματα. Η διαγώνιος κάθε υπο-κύβου έχει μήκος  $\sqrt{nL}/m$ . Αν πάρουμε  $m > \sqrt{nL}/\delta$ , οποιαδήποτε δύο σημεία του ίδιου υπο-κύβου απέχουν λιγότερο από  $\delta$ , και υπάρχουν  $m^n$  υποκύβοι. Αν  $R_1, \dots, R_n$  είναι αυτοί που τέμνουν το  $D$ , επιλέγουμε  $\mathbf{x}_i \in D \cap R_i$ . Για κάθε  $\mathbf{x} \in D$ , έχουμε  $|f(\mathbf{x})| < \epsilon + \max(|f(\mathbf{x}_1)|, \dots, |f(\mathbf{x}_n)|)$ .

## Λύση της Άσκησης 2(α)

**Άσκηση 2(α).** Έστω  $f$  η συνάρτηση επί του ημιανοιχτού διαστήματος  $(0, 1]$  που ορίζεται από την  $f(x) = 1/x$ . Δείξτε ότι η  $f$  είναι συνεχής σε κάθε σημείο του  $(0, 1]$  αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής.

**Λύση.** Έστω  $x_0 \in (0, 1]$ . Δεδομένου  $\epsilon > 0$ , πρέπει να βρούμε  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε για

$$0 < |x - x_0| < \delta, \quad x \in (0, 1], \quad \text{να έχουμε} \quad \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \epsilon.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \frac{x - x_0}{xx_0}.$$

Αν  $|x - x_0| < x_0/2$ , τότε  $x > x_0/2 > 0$  και

$$\frac{|x - x_0|}{|xx_0|} < \frac{2|x - x_0|}{x_0^2}.$$

Αν το  $|x - x_0|$  είναι μικρότερο και από  $\epsilon \cdot x_0^2/2$ , τότε  $2|x - x_0|/x_0^2 < \epsilon$ . Έτσι, επιλέγοντας  $\delta < \min(x_0/2, (\epsilon/2) \cdot x_0^2)$ , έχουμε

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \epsilon.$$

Άρα η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ . Για να δείξουμε ότι η  $f$  δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, υποθέτουμε ότι είναι και προσπαθούμε να καταλήξουμε σε άτοπο. Έστω  $\epsilon = 1/2$ . Αν η  $f$  ήταν ομοιόμορφα συνεχής θα υπήρχε  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε

$$\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| < \frac{1}{2}$$

για  $|x_2 - x_1| < \delta$ . Έστω  $N > 2\delta$ . Τότε, για οποιουσδήποτε ακέραιους  $n, m > N$ ,

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| < \frac{1}{N} + \frac{1}{N} < \frac{2}{N} < \delta.$$

Θέτουμε  $x_1 = 1/n$  και  $x_2 = 1/(n+1)$ , οπότε

$$\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = \frac{1}{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Όμως το 1 δεν είναι μικρότερο από  $1/2$ , άρα καταλήξαμε σε άτοπο.  $\diamond$



## 8.5 Συναρτήσεις του Green

1. Γράφουμε τις συνιστώσες της  $\varphi$  ως  $\xi(\mathbf{x}, t)$ ,  $\eta(\mathbf{x}, t)$  και  $\zeta(\mathbf{x}, t)$ . Αρχικά παρατηρούμε ότι εξ ορισμού της  $\varphi$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\varphi(\mathbf{x}, t), t).$$

Μπορούμε να παραγωγίσουμε την ορίζουσα  $J$  αν θυμηθούμε ότι η ορίζουσα ενός πίνακα είναι πολυγραμμική ως προς τις στήλες (ή γραμμές). Επομένως, αν κρατήσουμε το  $\mathbf{x}$  σταθερό,

$$\frac{\partial}{\partial t} J = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια γράφουμε

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} F_1(\varphi(\mathbf{x}, t), t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} F_2(\varphi(\mathbf{x}, t), t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} F_3(\varphi(\mathbf{x}, t), t),$$

Οι συνιστώσες  $F_1$ ,  $F_2$  και  $F_3$  του  $\mathbf{F}$  σε αυτή την έκφραση είναι συναρτήσεις των  $x$ ,  $y$  και  $z$  μέσω της  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ , επομένως

$$\frac{\partial}{\partial x} F_1(\varphi(\mathbf{x}, t), t) = \frac{\partial F_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

⋮

$$\frac{\partial}{\partial z} F_3(\varphi(\mathbf{x}, t), t) = \frac{\partial F_3}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial F_3}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial F_3}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην έκφραση που δίνει την  $\partial J / \partial t$ , παίρνουμε για τους αντίστοιχους όρους

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} J + \frac{\partial F_2}{\partial y} J + \frac{\partial F_3}{\partial z} J = (\operatorname{div} \mathbf{F}) J.$$

3. ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ: Από την εξίσωση μεταφοράς του Θεωρήματος 12, με το  $\mathbf{V}$  στη θέση του  $\mathbf{F}$ , έχουμε

$$\frac{d}{dt} \iiint_{W_t} \rho \, dx \, dy \, dz = \iiint_{W_t} \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} \right) dx \, dy \, dz.$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = \operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

όπου  $\mathbf{J} = \rho \mathbf{V}$ , όπως στο βιβλίο.

5. Αν  $v_i$  είναι η  $i$ -οστή συνιστώσα ενός διανύσματος  $\mathbf{v}$ , τότε από την εξίσωση μεταφοράς (Άσκηση 2) έχουμε

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{d}{dt} \iiint_{W_t} f \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz \right]_i \\ &= \frac{d}{dt} \iiint_{W_t} (f \mathbf{F})_i \, dx \, dy \, dz = \frac{d}{dt} \iiint_{W_t} f \mathbf{F}_i \, dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_{W_t} \left[ \frac{D(f \mathbf{F}_i)}{Dt} + (f \mathbf{F}_i) \operatorname{div} \mathbf{F} \right] \, dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_{W_t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (f \mathbf{F}_i) + \mathbf{D}_x (f \mathbf{F}_i) \cdot \mathbf{F} + (f \mathbf{F}_i) \operatorname{div} \mathbf{F} \right] \, dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_{W_t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (f \mathbf{F}_i) + \nabla (f \mathbf{F}_i) \cdot \mathbf{F} + (f \mathbf{F}_i) \operatorname{div} \mathbf{F} \right] \, dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_{W_t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (f \mathbf{F}_i) + [\mathbf{D}(f \mathbf{F}) \mathbf{F}]_i + [(f \mathbf{F}) \operatorname{div} \mathbf{F}]_i \right\} \, dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_{W_t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (f \mathbf{F}) + \mathbf{D}(f \mathbf{F}) \mathbf{F} + (f \mathbf{F}) \operatorname{div} \mathbf{F} \right]_i \, dx \, dy \, dz \\ &= \left[ \iiint_{W_t} \frac{\partial}{\partial t} (f \mathbf{F}) + \mathbf{D}(f \mathbf{F}) \mathbf{F} + (f \mathbf{F}) \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz \right]_i \\ &= \left[ \iiint_{W_t} \left( \frac{\partial}{\partial t} (f \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla)(f \mathbf{F}) + (f \mathbf{F}) \operatorname{div} \mathbf{F} \right) \, dx \, dy \, dz \right]_i. \end{aligned}$$

7. (α) Επειδή  $\mathbf{V} = \nabla \phi$ ,  $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$ , και άρα  $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \frac{1}{2} \nabla (\|\mathbf{V}\|^2)$ , η εξίσωση του Euler γίνεται

$$-\frac{\nabla p}{\rho} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{1}{2} \nabla (\|\mathbf{V}\|^2) = \nabla \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{2} \|\mathbf{V}\|^2 \right).$$

Αν  $\mathbf{c}$  είναι μια διαδρομή από το  $P_1$  στο  $P_2$ , τότε

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbf{c}} \frac{1}{\rho} dp &= - \int_{\mathbf{c}} \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot \mathbf{c}'(t) \, dt = \int_{\mathbf{c}} \nabla \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{2} \|\mathbf{V}\|^2 \right) \cdot \mathbf{c}'(t) \, dt \\ &= \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{2} \|\mathbf{V}\|^2 \right) \Big|_{P_1}^{P_2} \end{aligned}$$

(β) Αν  $d\mathbf{V}/dt = \mathbf{0}$  και το  $\rho$  είναι σταθερό, τότε  $\frac{1}{2}\nabla(\|\mathbf{V}\|^2) = -(\nabla p)/\rho = -\nabla(p/\rho)$ , και συνεπώς  $\nabla(\frac{1}{2}\|\mathbf{V}\|^2 + p/\rho) = \mathbf{0}$ .

9. Σύμφωνα με τον νόμο του Ampère,  $\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \nabla \cdot (\partial\mathbf{E}/\partial t) = -\nabla \cdot (\partial\mathbf{E}/\partial t) = -(\partial/\partial t)(\nabla \cdot \mathbf{E})$ . Σύμφωνα με τον νόμο του Gauss αυτό ισούται με  $-\partial\rho/\partial t$ . Συνεπώς,  $\nabla\mathbf{J} + \partial\rho/\partial t = 0$ .

10. (α) Αν  $\mathbf{x} \in S$ , τότε  $r''a/R = r$ , άρα  $G = 0$ . Εν γένει,  $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  και  $r'' = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}'\|$ , και συνεπώς

$$G = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{R}{a} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}'\|} - \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) \quad \text{και}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} G = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{R}{a} \frac{\mathbf{y}' - \mathbf{x}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}'\|^3} - \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \right)$$

και  $\nabla_{\mathbf{x}}^2 G = 0$  όταν  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ , ακριβώς όπως στην ανάλυση της εξίσωσης (15) ( $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ , αφού το  $\mathbf{x}$  βρίσκεται στο εσωτερικό και το  $\mathbf{y}$  στο εξωτερικό της σφαίρας). Από το Θεώρημα 10 έχουμε  $\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (R/a)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}')$ , αλλά ο δεύτερος όρος είναι πάντα 0, αφού το  $\mathbf{x}$  δεν ταυτίζεται ποτέ με το  $\mathbf{y}'$ . Συνεπώς,  $\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  για  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{y}$  στη σφαίρα.

(β) Αν το  $\mathbf{x}$  βρίσκεται στην επιφάνεια της  $S$ , τότε το  $\mathbf{n} = \mathbf{x}/R$  είναι το κάθετο διάνυσμα με κατεύθυνση προς τα έξω και

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{R}{a} \nabla \left( \frac{1}{r''} \right) \cdot \mathbf{n} - \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{n} \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{R}{a} \frac{\mathbf{y}' - \mathbf{x}}{\|\mathbf{y}' - \mathbf{x}\|^3} - \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \right) \cdot \mathbf{n}.$$

Αν  $\gamma$  είναι η γωνία που σχηματίζουν τα  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{y}$ , τότε  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = r^2 = R^2 + a^2 - 2aR \cos \gamma$  και  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}'\|^2 = r''^2 = R^2 + b^2 - 2bR \cos \gamma = (R^2/a^2)r^2$ . Επομένως

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{4\pi r^3} \left[ \frac{R}{a} \frac{\mathbf{y}' - \mathbf{x}}{(R/a)^3} - (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right] \cdot \mathbf{n}.$$

Όμως  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = R$  και  $\mathbf{n} = \mathbf{x}/R$ , οπότε αυτό γίνεται

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{4\pi^3} \left( \frac{a^2}{R^3} \mathbf{y}' \cdot \mathbf{x} - \frac{a^2}{R} - \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}}{R} + R \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi^3 R} \left( \frac{a^2}{R^2} \|\mathbf{y}'\| R \cos \gamma - \|\mathbf{y}\| R \cos \gamma + R^2 - a^2 \right)$$

$$= \frac{R^2 - a^2}{4\pi R} \frac{1}{r^3} \quad \text{αφού} \quad \|\mathbf{y}'\| = R^2/a.$$

Ολοκληρώνοντας επί της επιφάνειας της σφαίρας,

$$\begin{aligned} u(\mathbf{y}) &= \iint_S f \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} dS \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ f(\theta, \phi) \frac{R^2 - a^2}{4\pi R} \frac{1}{r^3} R^2 \sin \phi \right] d\phi d\theta \\ &= \frac{R(R^2 - a^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{f(\theta, \phi) \sin \phi d\phi d\theta}{(R^2 + a^2 - 2aR \cos \gamma)^{3/2}}. \end{aligned}$$

11. (α) Σύμφωνα με τις εξισώσεις (12) αυτής της ενότητας, πρέπει να δείξουμε ότι

$$\tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tilde{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (1)$$

και

$$\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (2)$$

Ορίζουμε  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$  και  $\mathbf{r}' = R(\mathbf{x}) - \mathbf{y}$ . Για να αποδείξουμε την (1), γράφουμε

$$\tilde{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - G(\mathbf{y}, R(\mathbf{x})) = -\frac{1}{4}\pi \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \frac{1}{4}\pi \|\mathbf{y} - R(\mathbf{x})\|.$$

Είναι προφανές ότι  $\|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}'\|$ , συνεπώς  $\tilde{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Για να αποδείξουμε την (2), γνωρίζουμε ότι  $\nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{r}/4\pi r^3$ . Επομένως  $\nabla G(R(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = \mathbf{r}'/4\pi(r')^3$ , οπότε  $\nabla^2 \tilde{G} = \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \delta(R(\mathbf{x}), \mathbf{y})$  και

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 \tilde{G} d\mathbf{y} = \iiint_{\mathbb{R}^3} [\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \delta(R(\mathbf{x}), \mathbf{y})] d\mathbf{y}.$$

Αν  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , τότε  $R(\mathbf{x}) \neq \mathbf{y}$  και το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 \tilde{G} d\mathbf{y} = \iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1.$$

Αν  $R(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ , τότε  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ . Κάνουμε αλλαγή μεταβλητών: Θέτουμε  $u = x$ ,  $v = y$ ,  $w = -z$ , οπότε  $d\mathbf{y} = dx dy dz = -du dv dw$ . Το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 \tilde{G} d\mathbf{y} &= - \iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(R(\mathbf{x}), \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= - \iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(R(\mathbf{x}), \mathbf{u})(-d\mathbf{u}) \\ &= \iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(R(\mathbf{x}), \mathbf{u}) d\mathbf{u} = 1, \end{aligned}$$

όπου  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ .

- (β) Απλά βάζουμε τη συνάρτηση του Green που υπολογίσαμε μέσα σε ένα ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \iiint_{\mathbb{R}^3} \tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \iiint_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) - G(R(\mathbf{x}), \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

12. (α) Χρησιμοποιούμε τον κανόνα της αλυσίδας:  $u_t + u_{xx} = u_t \dot{t} + u_x \dot{x} = \dot{u} = 0$ .  
 (β) Χρησιμοποιούμε τις σχέσεις  $dt/ds = 1$  και  $dx/ds = u$ . Η κλίση ισούται με

$$\frac{t(s)}{x(s)} = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{u}.$$

Από το ερώτημα (α) γνωρίζουμε ότι η  $u$  είναι μια σταθερά, οπότε το  $1/u$  είναι επίσης σταθερά. Έπεται ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι ευθείες.

- (γ) Δύο χαρακτηριστικές καμπύλες που διέρχονται από τα  $(x_1, 0)$  και  $(x_2, 0)$  έχουν εξισώσεις

$$t = [1/u_0(x_1)](x - x_1) \text{ και } t = [1/u_0(x_2)](x - x_2),$$

αντίστοιχα. Η τομή είναι

$$[1/u_0(x_1)](x - x_1) = [1/u_0(x_2)](x - x_2).$$

Απλοποιώντας, παίρνουμε

$$x(1/u_0(x_1) - 1/u_0(x_2)) = x_1/u_0(x_1) - x_2/u_0(x_2).$$

Λύνουμε ως προς  $x$ :

$$x = \frac{\frac{x_1}{u_0(x_1)} - \frac{x_2}{u_0(x_2)}}{\frac{1}{u_0(x_1)} - \frac{1}{u_0(x_2)}} = \frac{x_1 u_0(x_2) - x_2 u_0(x_1)}{u_0(x_2) - u_0(x_1)} > 0.$$

- (δ) Αντικαθιστούμε:

$$\bar{t} = \frac{1}{u_0(x_1)} \left( \frac{x_1 u_0(x_2) - x_2 u_0(x_1)}{u_0(x_2) - u_0(x_1)} - x_1 \right) = -\frac{x_2 + x_1}{u_0(x_2) - u_0(x_1)}$$

13. (α)  $\dot{u} = (d/ds)[u(x(s), t(s))] = u_x \dot{x} + u_t \dot{t} = u_x f'(u) + u_t = 0$ .  
 (β) Αν η χαρακτηριστική καμπύλη είναι  $u(x, t) = c$  (σύμφωνα με το ερώτημα (α)), ορίζουμε το  $t$  πεπλεγμένα ως συνάρτηση του  $x$ , οπότε  $u_x + u_t(dt/dx) = 0$ . Όμως  $u_t + f'(u)u_x = 0$ , δηλαδή  $u_t + f'(u)u_x = 0$ . Από αυτές τις δύο εξισώσεις μαζί προκύπτει ότι  $dt/dx = 1/f'(u) = 1/f'(c)$ . Άρα η καμπύλη είναι μια ευθεία με κλίση  $1/f'(c)$ .

- (γ) Αν  $x_1 < x_2$ ,  $u_0(x_1) > u_0(x_2) > 0$  και  $f'(u_0(x_2)) > 0$ , τότε  $f'(u_0(x_1)) > f'(u_0(x_2)) > 0$ , αφού  $f'' > 0$ . Η χαρακτηριστική καμπύλη που διέρχεται από το  $(x_1, 0)$  έχει κλίση  $1/f'(u_0(x_1))$ , η οποία είναι μικρότερη από  $1/f'(u_0(x_2))$  (την κλίση της χαρακτηριστικής καμπύλης που διέρχεται από το  $(x_2, 0)$ ). Επομένως οι ευθείες αυτές πρέπει να τέμνονται σε ένα σημείο  $P = (\bar{x}, \bar{t})$  με  $\bar{t} > 0$  και  $\bar{x} > x_2$ . Η λύση πρέπει να είναι ασυνεχής στο  $P$ , αφού οι δύο αυτές τεμνόμενες καμπύλες θα της έδιναν διαφορετική τιμή σε αυτό το σημείο.
- (δ)  $\bar{t} = (x_2 - x_1)/[f'(u_0(x_1)) - f'(u_0(x_2))]$ .
15. (α) Αφού το «ορθογώνιο»  $D$  δεν αγγίζει τον άξονα  $x$  και  $\phi = 0$  στο  $\partial D$  και στο εξωτερικό του  $D$ , η εξίσωση (25) γίνεται

$$\iint [u\phi_t + f(u)\phi_x] dx dt = 0. \quad (i)$$

Αφού  $(u\phi)_t + [f(u)\phi]_x = [u_t + f(u)_x]\phi + [u\phi_t + f(u)\phi_x]$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \iint_{D_i} [u\phi_t + f(u)\phi_x] dx dt &= \iint_{D_i} [(u\phi)_t + (f(u)\phi)_x] dx dt \\ &\quad - \iint_{D_i} [u_t + f(u)_x]\phi dx dt. \end{aligned}$$

Όμως η  $u$  είναι  $C^1$  στο εσωτερικό του  $D_i$ , οπότε η Άσκηση 4(β) λέει ότι  $u_t + f(u)_x = 0$  εκεί. Συνεπώς

$$\iint_{D_i} [u\phi_t + f(u)\phi_x] dx dt = \iint_{D_i} [(u\phi)_t + (f(u)\phi)_x] dx dt. \quad (ii)$$

(β) Σύμφωνα με το θεώρημα του Green

$$\iint_{D_i} [(f(u)\phi)_x - (-u\phi)_t] dx dt = \int_{\partial D_i} [(-u\phi) dx + f(u)\phi dt],$$

οπότε η έκφραση (ii) γίνεται

$$\iint_{D_i} [u\phi_t + f(u)\phi_x] dx dt = \int_{\partial D_i} \phi[-u dx + f(u) dt].$$

Προσθέτοντας τα παραπάνω για  $i = 1, 2$  και χρησιμοποιώντας τη σχέση (i), παίρνουμε

$$0 = \int_{\partial D_1} \phi[-u dx + f(u) dt] + \int_{\partial D_2} \phi[-u dx + f(u) dt].$$

Η ένωση αυτών των δύο συνόρων διασχίζει το  $\partial D$  μία φορά και το τμήμα της  $\Gamma$  που βρίσκεται εντός του  $D$  προς τις δύο κατευθύνσεις, μια φορά με τις τιμές  $u_1$  και μία φορά με τις τιμές  $u_2$ . Αφού  $\phi = 0$  στο εξωτερικό του  $D$  και πάνω στο  $\partial D_2$ , αυτό γίνεται  $0 = \int_{\Gamma} \phi\{-u\} dx + [f(u)] dt$ .

- (γ) Αφού  $\phi = 0$  στο εξωτερικό του  $D$ , το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ίδιο με αυτό του δεύτερου συμπεράσματος του ερωτήματος (β). Το δεύτερο ολοκλήρωμα προκύπτει με παραμετρικοποίηση του τμήματος της  $\Gamma$  μέσω της  $\alpha(t) = (x(t), t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ .
- (δ) Αν  $[-u]ds + [f(u)] = c > 0$  στο  $P$ , τότε μπορούμε να επιλέξουμε έναν μικρό δίσκο  $B_\epsilon$  με κέντρο το  $P$  που να περιέχεται στο  $D$  (που περιγράφεται παραπάνω) έτσι ώστε να έχουμε  $[-u](dx/dt) + [f(u)] > c/2$  στο τμήμα της  $\Gamma$  που βρίσκεται στο εσωτερικό του  $B_\epsilon$ . Στη συνέχεια παίρνουμε έναν ελαφρώς μικρότερο δίσκο  $B_\gamma \subset B_\epsilon$  με κέντρο το  $P$  και επιλέγουμε την  $\phi$  έτσι ώστε να έχουμε  $\phi \equiv 1$  στον  $B_\gamma$ . Έχουμε  $0 \leq \phi \leq 1$  στον δακτύλιο  $B_\epsilon \setminus B_\gamma$  και  $\phi \equiv 0$  στο εξωτερικό του  $B_\epsilon$ . Αν  $\alpha(t_0) = P$ , τότε υπάρχουν  $t_3$  και  $t_4$  με  $t_1 < t_3 < t_0 < t_4 < t_2$  και  $\alpha(t) \in B_\gamma$  για  $t_3 < t < t_4$ . Όμως

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi \left( [-u] \frac{dx}{dt} + [f(u)] \right) dt > \frac{c}{2}(t_4 - t_3) > 0,$$

το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το ερώτημα (γ). Αντίστοιχος είναι ο συλλογισμός (με αντίθετα πρόσημα) αν  $c < 0$ .

17. Θέτοντας  $P = g(u)\phi$  και  $Q = -f(u)\phi$ , εφαρμόζοντας το θεώρημα του Green στο ορθογώνιο  $R$  και χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση  $\phi$  όπως στην Άσκηση 4, μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν η  $u$  είναι λύση της  $g(u)_t + f(u)_x = 0$ , τότε

$$\iint_{t \geq 0} [g(u)\phi_t + f(u)\phi_x] dx dt + \int_{t=0} g(u_0(x))\phi(x, 0) dx = 0.$$

Αυτό είναι το κατάλληλο ανάλογο της εξίσωσης (25) που ορίζει τις ασθενείς λύσεις της  $g(u)_t + f(u)_x = 0$ . Άρα θέλουμε μια  $u$  τέτοια ώστε η

$$\iint_{t \geq 0} \left( u\phi_t + \frac{1}{2}u^2\phi_x \right) dx dt + \int_{t=0} u_0(x)\phi(x, 0) dx = 0 \quad (\text{i: ασθενής})$$

να ισχύει για όλες τις αποδεκτές  $\phi$  αλλά τέτοια ώστε η

$$\iint_{t \geq 0} \left( \frac{1}{2}u^2\phi_t + \frac{1}{3}u^3\phi_x \right) dx dt + \int_{t=0} \frac{1}{2}u_0^2(x)\phi(x, 0) dx = 0 \quad (\text{ii: ασθενής})$$

να μην ισχύει για κάποια αποδεκτή  $\phi$ . Με τη μέθοδο της Άσκησης 11 προκύπτει η συνθήκη άλματος  $s[g(u)] = [f(u)]$ . Για το (α), αυτή είναι  $s(u_2 - u_1) = (\frac{1}{2}u_2^2 - \frac{1}{2}u_1^2)$  ή

$$s = \frac{1}{2}(u_2 + u_1) \quad (\text{i: άλμα})$$

Για το (β), είναι  $s(\frac{1}{2}u_2^2 - \frac{1}{2}u_1^2) = (\frac{1}{3}u_2^3 - \frac{1}{3}u_1^3)$  ή

$$s = \frac{2}{3} \frac{u_2^2 + u_1u_2 + u_1^2}{u_2 + u_1}. \quad (\text{ii: άλμα})$$

Αν ως  $u_0(x)$  πάρουμε μια συνάρτηση (Heaviside) που ορίζεται μέσω της  $u_0(x) = 0$  για  $x < 0$  και  $u_0(x) = 1$  για  $x > 0$ , καταλήγουμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση  $u(x, t) = 0$  όταν  $t > 2x$  και  $u(x, t) = 1$  όταν  $t \leq 2x$ . Άρα  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 0$ , και η καμπύλη ασυνέχειας  $\Gamma$  δίνεται από την  $t = 2x$ . Άρα η συνθήκη άλματος (i: άλμα) (δηλαδή η  $dx/dt = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ ) ικανοποιείται.

Για οποιαδήποτε συγκεκριμένη  $\phi$ , υπάρχουν αριθμοί  $T$  και  $a$  τέτοιοι ώστε  $\phi(x, t) = 0$  για  $x \geq a$  και  $t \leq T$ . Θεωρώντας ότι  $\Omega$  είναι το χωρίο  $0 \leq x \leq a$  και  $0 \leq t \leq T$ , η συνθήκη (i: ασθενής) γίνεται

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\Omega} \left( \phi_t + \frac{1}{2} \phi_x \right) dx dt + \int_0^a \phi(x, 0) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \left( -\phi dx + \frac{\phi}{2} dt \right) + \int_0^a \phi(x, 0) dx \\ &= - \int_0^a \phi(x, 0) dx - \int_0^{T/2} \left[ -\phi(x, 2x)(-dx) + \frac{1}{2} \phi(x, 2x)(-2 dx) \right] \\ &\quad + \int_0^a \phi(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Άρα η (i: ασθενής) ικανοποιείται για κάθε  $\phi$  και η  $u$  είναι ασθενής λύση της εξίσωσης (i). Ωστόσο, η (ii: ασθενής) δεν μπορεί να ικανοποιείται για κάθε  $\phi$ , αφού η συνθήκη άλματος (ii: άλμα) δεν ισχύει. Πράγματι, αν πολλαπλασιάσουμε την (ii: ασθενής) με το 2 και αντικαταστήσουμε την  $u$ , η (ii: ασθενής) γίνεται

$$0 = \iint_{\Omega} \left( \phi_t + \frac{2}{3} \phi_x \right) dx dt + \int_0^a \phi(x, 0) dx.$$

Ο συντελεστής  $\frac{1}{2}$  άλλαξε σε  $\frac{2}{3}$ , και το παραπάνω γίνεται

$$0 = -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \phi(x, 2x) dx,$$

το οποία σίγουρα δεν ικανοποιείται για κάθε αποδεκτή  $\phi$ .

19. Για παράδειγμα, γράφουμε  $|re^{i\theta} - z'|^2 = |re^{i\theta} - r'e^{i\theta'}|^2 = |re^{i(\theta-\theta')} - r'|^2$ , χρησιμοποιούμε τις  $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ ,  $|z|^2 = z\bar{z}$  και πολλαπλασιάζουμε.

**Τέλος**