

Απειροστικός Λογισμός IV - Εαρινό 2023

Διδάσκων: Γ. Ψαραδάκης, Γραφείο Π8

EMAIL: gpsaradakis@uowm.gr

Πρόγραμμα: Τρίτη 09:00-11:00 στη Β2 και Τετάρτη 11:00-14:00 στη Β5

Σύγγραμμα: J. Marsden, A. Tromba - Διανυσματικός Λογισμός, Π.Ε.Κ. 2004

Ύλη: Κεφάλαια 5, 6, 7 και 8

Διάρκεια μαθημάτων: 11 εβδομάδες (06 Μαρτίου - 07 Απριλίου και 24 Απριλίου - 02 Ιουνίου)

Ημερολόγιο Μαθήματος

ΤΡΙΤΗ 07/03

§5.1. Διπλό ολοκλήρωμα μη αρνητικής συνεχούς συνάρτησης ορισμένης σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, ως όγκος στερεού που βρίσκεται κάτω από το γράφημα της. Αρχή του Cavalieri και εφαρμογή αυτής στον παραπάνω ορισμό διπλού ολοκληρώματος - Θεώρημα Fubini. Ασκήσεις.

ΤΕΤΑΡΤΗ 08/03

§5.2. Διπλό ολοκλήρωμα φραγμένης συνάρτησης ορισμένης σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ως όριο αθροισμάτων Riemann. Συμβατότητα με τον ορισμό του διπλού ολοκληρώματος από το προηγούμενο μάθημα. Οι συνεχείς συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες (χωρίς απόδειξη). Οι συναρτήσεις που το σύνολο σημείων ασυνέχειας τους αποτελείται από πεπερασμένη ένωση γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων, είναι ολοκληρώσιμες. Απόδειξη του Θ. Fubini και αναδιατύπωση του για φραγμένες συναρτήσεις που το σύνολο σημείων ασυνέχειας τους αποτελείται από πεπερασμένη ένωση γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων. Ασκήσεις.

ΤΡΙΤΗ 14/03

§5.3 Διπλό ολοκλήρωμα σε πιο γενικά χωρία: διπλό ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης ορισμένης σε χωρία τύπου 1, τύπου 2 και τύπου 3.

§5.4 Αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης. Ασκήσεις.

ΤΕΤΑΡΤΗ 15/03

Θεώρημα μέσης τιμής για διπλά ολοκληρώματα και πρόχειρες εκτιμήσεις διπλών ολοκληρωμάτων. Ασκήσεις στην εναλλαγή σειράς ολοκλήρωσης διπλών ολοκληρωμάτων σε χωρία τύπου 3.

ΤΡΙΤΗ 21/03

§6.1. Τριπλό ολοκλήρωμα φραγμένης συνάρτησης ορισμένης σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, ως όριο άθροισμάτων Riemann. Οι συνεχείς συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες (χωρίς απόδειξη).

Τριπλό ολοκλήρωμα σε πιο γενικά χωρία: τριπλό ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης ορισμένης σε χωρία τύπου I, τύπου II και τύπου III.

Ασκήσεις.

ΤΕΤΑΡΤΗ 22/03

§6.2-§6.3. Παρουσίαση του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών για διπλά και τριπλά ολοκληρώματα, σε αντιπαραβολή με αυτό που γνωρίζουμε για συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Ένα προς ένα και επί, C^1 -ομαλές απεικονίσεις από τον \mathbb{R}^2 στον \mathbb{R}^2 - Παραδείγματα. Πολικές συντεταγμένες και γραμμικοί μετασχηματισμοί. Εφαρμογές: Δείξαμε ότι $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx := \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, έπειτα από κατάλληλη εκτίμηση του $(\int_{-a}^a e^{-x^2} dx)^2$. Υπολογίσαμε το $\int_R (x^2 - y^2)^2$, όπου R είναι το τρίγωνο που περικλείεται από τις ευθείες $y = 0$, $x = 1$ και $y = x$, με διαδοχική ολοκλήρωση και επίσης με την αλλαγή μεταβλητών $u = x + y$, $v = x - y$.

ΤΡΙΤΗ 28/03

§6.3-§6.4. Μετασχηματισμός σε σφαιρικές συντεταγμένες. Αιτιολόγηση των εξισώσεων και υπολογισμός της ορίζουσας του Ιακωβιανού πίνακα. Υπολογισμός τριπλών ολοκληρωμάτων με αλλαγή των μεταβλητών σε σφαιρικές συντεταγμένες. Παραδείγματα. Εφαρμογές των τριπλών ολοκληρωμάτων: ορίσαμε μάζα, κέντρο μάζας και ροπή αδράνειας γύρω από έναν άξονα για χωρία του \mathbb{R}^3 με δωσμένη συνάρτηση πυκνότητας μάζας $\rho = \rho(x, y, z)$. Υπολογίσαμε τον όγκο του στερεού που περικλείει η επιφάνεια του *Steinmetz* (προκύπτει από την κάθετη τομή δύο ίδιων κυλίνδρων). Δεν ολοκληρώσαμε τον υπολογισμό του όγκου του χωρίου που περιλαμβάνει μια σφαίρα με ακτίνα a κι ένας κύλινδρος ακτίνας $a/2$ ο οποίος εφάπτεται εσωτερικά της σφαίρας (η καμπύλη που περιγράφει το σύνορο της επιφάνειας αυτής λέγεται *καμπύλη του Viviani*).

ΤΕΤΑΡΤΗ 29/03

Ολοκληρώσαμε τον υπολογισμό του όγκου του χωρίου που περικλείουν μια σφαίρα με ακτίνα a κι ένας κύλινδρος ακτίνας $a/2$ ο οποίος εφάπτεται εσωτερικά της σφαίρας. Υπολογίσαμε τον όγκο που περικλείει ένα σφαιρικό καπάκι. Υπολογίσαμε τον όγκο που περικλείει ένας κυκλικός κώνος. Υπολογίσαμε τον όγκο ανάμεσα σε έναν κυκλικό κώνο και ένα ταιριαστό σφαιρικό καπάκι, αθροίζοντας τους όγκους που περικλείουν το σφαιρικό καπάκι και ο κυκλικός κώνος. Επαληθεύσαμε το αποτέλεσμα υπολογίζοντας τον όγκο με τη χρήση σφαιρικών συντεταγμένων. Υπολογίσαμε τον όγκο ανάμεσα σε έναν παραβολοειδές εκ περιστροφής (κυκλικό παραβολοειδές) και ένα ταιριαστό σφαιρικό καπάκι, αθροίζοντας τον όγκο του σφαιρικού καπακιού με αυτόν του κυκλικού παραβολοειδούς.

ΤΡΙΤΗ 04/04

§3.2-§3.2. Στοιχειώδης θεωρία καμπυλών. Καμπύλες στον \mathbb{R}^3 , συνεχείς/παραγωγίσιμες/ C^1 καμπύλες, διάνυσμα ταχύτητας της καμπύλης, ταχύτητα καμπύλης, μήκος καμπύλης και αιτιολόγηση του τύπου με τη γλώσσα του απειροστικού λογισμού. Παραδείγματα.

§7.1: Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα βαθμωτής συνάρτησης.

Μήκος γραφήματος πραγματικής συνάρτησης. Παραδείγματα.

ΤΕΤΑΡΤΗ 05/04

§7.2: Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης (β' είδους) και σύνδεση με το επικαμπύλιο α' είδους.

Μεταβολές του επικαμπύλιου ολοκληρώματος β' είδους ύστερα από αναπαραμετρικοποιήσεις που διατηρούν/αντιστρέφουν τον προσανατολισμό της καμπύλης. Η περίπτωση που η διανυσματική συνάρτηση προέρχεται από το gradient μιας βαθμωτής συνάρτησης. Παραδείγματα.

ΚΑΛΟ ΠΑΣΧΑ

ΤΡΙΤΗ 25/04

§7.3 Παραμετρικοποιημένες επιφάνειες στον \mathbb{R}^3 , παραγωγίσιμες/ C^1 /λείες επιφάνειες. Εφαπτόμενο επίπεδο επιφάνειας. Παραδείγματα.

ΤΕΤΑΡΤΗ 26/04

Λύσαμε τις ασκήσεις του πρώτου φυλλαδίου.

ΤΡΙΤΗ 02/05

Ανάλυση του τυπολογίου της παραγράφου 3. §7.4 Εμβαδό επιφάνειας. Παραδείγματα.

ΤΕΤΑΡΤΗ 03/05 (ΔΙΩΡΟ ΑΝΤΙ ΤΡΙΩΡΟ ΛΟΓΩ ΟΜΙΛΙΑΣ)

§7.5 Επιφανειακό ολοκλήρωμα βαθμωτής συνάρτησης.

Παραδείγματα.

ΤΡΙΤΗ 09/05

Λύσαμε τις ασκήσεις του δεύτερου φυλλαδίου.

ΤΕΤΑΡΤΗ 10/05

Δεν έγινε μάθημα (φοιτητικές εκλογές).

ΤΡΙΤΗ 16/05

Προσανατολισμένες επιφάνειες.

§7.6 Επιφανειακό ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης (β' είδους) και σύνδεση με το επιφανειακό α' είδους.

Το Θεώρημα Gauss στο χώρο, στο επίπεδο και στην ευθεία.

ΤΕΤΑΡΤΗ 17/05

§8.3 Το Θεώρημα Gauss στο χώρο, στο επίπεδο και στην ευθεία (ξανά). Απόδειξη του θ. Gauss στο χώρο. Παραδείγματα.

ΤΡΙΤΗ 23/05

§8.1 Το Θεώρημα Green και η απόδειξή του. Απόδειξη του θ. Gauss στο επίπεδο (προκύπτει από το θ. Green με κατάλληλη επίλογή του διανυσματικού πεδίου). Παραδείγματα.

ΤΕΤΑΡΤΗ 24/05 (ΜΙΑ ΩΡΑ ΑΝΤΙ ΤΡΕΙΣ, ΛΟΓΩ ΟΜΙΛΙΩΝ ΣΤΟ ΤΜΗΜΑ)

§8.2 Το Θεώρημα του Stokes. Παραδείγματα.

ΤΡΙΤΗ 30/05

Λύσαμε ασκήσεις, μαζί κι αυτές του τρίτου φυλλαδίου.

ΤΕΤΑΡΤΗ 31/05

Ασκήσεις στα θεωρήματα Gauss και Stokes (παρόμοιες με αυτές του τέταρτου φυλλαδίου).

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ ΣΤΗΝ ΕΞΕΤΑΣΗ