Απειροστικός Λογισμός IV - Εαρινό 2023

Λύσεις Τέταρτου Σετ Ασκήσεων

Άσκηση 1

Επαληθεύστε το Θ. Gauss για την μοναδιαία μπάλα με κέντρο το $(0,0,0)$ και την $\vec{F}(x,y,z) = (-y,x,z)$.

Λύση. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu}_{\partial\Omega} = \int_{\Omega} \mathrm{div}\vec{F}, \tag{1}$$

όπου $\vec{F}(x,y,z) = (-y,x,z)$, $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ και $\vec{\nu}_{\partial\Omega}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια $\partial\Omega$ με φορά προς το εξωτερικό του Ω. Για το τριπλό ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (1), επειδή $\mathrm{div}\vec{F} = 1$, παίρνουμε $\int_\Omega \mathrm{div}\vec{F} =$ όγκος$(\Omega) = \frac{4}{3}\pi$. Για το επιφανειακό ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της (1), επειδή για κάθε $(x,y,z) \in \partial\Omega$ έχουμε $\vec{\nu}_{\partial\Omega}(x,y,z) = (x,y,z)$, παίρνουμε $\int_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{\nu}_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega}(-y,x,z)\cdot(x,y,z) = \int_{\partial\Omega} z^2$. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα αυτό μπορούμε τώρα να το υπολογίσουμε μέσω της συμμετρίας του προβλήματος ως εξής: $x^2+y^2+z^2 = 1 \Rightarrow \int_{\partial\Omega} x^2 + \int_{\partial\Omega} y^2 + \int_{\partial\Omega} z^2 =$ εμβ. επιφάνειας$(\partial\Omega) = 4\pi$. Είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι $\int_{\partial\Omega} x^2 = \int_{\partial\Omega} y^2 = \int_{\partial\Omega} z^2$ (αλλαγή μεταβλητών). Επομένως, $3\int_{\partial\Omega} z^2 = 4\pi$ που μας δίνει αμέσως ότι $\int_{\partial\Omega} z^2 = \frac{4}{3}\pi$. Διαφορετικά, μπορούμε να το υπολογίσουμε με την εξής παραμετρικοποίηση της $\partial\Omega$: $\vec{\Phi}(\vartheta,\varphi) = (\sin\varphi\cos\vartheta, \sin\varphi\sin\vartheta, \cos\varphi)$, $(\vartheta,\varphi) \in [0,2\pi)\times[0,\pi)$. Είναι $\|(\vec{\Phi}_\vartheta \times \vec{\Phi}_\varphi)\| = \sin\varphi$, άρα $\int_{\partial\Omega} z^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos^2\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta = 2\pi \int_\pi^0 \cos^2\varphi \mathrm{d}(\cos\varphi) = 2\pi \frac{\cos^3\varphi}{3}\Big|_\pi^0 = \frac{4}{3}\pi$. □

Άσκηση 2

Χρησιμοποιώντας το Θ. Gauss, υπολογίστε το $\int_S (x^2+y+z)$, όπου S είναι η μοναδιαία σφαίρα με κέντρο το $(0,0,0)$.

Λύση. Από το Θ. Gauss έχουμε την (1) με $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ και $\vec{\nu}_{\partial\Omega}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια $\partial\Omega \equiv S$ με φορά προς το εξωτερικό του Ω. Επειδή για κάθε $(x,y,z) \in \partial\Omega$ έχουμε $\vec{\nu}_{\partial\Omega}(x,y,z) = (x,y,z)$, γράφουμε την υπο ολοκλήρωση συνάρτηση ως εξής: $x^2+y+z = (x,1,1)\cdot(x,y,z) = \vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{\nu}_{\partial\Omega}(x,y,z)$, όπου $\vec{F}(x,y,z) = (x,1,1)$. Με αυτό το $\vec{F}$ είναι $\mathrm{div}\vec{F} = 1$ και η (1) γίνεται

$$\int_S (x^2+y+z) = \text{όγκος}(\Omega),$$

άρα $\int_S (x^2+y+z) = \frac{4}{3}\pi$. □

Άσκηση 3

Επαληθεύστε το Θ. Stokes για την συνάρτηση $\vec{F}(x,y,z) = (y^2, -x^2, z^2)$ στην επιφάνεια που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2 + y^2 \leq 1$ και $x + y + z = 3$.

Λύση. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\int_S \mathrm{curl}\vec{F} = \int_{\partial S} \vec{F}, \tag{2}$$

όπου $\vec{F}(x,y,z) = (y^2, -x^2, z^2)$ και S είναι το κομμάτι του επιπέδου $x + y + z = 3$ που έχει για προβολή στο xy-επίπεδο τον μοναδιαίο κύκλο κέντρου $(0,0)$. Υπολογίζουμε αρχικά το $\mathrm{curl}\vec{F} = -2(x+y)\vec{k}$.

Για το επιφανειακό ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους, παίρνουμε την παραμετρικοποίηση $\vec{\Phi}(x,y) = (x, y, 3 - x - y)$ όπου $(x,y) \in D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ (βλ. §6-"Θεώρημα Stokes για γραφήματα", στο τέλος του *Διάφορα αποσπάσματα σε συνοπτική μορφή* στο eClass). Είναι $\vec{\Phi}_x \times \vec{\Phi}_y = (1,1,1)$, άρα $\int_S \mathrm{curl}\vec{F} = \iint_D \mathrm{curl}\vec{F} \cdot \vec{\Phi}_x \times \vec{\Phi}_y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Υπολογίζουμε στη συνέχεια το διπλό ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες: $\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\rho\cos\vartheta + \rho\sin\vartheta)\rho\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\rho = 0$. Επομένως $\int_S \mathrm{curl}\vec{F} = 0$. Φυσικά, αντί να προχωρήσουμε με δυό βήματα (πρώτα παραμετρικοποίηση και μετά πολικές συντεταγμένες), θα μπορούσαμε από την αρχή να θεωρήσουμε την παραμετρικοποίηση $\vec{\Phi}(\rho,\vartheta) = (\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, 3 - \rho\cos\vartheta - \rho\sin\vartheta)$ όπου $(\rho,\vartheta) \in [0,1] \times [0,2\pi)$. Είναι $\vec{\Phi}_\rho \times \vec{\Phi}_\vartheta = \rho(1,1,1)$, άρα $\int_S \mathrm{curl}\vec{F} = -2\int_0^1\int_0^{2\pi} \mathrm{curl}\vec{F}(\vec{\Phi}) \cdot \vec{\Phi}_\rho \times \vec{\Phi}_\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\rho = -2\int_0^1\int_0^{2\pi} (\rho\cos\vartheta + \rho\sin\vartheta)\rho\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\rho = 0$.

Για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους, παίρνουμε την παραμετρικοποίηση $\vec{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t, 3 - \cos t - \sin t)$ όπου $t \in [0,2\pi)$. Είναι $\vec{\sigma}' = (-\sin t, \cos t, \sin t - \cos t)$, επομένως $\int_{\partial S} \vec{F} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\sigma}) \cdot \vec{\sigma}'\,\mathrm{d}t$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t, -\cos^2 t, (3 - \cos t - \sin t)^2\right) \cdot (-\sin t, \cos t, \sin t - \cos t)\,\mathrm{d}t = ... = 0.$$

Παρατήρηση: Ο υπολογισμός του τελευταίου ολοκληρώματος ότι είναι 0 είναι απλός αλλα μακρύς, επομένως η άσκηση θα μπορούσε να διατυπωθεί ώς εξής σε μια εξέταση: *Χρησιμοποιώντας το Θ. Stokes, υπολογίστε το $\int_{\partial S} \vec{F}$, όπου $\vec{F}(x,y,z) = (y^2, -x^2, z^2)$ και S η επιφάνεια που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2 + y^2 \leq 1$ και $x + y + z = 3$.* □

Άσκηση 4

Επαληθεύστε το Θ. Stokes για την συνάρτηση $\vec{F}(x,y,z) = (-y, x, z)$ στην επιφάνεια που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ και $z \leq 0$.

Λύση. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\int_S \mathrm{curl}\vec{F} = \int_{\partial S} \vec{F}, \tag{3}$$

όπου $\vec{F}(x,y,z) = (-y, x, z)$ και S είναι το "κάτω" κομμάτι της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (σφαιρικό μπωλ). Υπολογίζουμε αρχικά το $\mathrm{curl}\vec{F} = 2\vec{k}$.

Για το επιφανειακό ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους, παίρνουμε την παραμετρικοποίηση $\vec{\Phi}(x,y) = (x, y, -\sqrt{1-x^2-y^2})$ όπου $(x,y) \in D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ (βλ. §6-"Θεώρημα Stokes για γραφήματα", στο τέλος του *Διάφορα αποσπάσματα σε συνοπτική μορφή* στο eClass). Λόγω της μορφής του $\mathrm{curl}\vec{F}$ μπορούμε να γλιτώσουμε από περιττούς υπολογισμούς θέτωντας $f(x,y) = -\sqrt{1-x^2-y^2}$. Με αυτό το συμβολισμό, είναι $\vec{\Phi}(x,y) = (x, y, f(x,y))$, άρα $\vec{\Phi}_x \times \vec{\Phi}_y = (-f_x, -f_y, 1)$, επομένως

$$\int_S \mathrm{curl}\vec{F} = 2\iint_D \vec{k} \cdot \vec{\Phi}_x \times \vec{\Phi}_y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\text{εμβαδό}(D) = 2\pi.$$

Δεν χρειάστηκε λοιπόν να υπολογίσω τις f_x και f_y (οι οποίες παρεμπιπτόντως δεν ορίζονται στο σύνορο του D αλλά όπως εξηγήσαμε στην τάξη αυτό δεν έχει σημασία).

Για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους, παίρνουμε την παραμετρικοποίηση $\vec{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ όπου $t \in [0, 2\pi)$. Είναι $\vec{\sigma}' = (-\sin t, \cos t, 0)$, επομένως

$$\int_{\partial S} \vec{F} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\sigma}) \cdot \vec{\sigma}' \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) \,\mathrm{d}t.$$

Άρα $\int_{\partial S} \vec{F} = 2\pi$. $\square$