

Απειροστικός Λογισμός IV - Εαρινό 2023

Πρώτο Σετ Ασκήσεων¹

Άσκηση 1

(i) Έστω $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ είναι συνεχής. Χρησιμοποιήστε την αρχή του Cavalieri για να δείξετε ότι ο όγκος V του χωρίου που δημιουργείται αν περιστρέψουμε το γράφημα $y = f(x)$, γύρω από τον x -άξονα, δίνεται από τον τύπο

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

(ii) Χρησιμοποιήστε το (i) για να δείξετε ότι ο όγκος της σφαίρας ακτίνας $r > 0$ είναι $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Άσκηση 2

Έστω R ένα τυχαίο κλειστό ορθογώνιο του \mathbb{R}^2 και $f : R \rightarrow [0, \infty)$ είναι συνεχής. Αποδείξτε ότι $\int_R f = 0$ αν και μόνο αν $f \equiv 0$ στο R .

Άσκηση 3

(i) Αν $D = [0, 1] \times [0, 1]$, δείξτε ότι $\frac{1}{2}(1 - \cos 1) \leq \int_D \frac{\sin x}{1+(xy)^4} dx dy \leq 1$.

(ii) Αν $D = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$, δείξτε ότι $4\pi^2 \leq \int_D e^{1+\sin(x+y)} dx dy \leq 4(e\pi)^2$.

Άσκηση 4

Αν D είναι το χωρίο που φράσσεται από το γραφικό της $y = -x^2 + x$, και τις ευθείες $y = 0$, $x = 0$ και $x = 2$, υπολογίστε το $\int_D (x^2 + 2xy^2 + 2) dy dx$.

Άσκηση 5

Να επαληθεύσετε ότι $\int_0^1 \int_x^1 e^{x/y} dy dx = \frac{1}{2}(e - 1)$ και $\int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2} dx dy = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{e})$.

Άσκηση 6

Αν $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq y \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$, υπολογίστε το $\int_D y^3(x^2 + y^2)^{-3/2} dx dy$.

¹Να παραδοθούν το αργότερο μέχρι την Τετάρτη 29/03/23 στο μάθημα.