ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΕΜΠΤΗ 22/06/2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ IV (ΜΥ 41)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΨΑΡΑΔΑΚΗΣ

ΘΕΜΑΤΑ (ΜΕ ΤΙΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΟΥΣ)

ΘΕΜΑ 1

Υπολογίστε:

(i) τον όγκο που περικλείει η μοναδιαία σφαίρα, και

(ii) το εμβαδό επιφάνειας της μοναδιαίας σφαίρας.

Λύση. (i) Αρκεί να υπολογίσουμε το τριπλό ολοκλήρωμα $\int_\Omega 1$, όπου Ω είναι η μοναδιαία μπάλα με κέντρο το $(0,0,0)$, δηλαδη

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 \le 1\}.$$

Με αλλαγή μεταβλητών σε σφαιρικές συντεταγμένες, είναι

$$\begin{aligned}\int_\Omega 1 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho^2 \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\rho = \int_0^{2\pi} 1 \mathrm{d}\vartheta \int_0^1 \rho^2 \, \mathrm{d}\rho \int_0^\pi \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi \Big[\frac{\rho^3}{3}\Big]_{\rho=0}^{\rho=1} \int_\pi^0 1 \mathrm{d}(\cos\varphi) = \frac{2}{3}\pi \Big[\cos\varphi\Big]_\pi^0 = \frac{4}{3}\pi.\end{aligned}$$

(ii) Αρκεί να υπολογίσουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int_{\partial\Omega} 1$, όπου $\partial\Omega$ είναι η μοναδιαία σφαίρα με κέντρο το $(0,0,0)$, δηλαδη

$$\partial\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 = 1\}.$$

1ος τρόπος:
Για τον υπολογισμό του επιφανειακού αυτού ολοκληρώματος χρειαζόμαστε μια παραμετρικοποίηση της $\partial\Omega$. Μια παραμετρικοποίηση είναι η

$$\vec{\Phi}(\vartheta,\varphi) = (\sin\varphi\cos\vartheta, \sin\varphi\sin\vartheta, \cos\varphi), \text{ όπου } (\vartheta,\varphi) \in [0,2\pi) \times [0,\pi).$$

Είναι $\|(\vec{\Phi}_\vartheta \times \vec{\Phi}_\varphi)(\vartheta,\varphi)\| = \sin\varphi$, άρα (σύμφωνα με τον ορισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος α΄ είδους) έχουμε

$$\int_{\partial\Omega} 1 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta = 2\pi \int_\pi^0 1 \mathrm{d}(\cos\varphi) = 2\pi \Big[\cos\varphi\Big]_\pi^0 = 4\pi.$$

2ος τρόπος:

$$\int_{\partial\Omega} 1 = \int_{\partial\Omega} x^2+y^2+z^2 = \int_{\partial\Omega} (x,y,z)\cdot(x,y,z) = \int_{\partial\Omega} (x,y,z)\cdot\vec{\nu},$$

όπου $\vec{\nu} = (x,y,z)$ είναι το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια $\partial\Omega$ με φορά προς το εξωτερικό του Ω. Με εφαρμογή του Θ. Gauss, παίρνουμε

$$\int_{\partial\Omega} 1 = \int_{\Omega} \mathrm{div}(x,y,z) = \int_{\Omega} 3 = 3\frac{4}{3}\pi,$$

λόγω (i). Άρα $\int_{\partial\Omega} 1 = 4\pi$.

3ος τρόπος: Ο όγκος $V(r)$ της μπάλας του $\mathbb{R}^3$ ακτίνας r, δίνεται από τον τύπο $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$[1]. Από τον Απειροστικό Λογισμό ΙΙΙ (ή ΙΙ;, ή Ι;), γνωρίζουμε ότι το εμβαδό της επιφάνειας της μπάλας του $\mathbb{R}^3$ ακτίνας r, δίνεται από την παράγωγο $V'(r)$. Όμως $V'(r) = 4\pi r^2$, επομένως $V'(1) = 4\pi$ είναι το εμβαδό επιφάνειας της μοναδιαίας σφαίρας. □

ΘΕΜΑ 2

Υπολογίστε το $\iint_{B_R(0)} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, όπου $B_R(0)$ είναι ο δίσκος κέντρου 0 και ακτίνας R. Παίρνοντας το όριο: $R\to\infty$, συμπεράνετε ότι $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi$. Δείξτε τώρα ότι $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

Λύση. Με αλλαγή μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες, είναι

$$\iint_{B_R(0)} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^R\int_0^{2\pi} e^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\rho = 2\pi\frac{1}{2}\int_0^R e^{-\rho^2}\,\mathrm{d}(\rho^2) = \pi\Big[e^{-\rho^2}\Big]_{\rho=R}^{\rho=0},$$

επομένως

$$\iint_{B_R(0)} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi - \pi e^{-R^2}. \qquad (1)$$

Για το υπόλοιπο της άσκησης θέτουμε $\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$. Παίρνοντας το όριο: $R\to\infty$ στην ισότητα (1), έχουμε αμέσως ότι

$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi,$

ή αλλιώς, ότι

$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi.$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi \Rightarrow \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\int_{-R}^{R} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \pi.$$

Άρα $\alpha^2 = \pi$, δηλαδή $\alpha = \sqrt{\pi}$. □

[1] Αυτό αν θέλετε μπορείτε να το αποδείξετε ακριβώς όπως στο (i) ερώτημα, δηλ.

$$\int_{\Omega} 1 = \int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\rho = 2\pi\int_0^r \rho^2\,\mathrm{d}\rho\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \ldots = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

ΘΕΜΑ 3

Επαληθεύστε το Θ. Gauss για το τετράγωνο με κορυφές $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ και $(1,0)$, και τη συνάρτηση $\vec{F}(x,y) = (x^4, -y^2 - x^3)$.

Λύση. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu} = \int_{\Omega} \mathrm{div}\vec{F}, \tag{2}$$

όπου $\vec{F}(x,y) = (x^4, -y^2 - x^3)$, $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ και $\vec{\nu}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο στην καμπύλη $\partial\Omega$ με φορά προς το εξωτερικό του Ω.

- Για το διπλό ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (2), επειδή

$$\left[\mathrm{div}\vec{F}\right](x,y) = \frac{\partial(x^4)}{\partial x} + \frac{\partial(-y^2 - x^3)}{\partial y} = 4x^3 - 2y,$$

παίρνουμε

$$\int_{\Omega} \mathrm{div}\vec{F} = \int_0^1 \int_0^1 (4x^3 - 2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[x^4 - 2xy\right]_{x=0}^{x=1} \mathrm{d}y = \int_0^1 (1 - 2y)\,\mathrm{d}y = \ldots = 0.$$ [2]

- Για να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της (2), παρατηρούμε πρώτα ότι

  $\vec{\nu}(x,y) = (0,-1)$ για κάθε (x,y) που ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα $\overline{AB}$ που ενώνει τα $A(0,0)$ και $B(1,0)$,

  $\vec{\nu}(x,y) = (1,0)$ για κάθε (x,y) που ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα $\overline{BC}$ που ενώνει τα $B(1,0)$ και $C(1,1)$,

  $\vec{\nu}(x,y) = (0,1)$ για κάθε (x,y) που ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα $\overline{CD}$ που ενώνει τα $C(1,1)$ και $D(0,1)$, και

  $\vec{\nu}(x,y) = (-1,0)$ για κάθε (x,y) που ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα $\overline{DA}$ που ενώνει τα $D(0,1)$ και $A(0,0)$.

Επομένως,

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu} = \int_{\overline{AB}} (y^2 + x^3) + \int_{\overline{BC}} x^4 + \int_{\overline{CD}} (-y^2 - x^3) + \int_{\overline{DA}} (-x^4). \tag{3}$$

Για να υπολογίσω κάθε ένα απο τα 4 επικαμπύλια ολοκληρώματα, χρειάζομαστε ισάριθμες παραμετρικοποιήσεις. Τέτοιες είναι οι

$\vec{\sigma}_{\overline{AB}}(t) = (t,0)$ με $t \in (0,1)$,

[2] ή, $\int_{\Omega} \mathrm{div}\vec{F} = \int_0^1 \int_0^1 (4x^3 - 2y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[4x^3 y - y^2\right]_{y=0}^{y=1} \mathrm{d}x = \int_0^1 (4x^3 - 1)\,\mathrm{d}x = \ldots = 0.$

$\vec{\sigma}_{\overline{BC}}(t) = (1, t)$ με $t \in (0, 1)$,

$\vec{\sigma}_{\overline{CD}}(t) = (t, 1)$ με $t \in (0, 1)$,

$\vec{\sigma}_{\overline{DA}}(t) = (0, t)$ με $t \in (0, 1)$.

Επομένως (σύμφωνα με τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος α′ είδους) έχουμε

$$\int_{\overline{AB}} (y^2 + x^3) = \int_0^1 t^3 \|\vec{\sigma}'_{\overline{AB}}(t)\| \mathrm{d}t = \int_0^1 t^3 \underbrace{\|(1, 0)\|}_{=1} \mathrm{d}t = \frac{1}{4},$$

$$\int_{\overline{BC}} x^4 = \int_0^1 1^4 \|\vec{\sigma}'_{\overline{BC}}(t)\| \mathrm{d}t = \int_0^1 \underbrace{\|(0, 1)\|}_{=1} \mathrm{d}t = 1,$$

$$\int_{\overline{CD}} (-y^2 - x^3) = \int_0^1 (-1 - t^3) \|\vec{\sigma}'_{\overline{CD}}(t)\| \mathrm{d}t = \int_0^1 (-1 - t^3) \underbrace{\|(0, 1)\|}_{=1} \mathrm{d}t = \ldots = -1 - \frac{1}{4},$$

$$\int_{\overline{DA}} (-x^4) = \int_0^1 0 \, \|\vec{\sigma}'_{\overline{DA}}(t)\| \mathrm{d}t = 0.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην (3) βλέπουμε ότι $\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu} = 0$. Αρα τα δύο μέλη της (2) είναι ίσα. $\square$

ΘΕΜΑ 4

Επαληθεύστε το Θ. Stokes για την συνάρτηση $\vec{F}(x, y, z) = (-y^3, x^3, 0)$ στην επιφάνεια που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2 + y^2 = 2$ και $x + y + z = \pi$.

Λύση. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\int_S \mathrm{curl}\vec{F} = \int_{\partial S} \vec{F}, \tag{4}$$

όπου $\vec{F}(x, y, z) = (-y^3, x^3, 0)$ και S είναι η επιφάνεια που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2 + y^2 = 2$ και $x + y + z = \pi$, είναι δηλαδή το κομμάτι του επιπέδου $x + y + z = \pi$ που έχει για προβολή στο xy-επίπεδο τον κύκλο κέντρου $(0, 0)$ ακτίνας $\sqrt{2}$. Υπολογίζουμε αρχικά το

$$\left[\mathrm{curl}\vec{F}\right](x, y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y^3 & x^3 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 3x^2 + 3y^2) = 3(x^2 + y^2)\vec{k}.$$

• Για τον υπολογισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος του αριστερού μέλους της (4), χρειαζόμαστε μια παραμετρικοποίηση της S. Μια παραμετρικοποίηση είναι η

$$\vec{\Phi}(\rho, \vartheta) = (\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, \pi - \rho\cos\vartheta - \rho\sin\vartheta), \text{ όπου } (\rho, \vartheta) \in [0, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi).$$

Είναι

$$\left[\vec{\Phi}_\rho \times \vec{\Phi}_\vartheta\right](\rho,\vartheta) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\vartheta & \cos\vartheta & -\cos\vartheta - \sin\vartheta \\ -\rho\sin\vartheta & \rho\cos\vartheta & \rho\sin\vartheta - \rho\cos\vartheta \end{vmatrix} = \rho(1,1,1),$$

άρα (σύμφωνα με τον ορισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος β′ είδους) έχουμε

$$\begin{aligned} \int_S \operatorname{curl}\vec{F} &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \left[\operatorname{curl}\vec{F}\right](\vec{\Phi}(\rho,\vartheta)) \cdot \left[\vec{\Phi}_\rho \times \vec{\Phi}_\vartheta\right](\rho,\vartheta)\, \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\rho \\ &= 3\int_0^{\sqrt{2}} \rho \int_0^{2\pi} (\rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\sin^2\vartheta)\vec{k}\cdot(1,1,1)\, \mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\rho \\ &= 3\int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \int_0^{2\pi} 1\, \mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\rho = 6\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{2}} = 6\pi. \end{aligned}$$

• Για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της (4), χρειαζόμαστε μια παραμετρικοποίηση της ∂S. Μια παραμετρικοποίηση είναι η

$$\vec{\sigma}(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t, \pi - \sqrt{2}\cos t - \sqrt{2}\sin t), \text{ όπου } t \in [0, 2\pi).$$

Είναι

$$\vec{\sigma}'(t) = (-\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t - \sqrt{2}\cos t) = \sqrt{2}(-\sin t, \cos t, \sin t - \cos t),$$

άρα (σύμφωνα με τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος β′ είδους) έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{F} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} (-\sqrt{2}^3\sin^3 t, \sqrt{2}^3\cos^3 t, 0)\cdot(-\sin t, \cos t, \sin t - \cos t)\, \mathrm{d}t \\ &= 4\int_0^{2\pi} (\sin^4 t + \cos^4 t)\, \mathrm{d}t = 4(3\pi/4 + 3\pi/4) = 6\pi, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (6). Αρα τα δύο μέλη της (4) είναι ίσα. □

ΘΕΜΑ 5

Επαληθεύστε το Θ. Gauss για την μπάλα ακτίνας R κέντρου $(0,0,0)$, και τη συνάρτηση $\vec{F}(x,y,z) = (0,0,z^3)$.

Λύση. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{\nu} = \int_\Omega \operatorname{div}\vec{F}, \tag{5}$$

όπου $\vec{F}(x,y,z) = (0,0,z^3)$, $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$ και $\vec{\nu}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια $\partial\Omega$ με φορά προς το εξωτερικό του Ω.

• Για το τριπλό ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (5), επειδή

$$\left[\mathrm{div}\vec{F}\right](x,y,z)=\frac{\partial 0}{\partial x}+\frac{\partial 0}{\partial y}+\frac{\partial z^3}{\partial z}=3z^2,$$

παίρνουμε με αλλαγη μεταβλήτων σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathrm{div}\vec{F} &= 3\int_0^R \rho^4 \int_0^{2\pi}\int_0^\pi \cos^2\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\rho\\ &= 6\pi\int_0^R \rho^4\,\mathrm{d}\rho\int_\pi^0 \cos^2\varphi\,\mathrm{d}(\cos\varphi)=\frac{6}{5}\pi R^5\left[\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_{\varphi=\pi}^{\varphi=0}=\frac{4}{5}\pi R^5.\end{aligned}$$

• Για το επιφανειακό ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της (5), επειδή για κάθε $(x,y,z)\in\partial\Omega$ έχουμε $\vec{\nu}(x,y,z)=\frac{1}{R}(x,y,z)$, παίρνουμε

$$\int_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot\vec{\nu}=\frac{1}{R}\int_{\partial\Omega}(0,0,z^3)\cdot(x,y,z)=\frac{1}{R}\int_{\partial\Omega}z^4.$$

Για τον υπολογισμό του επιφανειακού αυτού ολοκληρώματος χρειαζόμαστε μια παραμετρικοποίηση της $\partial\Omega$, δηλαδή της σφαίρας κέντρου $(0,0,0)$ ακτίνας R. Μια παραμετρικοποίηση είναι η

$$\vec{\Phi}(\vartheta,\varphi)=(R\sin\varphi\cos\vartheta, R\sin\varphi\sin\vartheta, R\cos\varphi),\ \text{όπου}\ (\vartheta,\varphi)\in[0,2\pi)\times[0,\pi).$$

Είναι $\left\|\left(\vec{\Phi}_\vartheta\times\vec{\Phi}_\varphi\right)(\vartheta,\varphi)\right\|=R^2\sin\varphi$, άρα (σύμφωνα με τον ορισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος α΄ είδους) έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}\int_{\partial\Omega}z^4 &= \frac{1}{R}\int_0^{2\pi}\int_0^\pi R^4\cos^4\varphi\, R^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta\\ &= 2\pi R^5\int_\pi^0 \cos^4\varphi\,\mathrm{d}(\cos\varphi)=2\pi R^5\left[\frac{\cos^5\varphi}{5}\right]_{\varphi=\pi}^{\varphi=0}=\frac{4}{5}\pi R^5.\end{aligned}$$

Αρα τα δύο μέλη της (5) είναι ίσα. □

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ

ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \exists!(\rho,\vartheta)\in[0,\infty)\times[0,2\pi)\ \text{ώστε}\ \begin{cases} x=\rho\cos\vartheta\\ y=\rho\sin\vartheta.\end{cases}$$

Έχουμε

$$\det(\text{Ιακωβιανού πίνακα})=\rho.$$

Επίσης, είναι $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, αρα για κάθε $\rho>0$ έχουμε την ακόλουθη παραμετρικοποίηση της καμπύλης κύκλου κέντρου 0 και ακτίνας ρ:

$$\vec{\sigma}(\vartheta)=(\rho\cos\vartheta,\rho\sin\vartheta,0),\qquad \vartheta\in[0,2\pi).$$

Έχουμε

$$\vec{\sigma}'(\vartheta)=\rho(-\sin\vartheta,\cos\vartheta,0),\qquad \vartheta\in[0,2\pi).$$

Επομένως

$$\|\vec{\sigma}'(\vartheta)\|=\rho,\qquad \vartheta\in[0,2\pi).$$

ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

$$\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \exists!(\rho,\vartheta,\varphi)\in[0,\infty)\times[0,2\pi)\times[0,\pi)\ \text{ώστε}\ \begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\vartheta\\ y=\rho\sin\varphi\sin\vartheta\\ z=\rho\cos\varphi.\end{cases}$$

Έχουμε

$$\det(\text{Ιακωβιανού πίνακα})=-\rho^2\sin\varphi.$$

Επίσης, είναι $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, αρα για κάθε $\rho>0$ έχουμε την ακόλουθη παραμετρικοποίηση της επιφάνειας σφαίρας κέντρου 0 και ακτίνας ρ:

$$\vec{\Phi}(\vartheta,\varphi)=(\rho\sin\varphi\cos\vartheta,\rho\sin\varphi\sin\vartheta,\rho\cos\varphi),\qquad (\vartheta,\varphi)\in[0,2\pi)\times[0,\pi).$$

Έχουμε

$$\big(\vec{\Phi}_\vartheta\times\vec{\Phi}_\varphi\big)(\vartheta,\varphi)=-\rho^2\sin\varphi(\sin\varphi\cos\vartheta,\sin\varphi\sin\vartheta,\cos\varphi),\qquad (\vartheta,\varphi)\in[0,2\pi)\times[0,\pi).$$

Επομένως

$$\|\big(\vec{\Phi}_\vartheta\times\vec{\Phi}_\varphi\big)(\vartheta,\varphi)\|=\rho^2\sin\varphi,\qquad (\vartheta,\varphi)\in[0,2\pi)\times[0,\pi).$$

ΕΝΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Δίνεται ότι

$$\int_0^{2\pi}\cos^4\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sin^4\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}. \tag{6}$$