

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΕΜΠΤΗ 28/09/2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ IV (ΜΥ 41)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΨΑΡΑΔΑΚΗΣ

ΘΕΜΑΤΑ (και λύσεις)

ΘΕΜΑ Ι

Υπολογίστε:

- (i) το εμβαδό της επιφάνειας του μοναδιαίου δίσκου, και
- (ii) την περίμετρο του μοναδιαίου δίσκου.

Λύση. (i) Αρκεί να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα $\int_{\Omega} 1$, όπου Ω είναι ο μοναδιαίος δίσκος με κέντρο το $(0, 0)$, δηλαδή

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Με αλλαγή μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες, είναι

$$\int_{\Omega} 1 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \, d\vartheta \, d\rho = \int_0^{2\pi} 1 \, d\vartheta \int_0^1 \rho \, d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \pi.$$

(ii) Αρκεί να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\partial\Omega} 1$, όπου $\partial\Omega$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος με κέντρο το $(0, 0)$, δηλαδή

$$\partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

1ος τρόπος:

Για τον υπολογισμό του $\int_{\partial\Omega} 1$ χρειαζόμαστε μια παραμετρικοποίηση του $\partial\Omega$. Μια παραμετρικοποίηση είναι η

$$\vec{\sigma}(\vartheta) = (\cos \vartheta, \sin \vartheta), \text{ όπου } \vartheta \in [0, 2\pi).$$

Είναι $\|\vec{\sigma}'(\vartheta)\| = 1$, άρα (σύμφωνα με τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος α' είδους) έχουμε

$$\int_{\partial\Omega} 1 = \int_0^{2\pi} 1 \, d\vartheta = 2\pi.$$

2ος τρόπος:

$$\int_{\partial\Omega} 1 = \int_{\partial\Omega} x^2 + y^2 = \int_{\partial\Omega} (x, y) \cdot (x, y) = \int_{\partial\Omega} (x, y) \cdot \vec{\nu},$$

όπου $\vec{\nu} = (x, y)$ είναι το μοναδιαίο κάθετο στον κύκλο $\partial\Omega$ με φορά προς το εξωτερικό του. Με εφαρμογή του Θ. Gauss, παίρνουμε

$$\int_{\partial\Omega} 1 = \int_{\Omega} \operatorname{div}(x, y) = \int_{\Omega} 2 = 2\pi,$$

λόγω (i).

3ος τρόπος: Το εμβαδόν $A(r)$ του δίσκου ακτίνας r , δίνεται από τον τύπο $A(r) = \pi r^2$ ¹. Από τον Απειροστικό Λογισμό III (ή II; ή I;), γνωρίζουμε ότι η περίμετρος του δίσκου ακτίνας r , δίνεται από την παράγωγο $A'(r)$. Όμως $A'(r) = 2\pi r$, επομένως $A'(1) = 2\pi$ είναι η περίμετρος του μοναδιαίου δίσκου. $\square$

ΘΕΜΑ 2

Υπολογίστε το $\iint_{B_R(0)} e^{-x^2-y^2-z^2} dx dy dz$, όπου $B_R(0)$ είναι η μπάλα κέντρου κέντρου $(0, 0, 0)$ και ακτίνας R . Θεωρώντας γνωστό ότι $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, δείξτε παίρνοντας το όριο $R \rightarrow \infty$, ότι $\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2-y^2-z^2} dx dy dz = \pi^{3/2}$.

Λύση. Με αλλαγή μεταβλητών σε σφαιρικές συντεταγμένες, είναι

$$\begin{aligned} \iint_{B_R(0)} e^{-x^2-y^2-z^2} dx dy dz &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-\rho^2} \rho^2 \sin \varphi d\varphi d\vartheta d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} 1 d\vartheta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^R e^{-\rho^2} \rho^2 d\rho = -2\pi \int_0^R \rho d(e^{-\rho^2}) \\ &= 2\pi \int_0^R e^{-\rho^2} d\rho - 2\pi R e^{-R^2}, \end{aligned}$$

όπου εκτελέστηκε ολοκλήρωση κατα μέρη στην τελευταία ισότητα. Επομένως

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{B_R(0)} e^{-x^2-y^2-z^2} dx dy dz = 2\pi \int_0^\infty e^{-\rho^2} d\rho = 2\pi \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \pi^{3/2}.$$

Αυτό σημαίνει ότι $\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-x^2-y^2-z^2} dx dy dz = \pi^{3/2}$, άρα και το ζητούμενο. $\square$

ΘΕΜΑ 3

Επαληθεύστε το Θ. Gauss για το τετράγωνο με κορυφές $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ και $(1, -1)$, και τη συνάρτηση $\vec{F}(x, y) = (x^4, -y^2 - x^3)$.

¹Αυτό αν θέλετε μπορείτε να το αποδείξετε ακριβώς όπως στο (i) ερώτημα, δηλ.

$$\int_{\Omega} 1 = \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho d\vartheta d\rho = 2\pi \int_0^r \rho d\rho = \dots = \pi r^2.$$

Λύση. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}, \quad (\text{I})$$

όπου $\vec{F}(x, y) = (x^4, -y^2 - x^3)$, $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ και $\vec{\nu}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο στην καμπύλη $\partial\Omega$ με φορά προς το εξωτερικό του Ω .

- Για το διπλό ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (I), επειδή

$$[\operatorname{div} \vec{F}](x, y) = \frac{\partial(x^4)}{\partial x} + \frac{\partial(-y^2 - x^3)}{\partial y} = 4x^3 - 2y,$$

παίρνουμε

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (4x^3 - 2y) \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \left[x^4 - 2xy \right]_{x=-1}^{x=1} dy = - \int_{-1}^1 4y \, dy = 0.^2$$

- Για να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της (I), παρατηρούμε πρώτα ότι

$\vec{\nu}(x, y) = (0, -1)$ για κάθε (x, y) που ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα $\overline{AB}$ που ενώνει τα $A(-1, -1)$ και $B(1, -1)$,

$\vec{\nu}(x, y) = (1, 0)$ για κάθε (x, y) που ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα $\overline{BC}$ που ενώνει τα $B(1, -1)$ και $C(1, 1)$,

$\vec{\nu}(x, y) = (0, 1)$ για κάθε (x, y) που ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα $\overline{CD}$ που ενώνει τα $C(1, 1)$ και $D(-1, 1)$, και

$\vec{\nu}(x, y) = (-1, 0)$ για κάθε (x, y) που ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα $\overline{DA}$ που ενώνει τα $D(-1, 1)$ και $A(-1, -1)$.

Επομένως,

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu} = \int_{\overline{AB}} (y^2 + x^3) + \int_{\overline{BC}} x^4 + \int_{\overline{CD}} (-y^2 - x^3) + \int_{\overline{DA}} (-x^4). \quad (2)$$

Για να υπολογίσω κάθε ένα από τα 4 επικαμπύλια ολοκληρώματα, χρειαζόμαστε ισάριθμες παραμετρικοποιήσεις. Τέτοιες είναι οι

$$\vec{\sigma}_{\overline{AB}}(t) = (t, -1) \text{ με } t \in (-1, 1),$$

$$\vec{\sigma}_{\overline{BC}}(t) = (1, t) \text{ με } t \in (-1, 1),$$

$$\vec{\sigma}_{\overline{CD}}(t) = (-t, 1) \text{ με } t \in (-1, 1),$$

$$\vec{\sigma}_{\overline{DA}}(t) = (-1, -t) \text{ με } t \in (-1, 1).$$

²ή, $\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (4x^3 - 2y) \, dy \, dx = \int_{-1}^1 [4x^3 y - y^2]_{y=-1}^{y=1} dx = 8 \int_{-1}^1 x^3 \, dx = 0.$

Επομένως (σύμφωνα με τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος α' είδους) έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\overline{AB}} (y^2 + x^3) &= \int_{-1}^1 (1 + t^3) \|\vec{\sigma}'_{\overline{AB}}(t)\| dt = \int_{-1}^1 (1 + t^3) \underbrace{\|(1, 0)\|}_{=1} dt = \dots = 2, \\ \int_{\overline{BC}} x^4 &= \int_{-1}^1 1^4 \|\vec{\sigma}'_{\overline{BC}}(t)\| dt = \int_{-1}^1 \underbrace{\|(0, 1)\|}_{=1} dt = 2, \\ \int_{\overline{CD}} (-y^2 - x^3) &= \int_{-1}^1 (-1 + t^3) \|\vec{\sigma}'_{\overline{CD}}(t)\| dt = \int_{-1}^1 (-1 + t^3) \underbrace{\|(-1, 0)\|}_{=1} dt = \dots = -2, \\ \int_{\overline{CD}} (-x^4) &= \int_{-1}^1 [-(-1)^4] \|\vec{\sigma}'_{\overline{DA}}(t)\| dt = -2.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην (2) βλέπουμε ότι $\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu} = 0$. Άρα τα δύο μέλη της (1) είναι ίσα. $\square$

ΘΕΜΑ 4

Επαληθεύστε το Θ. Stokes για την συνάρτηση $\vec{F}(x, y, z) = (-y^3, x^3, 0)$ στην επιφάνεια που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2 + y^2 = \pi$ και $x + y + z = 2$.

Λύση. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\int_S \text{curl} \vec{F} = \int_{\partial S} \vec{F}, \quad (3)$$

όπου $\vec{F}(x, y, z) = (-y^3, x^3, 0)$ και S είναι η επιφάνεια που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2 + y^2 = \pi$ και $x + y + z = 2$, είναι δηλαδή το κομμάτι του επιπέδου $x + y + z = 2$ που έχει για προβολή στο xy -επίπεδο τον κύκλο κέντρου $(0, 0)$ ακτίνας $\sqrt{\pi}$. Υπολογίζουμε αρχικά το

$$[\text{curl} \vec{F}](x, y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y^3 & x^3 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 3x^2 + 3y^2) = 3(x^2 + y^2)\vec{k}.$$

• Για τον υπολογισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος του αριστερού μέλους της (3), χρειαζόμαστε μια παραμετρικοποίηση της S . Μια παραμετρικοποίηση είναι η

$$\vec{\Phi}(\rho, \vartheta) = (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta, 2 - \rho \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta), \text{ όπου } (\rho, \vartheta) \in [0, \sqrt{\pi}] \times [0, 2\pi).$$

Είναι

$$[\vec{\Phi}_\rho \times \vec{\Phi}_\vartheta](\rho, \vartheta) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \vartheta & \sin \vartheta & -\cos \vartheta - \sin \vartheta \\ -\rho \sin \vartheta & \rho \cos \vartheta & \rho \sin \vartheta - \rho \cos \vartheta \end{vmatrix} = \rho(1, 1, 1),$$

άρα (σύμφωνα με τον ορισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος β' είδους) έχουμε

$$\begin{aligned}\int_S \operatorname{curl} \vec{F} &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} [\operatorname{curl} \vec{F}](\vec{\Phi}(\rho, \vartheta)) \cdot [\vec{\Phi}_\rho \times \vec{\Phi}_\vartheta](\rho, \vartheta) \, d\vartheta d\rho \\ &= 3 \int_0^{\sqrt{\pi}} \rho \int_0^{2\pi} (\rho^2 \cos^2 \vartheta + \rho^2 \sin^2 \vartheta) \vec{k} \cdot (1, 1, 1) \, d\vartheta d\rho \\ &= 3 \int_0^{\sqrt{\pi}} \rho^3 \int_0^{2\pi} 1 \, d\vartheta d\rho = 6\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{\pi}} = \frac{3}{2} \pi^3.\end{aligned}$$

• Για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της (3), χρειαζόμαστε μια παραμετρικοποίηση της ∂S . Μια παραμετρικοποίηση είναι η

$$\vec{\sigma}(t) = (\sqrt{\pi} \cos t, \sqrt{\pi} \sin t, 2 - \sqrt{\pi} \cos t - \sqrt{\pi} \sin t), \text{ όπου } t \in [0, 2\pi).$$

Είναι

$$\vec{\sigma}'(t) = (-\sqrt{\pi} \sin t, \sqrt{\pi} \cos t, \sqrt{\pi} \sin t - \sqrt{\pi} \cos t) = \sqrt{\pi}(-\sin t, \cos t, \sin t - \cos t),$$

άρα (σύμφωνα με τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος β' είδους) έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} \vec{F} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) \, dt \\ &= \sqrt{\pi} \int_0^{2\pi} (-\sqrt{\pi}^3 \sin^3 t, \sqrt{\pi}^3 \cos^3 t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, \sin t - \cos t) \, dt \\ &= \pi^2 \int_0^{2\pi} (\sin^4 t + \cos^4 t) \, dt = \pi^2(3\pi/4 + 3\pi/4) = \frac{3}{2} \pi^3,\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (;). Άρα τα δύο μέλη της (3) είναι ίσα. $\square$

ΘΕΜΑ 5

Επαληθεύστε το Θ. Gauss για την μπάλα ακτίνας R κέντρου $(0, 0, 0)$, και τη συνάρτηση $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, z)$.

Λύση. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\int_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}, \quad (4)$$

όπου $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, z)$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ και $\vec{\nu}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια $\partial \Omega$ με φορά προς το εξωτερικό του Ω .

• Για το τριπλό ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (4), επειδή

$$[\operatorname{div} \vec{F}](x, y, z) = \frac{\partial(-y)}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1,$$

παίρνουμε με αλλαγή μεταβλητών σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} = \int_{\Omega} 1 = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

• Για το επιφανειακό ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της (4), επειδή για κάθε $(x, y, z) \in \partial\Omega$ έχουμε $\vec{\nu}(x, y, z) = \frac{1}{R}(x, y, z)$, παίρνουμε

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu} = \frac{1}{R} \int_{\partial\Omega} (-y, x, z) \cdot (x, y, z) = \frac{1}{R} \int_{\partial\Omega} z^2.$$

Για τον υπολογισμό του επιφανειακού αυτού ολοκληρώματος χρειαζόμαστε μια παραμετρικοποίηση της $\partial\Omega$, δηλαδή της σφαίρας κέντρου $(0, 0, 0)$ ακτίνας R . Μια παραμετρικοποίηση είναι η

$$\vec{\Phi}(\vartheta, \varphi) = (R \sin \varphi \cos \vartheta, R \sin \varphi \sin \vartheta, R \cos \varphi), \text{ όπου } (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi).$$

Είναι $\|(\vec{\Phi}_{\vartheta} \times \vec{\Phi}_{\varphi})(\vartheta, \varphi)\| = R^2 \sin \varphi$, άρα (σύμφωνα με τον ορισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος α' είδους) έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \int_{\partial\Omega} z^2 &= \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 \cos^2 \varphi R^2 \sin \varphi d\varphi d\vartheta \\ &= 2\pi R^3 \int_{\pi}^0 \cos^2 \varphi d(\cos \varphi) = 2\pi R^3 \left[\frac{\cos^3 \varphi}{3} \right]_{\varphi=\pi}^{\varphi=0} = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

Άρα τα δύο μέλη της (4) είναι ίσα. □

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ

ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \exists! (\rho, \vartheta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \text{ ώστε } \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta. \end{cases}$$

Έχουμε

$$\det(\text{Ιακωβιανού πίνακα}) = \rho.$$

Επίσης, είναι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, αρα για κάθε $\rho > 0$ έχουμε την ακόλουθη παραμετρικοποίηση της καμπύλης κύκλου κέντρου 0 και ακτίνας ρ :

$$\vec{\sigma}(\vartheta) = (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta), \quad \vartheta \in [0, 2\pi).$$

Έχουμε

$$\vec{\sigma}'(\vartheta) = \rho(-\sin \vartheta, \cos \vartheta), \quad \vartheta \in [0, 2\pi),$$

επομένως

$$\|\vec{\sigma}'(\vartheta)\| = \rho, \quad \vartheta \in [0, 2\pi).$$

ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}, \exists! (\rho, \vartheta, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi) \text{ ώστε } \begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = \rho \cos \varphi. \end{cases}$$

Έχουμε

$$\det(\text{Ιακωβιανού πίνακα}) = -\rho^2 \sin \varphi.$$

Επίσης, είναι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, αρα για κάθε $\rho > 0$ έχουμε την ακόλουθη παραμετρικοποίηση της επιφάνειας σφαίρας κέντρου 0 και ακτίνας ρ :

$$\vec{\Phi}(\vartheta, \varphi) = (\rho \sin \varphi \cos \vartheta, \rho \sin \varphi \sin \vartheta, \rho \cos \varphi), \quad (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi).$$

Έχουμε

$$(\vec{\Phi}_{\vartheta} \times \vec{\Phi}_{\varphi})(\vartheta, \varphi) = -\rho^2 \sin \varphi (\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi), \quad (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi).$$

Επομένως

$$\|(\vec{\Phi}_{\vartheta} \times \vec{\Phi}_{\varphi})(\vartheta, \varphi)\| = \rho^2 \sin \varphi, \quad (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi).$$

ΕΝΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Δίνεται ότι

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 x \, dx = \int_0^{2\pi} \sin^4 x \, dx = \frac{3\pi}{4}.$$