Απειροστικός Λογισμός IV - Εαρινό 2023

Διδάσκων: Γ. Ψαραδάκης, Γραφείο 118 EMAIL: *gpsaradakis@uowm.gr*

Πρόγραμμα: Τρίτη 09:00-11:00 στη Β2 και Τετάρτη 11:00-14:00 στη Β5

Σύγγραμμα: J. Marsden, A. Tromba - Διανυσματικός Λογισμός, Π.Ε.Κ. 2004

Ύλη: Κεφάλαια 5, 6, 7 και 8

Διάρκεια μαθημάτων: 11 εβδομάδες (06 Μαρτίου - 07 Απριλίου και 24 Απριλίου - 02 Ιουνίου)

Διάφορα αποσπάσματα σε συνοπτική μορφή

1 Είδη χωρίων

Στα παρακάτω, $a < b$, $c < d$, $\underline{\phi}(t) \leq \overline{\phi}(t)$ για κάθε $t \in [a,b]$, $\underline{\psi}(s) \leq \overline{\psi}(s)$ για κάθε $s \in [c,d]$, και $\underline{\gamma}(t,s) \leq \overline{\gamma}(t,s)$ για κάθε $(t,s) \in [a,b] \times [c,d]$.

ΧΩΡΙΑ ΤΥΠΟΥ 1, 2 ΚΑΙ 3

$$
\begin{aligned}
&\text{χωρίο τύπου } 1: && \begin{cases} a \leq x \leq b \\ \underline{\phi}(x) \leq y \leq \overline{\phi}(x) \end{cases} \\
&\text{χωρίο τύπου } 2: && \begin{cases} c \leq y \leq d \\ \underline{\psi}(y) \leq x \leq \overline{\psi}(y) \end{cases} \\
&\text{χωρίο τύπου } 3: && \text{χωρίο τύπου } 1 \text{ και χωρίο τύπου } 2.
\end{aligned}
$$

ΧΩΡΙΑ ΤΥΠΟΥ I, II, III και IV

$$
\begin{aligned}
&\text{χωρίο τύπου I}: && \begin{cases} a \leq x \leq b \\ \underline{\phi}(x) \leq y \leq \overline{\phi}(x) \\ \underline{\gamma}(x,y) \leq z \leq \overline{\gamma}(x,y) \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} c \leq y \leq d \\ \underline{\psi}(y) \leq x \leq \overline{\psi}(y) \\ \underline{\gamma}(x,y) \leq z \leq \overline{\gamma}(x,y) \end{cases} \\
&\text{χωρίο τύπου II}: && \begin{cases} a \leq z \leq b \\ \underline{\phi}(z) \leq y \leq \overline{\phi}(z) \\ \underline{\gamma}(z,y) \leq x \leq \overline{\gamma}(z,y) \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} c \leq y \leq d \\ \underline{\psi}(y) \leq z \leq \overline{\psi}(y) \\ \underline{\gamma}(z,y) \leq x \leq \overline{\gamma}(z,y) \end{cases} \\
&\text{χωρίο τύπου III}: && \begin{cases} a \leq x \leq b \\ \underline{\phi}(x) \leq z \leq \overline{\phi}(x) \\ \underline{\gamma}(x,z) \leq y \leq \overline{\gamma}(x,z) \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} c \leq z \leq d \\ \underline{\psi}(z) \leq x \leq \overline{\psi}(z) \\ \underline{\gamma}(x,z) \leq y \leq \overline{\gamma}(x,z) \end{cases} \\
&\text{χωρίο τύπου IV}: && \text{χωρίο τύπου I και χωρίο τύπου II και χωρίο τύπου III.}
\end{aligned}
$$

2 Πολικές και σφαιρικές συντεταγμένες

ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \exists!(\rho,\vartheta)\in[0,\infty)\times[0,2\pi)\ \text{ώστε}\ \begin{cases} x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta. \end{cases}$$

Έχουμε

$$\det(\text{Ιακωβιανού πίνακα})=\rho.$$

Επίσης, είναι $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, αρα για κάθε $\rho>0$ έχουμε την ακόλουθη παραμετρικοποίηση της καμπύλης κύκλου κέντρου 0 και ακτίνας ρ:

$$\vec{\sigma}(\vartheta)=(\rho\cos\vartheta,\rho\sin\vartheta,0),\qquad \vartheta\in[0,2\pi).$$

Έχουμε

$$\vec{\sigma}'(\vartheta)=\rho(-\sin\vartheta,\cos\vartheta,0),\qquad \vartheta\in[0,2\pi).$$

Επομένως

$$\|\vec{\sigma}'(\vartheta)\|=\rho,\qquad \vartheta\in[0,2\pi).$$

ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

$$\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \exists!(\rho,\vartheta,\varphi)\in[0,\infty)\times[0,2\pi)\times[0,\pi)\ \text{ώστε}\ \begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\vartheta \\ z=\rho\cos\varphi. \end{cases}$$

Έχουμε

$$\det(\text{Ιακωβιανού πίνακα})=-\rho^2\sin\varphi.$$

Επίσης, είναι $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, αρα για κάθε $\rho>0$ έχουμε την ακόλουθη παραμετρικοποίηση της επιφάνειας σφαίρας κέντρου 0 και ακτίνας ρ:

$$\vec{\Phi}(\vartheta,\varphi)=(\rho\sin\varphi\cos\vartheta,\rho\sin\varphi\sin\vartheta,\rho\cos\varphi),\qquad (\vartheta,\varphi)\in[0,2\pi)\times[0,\pi).$$

Έχουμε

$$\big(\vec{\Phi}_\vartheta\times\vec{\Phi}_\varphi\big)(\vartheta,\varphi)=-\rho^2\sin\varphi(\sin\varphi\cos\vartheta,\sin\varphi\sin\vartheta,\cos\varphi),\qquad (\vartheta,\varphi)\in[0,2\pi)\times[0,\pi).$$

Επομένως

$$\|\big(\vec{\Phi}_\vartheta\times\vec{\Phi}_\varphi\big)(\vartheta,\varphi)\|=\rho^2\sin\varphi,\qquad (\vartheta,\varphi)\in[0,2\pi)\times[0,\pi).$$

3 Επικαμπύλια και επιφανειακά ολοκληρώματα

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΒΑΘΜΩΤΩΝ (α′ ΕΙΔΟΥΣ)/ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ (β′ ΕΙΔΟΥΣ) ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Αν $\vec{\sigma} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη, τότε για κάθε $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ για την οποία η $f\big(\vec{\sigma}(t)\big)$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, ορίζουμε

$$\int_{\vec{\sigma}} f := \int_a^b f\big(\vec{\sigma}(t)\big)\big\|\vec{\sigma}'(t)\big\| \,\mathrm{d}t,$$

ενώ για κάθε $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ για την οποία η $\vec{F}\big(\vec{\sigma}(t)\big)$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, ορίζουμε

$$\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} := \int_a^b \vec{F}\big(\vec{\sigma}(t)\big) \cdot \vec{\sigma}'(t) \,\mathrm{d}t.$$

Πιό αναλυτικά, αν $x = x(t)$, $y = y(t)$ και $z = z(t)$ είναι οι συνιστώσες της $\vec{\sigma}(t)$, $t \in [a,b]$, τότε

$$\int_{\vec{\sigma}} f = \int_a^b f\big(x,y,z\big)\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} \,\mathrm{d}t,$$

ενώ αν F_1, F_2, F_3 είναι οι συνιστώσες της $\vec{F}$ και $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ είναι οι συνιστώσες της $\vec{\sigma}(t)$, $t \in [a,b]$, τότε

$$\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} = \int_a^b \big[x'F_1(x,y,z) + y'F_2(x,y,z) + z'F_3(x,y,z)\big] \,\mathrm{d}t.$$

Ειδική περίπτωση: Αν $\vec{F} = \nabla f$ για μια $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ για την οποία η $f\big(\vec{\sigma}(t)\big)$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε απο τον κανόνα της αλυσίδας: $\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[f\big(\vec{\sigma}(t)\big)\big] \,\mathrm{d}t = f\big(\vec{\sigma}(b)\big) - f\big(\vec{\sigma}(a)\big)$, το οποίο είναι 0 στην περίπτωση που η καμπύλη είναι επιπλέον κλειστή.

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΒΑΘΜΩΤΩΝ (α′ ΕΙΔΟΥΣ)/ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ (β′ ΕΙΔΟΥΣ) ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Αν $\vec{\Phi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη ως προς κάθε μεταβλητή, τότε για κάθε $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ για την οποία η $f\big(\vec{\Phi}(u,v)\big)$ είναι συνεχής στο D, ορίζουμε

$$\int_{\vec{\Phi}} f := \iint\limits_D f\big(\vec{\Phi}(u,v)\big)\big\|\vec{\Phi}_u(u,v) \times \vec{\Phi}_v(u,v)\big\| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

ενώ για κάθε $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ για την οποία η $\vec{F}\big(\vec{\Phi}(u,v)\big)$ είναι συνεχής στο D, ορίζουμε

$$\int_{\vec{\Phi}} \vec{F} := \iint\limits_D \vec{F}\big(\vec{\Phi}(u,v)\big) \cdot \vec{\Phi}_u(u,v) \times \vec{\Phi}_v(u,v) \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Πιό αναλυτικά, αν $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ και $z = z(u,v)$ είναι οι συνιστώσες της $\vec{\Phi}(u,v)$, $(u,v) \in D$, τότε

$$\int_{\vec{\Phi}} f = \iint\limits_D f(x,y,z)\sqrt{(y_u z_v - z_u y_v)^2 + (x_u z_v - z_u x_v)^2 + (x_u y_v - y_u x_v)^2} \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

ενώ αν F_1, F_2, F_3 είναι οι συνιστώσες της $\vec{F}$ και $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ είναι οι συνιστώσες της $\vec{\Phi}(u,v)$, $(u,v) \in D$, τότε

$$\int_{\vec{\Phi}} \vec{F} = \iint\limits_D \Big[(y_u z_v - z_u y_v)F_1(x,y,z) - (x_u z_v - z_u x_v)F_2(x,y,z) + (x_u y_v - y_u x_v)F_3(x,y,z)\Big] \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

4 Θεωρήματα Gauss και Green

ΘΕΩΡΗΜΑ GREEN (ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟ $\leftrightarrow$ ΔΙΠΛΟ)

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα χωρίο τύπου 3 και συμβολίζουμε με $\partial\Omega$ το θετικά προσανατολισμένο σύνορό του (το εφαπτόμενο διάνυσμα σε καθε σημείο του $\partial\Omega$ έχει φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού). Τότε για κάθε $F_1, F_2 \in C^1(\Omega)$ ισχύει

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} = \int_{\Omega} \mathrm{curl}\vec{F} \cdot \vec{k}, \qquad \textit{όπου } \vec{F} := (F_1, F_2, 0). \tag{1}$$

Αν $x = x(t), y = y(t)$ είναι οι συνιστώσες μιας παραμετρικοποίησης $\vec{\sigma} : [a, b] \to \partial\Omega$, η οποία διατηρεί τον προσανατολισμό, τότε το θεώρημα Green γράφεται

$$\int_a^b \left[x' F_1(x, y) + y' F_2(x, y)\right] \mathrm{d}t = \iint_{\Omega} \big((F_2)_x - (F_1)_y\big)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2}$$

Παρατήρηση: Εκφράζοντας το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β′ είδους ως επικαμπύλιο α′ είδους, το Θ. Green αναδιατυπώνεται ως εξής:

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα χωρίο τύπου 3 και συμβολίζουμε με $\partial\Omega$ το σύνορό του. Τότε για κάθε $F_1, F_2 \in C^1(\Omega)$ ισχύει

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\tau} = \int_{\Omega} \mathrm{curl}\vec{F} \cdot \vec{k}, \tag{3}$$

όπου $\vec{F} := (F_1, F_2, 0)$ και $\vec{\tau}$ είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη $\partial\Omega$ με φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού.

ΘΕΩΡΗΜΑ GAUSS ΣΤΟ ΧΩΡΟ (ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟ $\leftrightarrow$ ΤΡΙΠΛΟ)

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ είναι ένα χωρίο τύπου IV και συμβολίζουμε με $\partial\Omega$ το προσανατολισμένο σύνορό του (το κάθετο διάνυσμα σε κάθε σημείο της επιφάνειας $\partial\Omega$ έχει φορά προς το εξωτερικό του Ω). Τότε για κάθε $F_1, F_2, F_3 \in C^1(\Omega)$ ισχύει

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} = \int_{\Omega} \mathrm{div}\vec{F}, \qquad \textit{όπου } \vec{F} := (F_1, F_2, F_3). \tag{4}$$

Αν $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ είναι οι συνιστώσες μιας παραμετρικοποίησης $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \partial\Omega$, η οποία διατηρεί τον προσανατολισμό, τότε το θεώρημα Gauss γράφεται

$$\begin{aligned}\iint_D \Big[(y_u z_v - z_u y_v) F_1(x, y, z) - (x_u z_v - z_u x_v) F_2(x, y, z) + (x_u y_v - y_u x_v) F_3(x, y, z)\Big]\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ = \iiint_{\Omega} \big((F_1)_x + (F_2)_y + (F_3)_y\big)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Παρατήρηση: Εκφράζοντας το επιφανειακό ολοκλήρωμα β′ είδους ως επιφανειακό α′ είδους, το Θ. Gauss αναδιατυπώνεται ως εξής:

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ είναι ένα χωρίο τύπου IV και συμβολίζουμε με $\partial\Omega$ το σύνορό του. Τότε για κάθε $F_1, F_2, F_3 \in C^1(\Omega)$ ισχύει

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu} = \int_{\Omega} \mathrm{div}\vec{F}, \tag{5}$$

όπου $\vec{F} := (F_1, F_2, F_3)$ και $\vec{\nu}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $\partial\Omega$ με φορά προς το εξωτερικό του Ω.

5 Θεώρημα Gauss στο επίπεδο

Το θεώρημα του Gauss στη μορφή (5) γενικεύεται στον $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Συγκεκριμμένα, για $n = 1$ είναι το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού, ενώ για $n = 2$ είναι το θεώρημα Green:

ΘΕΩΡΗΜΑ GAUSS ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα χωρίο τύπου 3 και συμβολίζουμε με $\partial\Omega$ το σύνορό του. Τότε για κάθε $F_1, F_2 \in C^1(\Omega)$ ισχύει

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu} = \int_{\Omega} \mathrm{div}\vec{F}, \tag{6}$$

όπου $\vec{F} := (F_1, F_2)$ και $\vec{\nu}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην καμπύλη $\partial\Omega$ με φορά προς το εξωτερικό του Ω.

Αν $x = x(t), y = y(t)$ με $t \in [a, b]$ είναι οι συνιστώσες μιας παραμετρικοποίησης $\vec{\sigma}$, της καμπύλης $\partial\Omega$, τέτοια ώστε σε καθε σημείο της $\partial\Omega$ το εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{\sigma}'$ να έχει φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού, τότε

$$\vec{\nu}(t) = \frac{\big(y'(t), -x'(t)\big)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|},$$

και η (6) γράφεται

$$\int_a^b \big[y'F_1(x, y) - x'F_2(x, y)\big]\,\mathrm{d}t = \iint_{\Omega} \big((F_1)_x + (F_2)_y\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Αν πάρουμε $\vec{F} = (-F_2, F_1)$, προκύπτει η (2). Επομένως το θεώρημα Green είναι το θεώρημα Gauss στο επίπεδο.

6 Θεώρημα Stokes (ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟ $\leftrightarrow$ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟ)

ΘΩΡΗΜΑ STOKES ΓΙΑ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

Έστω S είναι μια προσανατολισμένη επιφάνεια που ορίζεται από μια ένα-προς-ένα παραμετρικοποίηση $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \to S$. Τότε για κάθε $F_1, F_2, F_3 \in C^1(S)$ ισχύει

$$\int_S \mathrm{curl}\vec{F} = \int_{\partial S} \vec{F}, \tag{7}$$

όπου $\vec{F} := (F_1, F_2, F_3)$ και ∂S είναι το προσανατολισμένο σύνορο της S.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΘΩΡΗΜΑ STOKES ΓΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Αν η επιφάνεια S ορίζεται απο μια C^1 συνάρτηση $z = f(x, y), (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, τότε η παραμετρικοποίηση $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \to S$ με τύπο $\vec{\Phi}(x, y) = \big(x, y, f(x, y)\big)$ είναι προφανώς ένα-προς-ένα.