

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

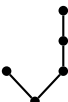
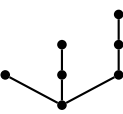
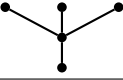
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εξεταστική Περίοδος Χειμερινού Εξαμήνου 2022-2023

Μάθημα: Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων II

Διδάσκοντες: Ζαχαρούλα Καλογηράτου - Θεόδωρος Μονοβασίλης

Θέμα 1 Για κάθε δέντρο με ρίζα να γράψετε την πυκνότητα του και τη συνθήκη τάξης μεθόδου Runge-Kutta που αντιστοιχεί σε αυτό

t	$\gamma(t)$	Συνθήκη
		
		
		
		
		
		
		

Θέμα 2 Στις μεθόδους Runge-Kutta με την εφαρμογή της απλοποιητικής παραδοχής

$$\sum_{j=1}^s a_{ij} c_j = \frac{c_i^2}{2}$$

πόσες και ποιές συνθήκες απαιτούνται για μέθοδο τέταρτης τάξης.

Θέμα 3 Για να λύσουμε την διαφορική εξίσωση $y' = f(x, y)$ χρησιμοποιούμε την μέθοδο:

$$y_{n+3} + a_2 y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = h b_3 f_{n+3}$$

Να βρεθούν οι συντελεστές a_2, a_1, a_0, b_3 ώστε η μέθοδος να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερης τάξης

Ποιά είναι η αλγεβρική τάξη της προκύπτουσας μεθόδου;

BONUS Είναι η προκύπτουσα μέθοδος ευσταθής;

Θέμα 4 Δίνεται η μέθοδος Runge-Kutta

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & 0 \quad 1 \\ \hline & \frac{1}{6} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{6} \end{array}$$

να βρείτε τους συντελεστές

$$\gamma_2, \quad \gamma_3, \quad a_{21}, \quad a_{32}, \quad b_1, \quad b_2$$

$$\begin{array}{c|c|c} 0 & & \\ \hline \frac{1}{2} & \gamma_2 & a_{21} \\ \hline 1 & \gamma_3 & 0 \quad a_{32} \\ \hline & & b_1 \quad b_2 \quad b_1 \end{array}$$

για να γίνει τριγωνομετρικά προσαρμοσμένη.

Θέμα 5 Για να λύσουμε την διαφορική εξίσωση $y' = 5x - 2y$ με αρχική συνθήκη $y(0) = 1$ χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες μεθόδους πρόβλεψης διόρθωσης.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$$

Η ακριβής λύση του προβλήματος είναι η

$$y(x) = \frac{5}{2}x - \frac{5}{4} + \frac{9}{4}e^{-2x}$$

Επιλέγοντας βήμα $h = 0.1$ να υπολογίσετε την βελτιωμένη τιμή y_5 .

Δίνονται οι αρχικές συνθήκες $y_0 = 1$, $y_1 = 0.8421$, $y_2 = 0.7582$, $y_3 = 0.7348$.

Για τους υπολογισμούς σας να χρησιμοποιήσετε 4 δεκαδικά ψηφία.

Ποιό είναι το σφάλμα υπολογισμού ;