



ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εξεταστική Περίοδος Χειμερινού Εξαμήνου 2024 - 2025

Μάθημα: Εισαγωγή στη Αριθμητική Ανάλυση

Διδάσκουσα: Ζαχαρούλα Καλογηράτου

Θέμα 1

- A** Εφαρμόστε τη μέθοδο Newton - Raphson για να βρείτε τον αναδρομικό τύπο για την εύρεση της κυβικής ρίζας πραγματικού αριθμού A .
- B** Εφαρμόστε τον τύπο για να βρείτε τις δύο πρώτες εκτιμήσεις της κυβικής ρίζας του 7, ξεκινώντας από κατάλληλη αρχική εκτίμηση x_0 .
- Γ** Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου Newton - Raphson (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος).

Θέμα 2

- A** Να δώσετε την ανάπτυξη της επαναληπτικής μεθόδου Newton για την επίλυση ενός συστήματος δύο μη-γραμμικών εξισώσεων με δύο άγνωστους:

$$f_1(x_1, x_2) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = 0$$

όταν f_1 και f_2 είναι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

- B** Εφαρμόστε μια επανάληψη της μεθόδου Newton για τον υπολογισμό της $x^{(1)}$ του συστήματος εξισώσεων

$$x_1^3 - 3x_1x_2^2 = -1$$

$$3x_1^2x_2 - x_2^3 = 0$$

με αρχική εκτίμηση της λύσης την $x^{(0)} = (1, 1)^T$.

Θέμα 3

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ όπου A τετραγωνικός πίνακας με $\det(A) \neq 0$ και b μη μηδενικό διάνυσμα.

- A** Περιγράψτε τη μέθοδο απαλοιφής Gauss για την επίλυση του συστήματος $Ax = b$.
- B** Τι είναι η LU παραγοντοποίηση του A ; Πώς προκύπτει από την απαλοιφή Gauss και πώς εφαρμόζεται για την επίλυση του συστήματος $Ax = b$;
- Γ** Περιγράψτε τη μέθοδο απαλοιφής Gauss - Jordan για την επίλυση του συστήματος $Ax = b$.
- Δ** Περιγράψτε τη μέθοδο υπολογισμού του αντίστροφου του A .

Θέμα 4

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ όπου A τετραγωνικός πίνακας με $\det(A) \neq 0$ και b μη μηδενικό διάνυσμα. Μία επαναληπτική μέθοδος προκύπτει από την διάσπαση του A σε $A = M - N$ με $\det(M) \neq 0$ και έχει τη μορφή

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- A** Να δείξετε ότι αναγκαία και ικανή συνθήκη για τη σύγκλιση της ακολουθίας $x^{(k)}$ στη λύση $x = A^{-1}b$ είναι η φασματική ακτίνα του πίνακα $M^{-1}N$ να είναι μικρότερη από τη μονάδα ($\rho(M^{-1}N) < 1$).
- B** Ποιά διάσπαση του A δίνει την επαναληπτική μέθοδο Jacobi και ποια την επαναληπτική μέθοδο Gauss-Seidel .
- Γ** Να εξετασθούν ως προς τη σύγκλιση οι μέθοδοι Jacobi και Gauss-Seidel αν

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Θέμα 5

Δίνονται σημεία $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots, (x_n, f_n)$

- A** Να γράψετε το πολυώνυμο παρεμβολής Newton με διηρημένες διαφορές.
- B** Αν ισχύει $x_i = x_0 + i h, i = 0, 1, 2, \dots, n, h > 0$ να γράψετε και να αποδείξετε τη σχέση που συνδέει την διηρημένη διαφορά k τάξης $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ με την προς τα εμπρός πεπερασμένη διαφορά $\Delta^k f_0$ και να γράψετε το πολυώνυμο παρεμβολής Newton με προς τα εμπρός πεπερασμένες διαφορές.
- Γ** Να βρείτε το πολυώνυμο παρεμβολής για τις τιμές

$$\begin{aligned} x_0 &= -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2 \\ f_0 &= 2, \quad f_1 = -1, \quad f_2 = 1, \quad f_3 = 3 \end{aligned}$$

Θέμα 6

- A** Να χρησιμοποιήσετε το πολυώνυμο παρεμβολής Newton με προς τα εμπρός πεπερασμένες διαφορές στα σημεία $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2)$ για να βρείτε τον απλό τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης του Simpson και το αντίστοιχο σφάλμα αποκοπής για τον υπολογισμό του

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx$$

- B** Να δείξετε πως προκύπτει ο σύνθετος τύπο του Simpson για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος

$$\int_a^b f(x) dx$$

από τον απλό τύπο που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

- Γ** Να εφαρμόσετε τον σύνθετο τύπο του τραπεζίου (χρησιμοποιώντας 5 ίσα υποδιαστήματα) για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 x^2 dx$$

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 2 μονάδες.

Καλή επιτυχία !