

Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss

1 Παραγοντοποίηση LU .

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου απαλοιφής Gauss κατασκευάστηκαν τα στοιχεία

$$l_{ij}, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

με τα στοιχεία αυτά σχηματίζουμε τον εξής μοναδιαία κάτω τριγωνικό πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & l_{n-1,3} & \cdots & 1 & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Αποδεικνύεται ότι το γινόμενο των L και U δίνει τον πίνακα A , δηλαδή $LU = A$. Τότε το γραμμικό σύστημα

$$A \underline{x} = \underline{b}$$

γράφεται

$$LU \underline{x} = \underline{b} \quad (1)$$

Μπορούμε να λύσουμε το σύστημα αυτό λύνοντας δύο τριγωνικά συστήματα. Θέτουμε

$$U \underline{x} = \underline{y} \quad (2)$$

τότε το σύστημα (1) γράφεται

$$L \underline{y} = \underline{b} \quad (3)$$

λύνουμε το κάτω τριγωνικό σύστημα (3) και βρίσκουμε το διάνυσμα $\underline{y}$.

Στη συνέχεια λύνουμε το άνω τριγωνικό σύστημα (2) και βρίσκουμε το διάνυσμα $\underline{x}$.

Ένας άλλος τρόπος να υπολογίσουμε τους πίνακες L και U έτσι ώστε $LU = A$ είναι κάνοντας τον πολλαπλασιασμό LU και συγκρίνοντας στοιχείο με στοιχείο με τον πίνακα A .

Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή και σαν μέθοδος Doolittle.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & l_{n-1,3} & \cdots & 1 & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3,n-1} & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n,n-1} & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την έχουμε $u_{11} = a_{11}$ συνεχίζοντας πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή του L με κάθε στήλη του U και έχουμε:

$$u_{12} = a_{12}, \quad u_{13} = a_{13}, \quad \dots, \quad u_{1,n-1} = a_{1,n-1}, \quad u_{1n} = a_{1n}$$

Δηλαδή ο πολλαπλασιασμός της πρώτης γραμμής του L με κάθε στήλη του U δίνει την πρώτη γραμμή του U ,

$$u_{1j} = a_{1j}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Πολλαπλασιάζουμε όλες τις γραμμές του L με την πρώτη στήλη του U

$$\begin{aligned} l_{21}u_{11} &= a_{21} \\ l_{31}u_{11} &= a_{31} \\ &\vdots \\ l_{n-1,1}u_{11} &= a_{n-1,1} \\ l_{n1}u_{11} &= a_{n1} \end{aligned}$$

από όπου υπολογίζουμε την πρώτη στήλη του L .

$$l_{i1} = a_{i1}/u_{11}, \quad i = 2, \dots, n$$

Συνεχίζουμε πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη γραμμή του L με όλες τις στήλες του U

$$\begin{aligned} l_{21}u_{12} + u_{22} &= a_{22} \\ l_{21}u_{13} + u_{23} &= a_{23} \\ &\vdots \\ l_{21}u_{1,n-1} + u_{2,n-1} &= a_{2,n-1} \\ l_{21}u_{1,n} + u_{2,n} &= a_{2,n} \end{aligned}$$

και υπολογίζουμε την δεύτερη γραμμή του U ,

$$u_{2j} = a_{2j} - l_{21}u_{1,j}, \quad j = 2, \dots, n$$

Μπορούμε τώρα να βρούμε την δεύτερη στήλη του L πολλαπλασιάζοντας όλες τις γραμμές του L με την δεύτερη στήλη του U

$$\begin{aligned} l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} &= a_{32} \\ &\vdots \\ l_{n-1,1}u_{12} + l_{n-1,2}u_{22} &= a_{n-1,2} \\ l_{n1}u_{12} + l_{n2}u_{22} &= a_{n2} \end{aligned}$$

οπότε η δεύτερη στήλη του L είναι

$$l_{i2} = (a_{i2} - l_{i1}u_{12})/u_{22}, \quad i = 3, \dots, n$$

Θεωρούμε ότι έχουμε υπολογίσει $(k-1)$ γραμμές του πίνακα U και $(k-1)$ στήλες του πίνακα L και θέλουμε να υπολογίσουμε την k γραμμή του U και την k στήλη του L .

Η k γραμμή του U θα προκύψει αν πολλαπλασιάσουμε την k γραμμή του L με όλες τις στήλες του U (από την k γραμμή ως το τέλος). Θα βρούμε το

γινόμενο της k γραμμής του L με την j στήλη του U ($k \leq j \leq n$).

$$\begin{pmatrix} l_{k1} & l_{k2}l_{k3} & \cdots & l_{k,k-1} & 1 & 0 & \cdots 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ u_{3j} \\ \vdots \\ u_{k-1,j} \\ u_{k,j} \\ u_{k+1,j} \\ \vdots \\ u_{jj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$l_{k1}u_{1j} + l_{k2}u_{2j} + l_{k3}u_{3j} + \cdots + l_{k,k-1}u_{k-1,j} + u_{kj} = a_{kj}$$

ή

$$\sum_{r=1}^{k-1} l_{kr}u_{rj} + u_{kj} = a_{kj}$$

από εδώ βρίσκουμε το u_{kj} στοιχείο και όμοια όλη την k γραμμή του U

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr}u_{rj}, \quad j = k, \dots, n$$

Για να βρούμε την k στήλη του L θα πολλαπλασιάσουμε τις γραμμές του L (από k ως n) με την k στήλη του U . Ας θεωρήσουμε και πάλι την i γραμμή του L

$$\begin{pmatrix} l_{i1} & l_{i2}l_{i3} & \cdots & l_{i,k-1} & l_{i,k} & l_{i,k+1} & \cdots & l_{i,i-1} & 1 & 0 & \cdots 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \\ u_{3k} \\ \vdots \\ u_{k-1,k} \\ u_{k,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$l_{i1}u_{1k} + l_{i2}u_{2k} + l_{i3}u_{3k} + \cdots + l_{i,k-1}u_{k-1,k} + l_{ik}u_{kk} = a_{ik}$$

ή

$$\sum_{r=1}^{k-1} l_{ir}u_{rk} + l_{ik}u_{kk} = a_{ik}$$

από εδώ βρίσκουμε το l_{ik} στοιχείο και όμοια όλη την k στήλη του L

$$l_{ik} = \left(a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir}u_{rk} \right) / u_{kk}, \quad j = k+1, \dots, n$$

Μπορούμε να γράψουμε για τον αλγόριθμο της LU παραγοντοποίησης

Για $k = 1, 2, \dots, n$

Για $j = k, \dots, n$

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr}u_{rj}$$

Για $i = k+1, \dots, n$

$$l_{ik} = \left(a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir}u_{rk} \right) / u_{kk}$$