

Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss

1 Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss

Ένα σύστημα με τριγωνικό (άνω ή κάτω) πίνακα συντελεστών είναι εύκολο να λυθεί όπως είδαμε με διαδοχικές αντικαταστάσεις.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss για το τυχαίο γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους.

Έστω το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Γράφουμε το διάνυσμα b δίπλα στον πίνακα A και έτσι έχουμε τον νέο πίνακα που θα συμβολίζουμε με $A|b$ και ανήκει στο $\mathbb{R}^{n \times n+1}$, ο πίνακας αυτός καλείται επαυξημένος πίνακας του συστήματος.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & a_{i,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array} \right)$$

Θα μηδενίσουμε όλα στοιχεία του A τα οποία βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο.

Σε πρώτη φάση μηδενίζουμε τα στοιχεία στην πρώτη στήλη $a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1}$
 Για να μηδενίσουμε το a_{21} αρκεί να πολ/σουμε την πρώτη γραμμή με

$$l_{21} = a_{21}/a_{11}$$

και να αφαιρέσουμε από τη δεύτερη γραμμή η οποία γίνεται

$$\begin{aligned} a_{22}^{(1)} &= a_{22} - l_{21}a_{12}, \\ &\vdots \\ a_{2n}^{(1)} &= a_{2n} - l_{21}a_{1n}, \\ a_{2,n+1}^{(1)} &= a_{2,n+1} - l_{21}a_{1,n+1} \end{aligned}$$

Τα παραπάνω συνοψίζονται στο εξής:

$$a_{2j}^{(1)} = a_{2j} - l_{21}a_{1j}, \quad j = 2, \dots, n+1$$

Για να μηδενίσουμε το a_{31} αρκεί να πολ/σουμε την πρώτη γραμμή με $l_{31} = a_{31}/a_{11}$
 και να αφαιρέσουμε από τη 3η γραμμή η οποία γίνεται

$$\begin{aligned} a_{32}^{(1)} &= a_{32} - l_{31}a_{12}, \\ &\vdots \\ a_{3n}^{(1)} &= a_{3n} - l_{31}a_{1n}, \\ a_{3,n+1}^{(1)} &= a_{3,n+1} - l_{31}a_{1,n+1} \end{aligned}$$

ή

$$a_{3j}^{(1)} = a_{3j} - l_{31}a_{1j}, \quad j = 2, \dots, n+1$$

Ανάλογα εργαζόμαστε και με τα άλλα στοιχεία της πρώτης στήλης. Για να μηδενίσουμε το a_{i1} αρκεί να πολ/σουμε την πρώτη γραμμή με $l_{i1} = a_{i1}/a_{11}$
 και να αφαιρέσουμε από την i γραμμή η οποία γίνεται

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - l_{i1}a_{1j}, \quad j = 2, \dots, n+1$$

Συνοψίζουμε το μηδενισμό των στοιχείων της 1ης στήλης κάτω από το a_{11}

$$\text{γραμμή } 2 \quad l_{21} = a_{21}/a_{11} \quad a_{2j}^{(1)} = a_{2j} - l_{21}a_{1j}, \quad j = 2, \dots, n+1$$

$$\text{γραμμή } 3 \quad l_{31} = a_{31}/a_{11} \quad a_{3j}^{(1)} = a_{3j} - l_{31}a_{1j}, \quad j = 2, \dots, n+1$$

$$\text{γραμμή } i \quad l_{i1} = a_{i1}/a_{11} \quad a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - l_{i1}a_{1j}, \quad j = 2, \dots, n+1$$

$\vdots$

$$\text{γραμμή } n \quad l_{n1} = a_{n1}/a_{11} \quad a_{nj}^{(1)} = a_{nj} - l_{n1}a_{1j}, \quad j = 2, \dots, n+1$$

Μπορούμε να γράψουμε όλα τα παραπάνω ως εξής

Για $i = 2, \dots, n$

$$l_{i1} = a_{i1}/a_{11}, \quad a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - l_{i1}a_{1j}, \quad j = 2, \dots, n+1$$

Τώρα ο επαυξημένος πίνακας έχει τη μορφή

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2j}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3j}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} & a_{3,n+1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{i2}^{(1)} & a_{i3}^{(1)} & \cdots & a_{ij}^{(1)} & \cdots & a_{in}^{(1)} & a_{i,n+1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nj}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & a_{n,n+1}^{(1)} \end{array} \right)$$

Στη συνέχεια εργαζόμαστε στον πίνακα

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2j}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3j}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} & a_{3,n+1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i2}^{(1)} & a_{i3}^{(1)} & \cdots & a_{ij}^{(1)} & \cdots & a_{in}^{(1)} & a_{i,n+1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nj}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & a_{n,n+1}^{(1)} \end{array} \right)$$

Θα μηδενίσουμε τα στοιχεία στη δεύτερη στήλη κάτω από το a_{22} (οδηγό στοιχείο), δηλαδή τα στοιχεία

$$a_{32}^{(1)}, \dots, a_{i2}^{(1)}, \dots, a_{n2}^{(1)}$$

Για να μηδενίσουμε το $a_{32}^{(1)}$ αρκεί να πολλαπλασιάσουμε την δεύτερη γραμμή με

$$l_{32} = a_{32}^{(1)} / a_{22}^{(1)}$$

και να αφαιρέσουμε από την τρίτη γραμμή η οποία γίνεται

$$\begin{aligned} 0, \dots, 0, a_{33}^{(2)} &= a_{33}^{(1)} - l_{32}a_{23}^{(1)}, \dots, a_{3n}^{(2)} = a_{3n}^{(1)} - l_{32}a_{2n}^{(1)}, \\ a_{3,n+1}^{(2)} &= a_{3,n+1}^{(1)} - l_{32}a_{2,n+1}^{(1)}, \end{aligned}$$

Γενικά μπορούμε περιγράψουμε τη διαδικασία μηδενισμού των στοιχείων της δεύτερης στήλης ως εξής

Για $i = 3, \dots, n+1$

$$\begin{aligned} l_{i2} &= a_{i2}^{(1)} / a_{22}^{(1)} \\ a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(1)} - l_{i2}a_{2j}^{(1)} \quad j = 3, \dots, n+1 \end{aligned}$$

Με τον τρόπο αυτό ο πίνακας έρχεται στη μορφή

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2j}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3j}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & a_{3,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{i3}^{(2)} & \cdots & a_{ij}^{(2)} & \cdots & a_{in}^{(2)} & a_{i,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nj}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & a_{n,n+1}^{(2)} \end{array} \right)$$

Μετά από $k - 1$ τέτοιες διαδικασίες έχουμε μορφοποιήσει το αριστερά $n \times (k - 1)$ κομμάτι και το πάνω $k \times (n + 1)$ κομμάτι του πίνακα. Παραμένει το κάτω δεξιά $(n - k) \times (n - k + 2)$ κομμάτι.

Εργαζόμαστε στο $(n - k + 1) \times (n - k + 2)$ κάτω δεξιά μέρος του πίνακα. Οδηγός γραμμή είναι η k γραμμή.

Θα μηδενίσουμε τα στοιχεία της k στήλης κάτω από το a_{kk} .

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2,k-1}^{(1)} & a_{2k}^{(1)} & a_{2,k+1}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3,k-1}^{(2)} & a_{3k}^{(2)} & a_{3,k+1}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & a_{3,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{k-1,k-1}^{(k-2)} & a_{k-1,k}^{(k-2)} & a_{k-1,k+1}^{(k-2)} & \cdots & a_{k-1,n}^{(k-2)} & a_{k-1,n+1}^{(k-2)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{kk}^{(k-1)} & a_{k,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{kn}^{(k-1)} & a_{k,n+1}^{(k-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k}^{(k-1)} & a_{k+1,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k-1)} & a_{k+1,n+1}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k-1)} & a_{n,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{nn}^{(k-1)} & a_{n,n+1}^{(k-1)} \end{array} \right)$$

Εργαζόμαστε στο $(n - k + 1) \times (n - k + 2)$ κάτω δεξιά μέρος του πίνακα.

Οδηγός γραμμή είναι η k γραμμή.

Θα μηδενίσουμε τα στοιχεία της k στήλης κάτω από το a_{kk} .

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{kk}^{(k-1)} & a_{k,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{kn}^{(k-1)} & a_{k,n+1}^{(k-1)} \\ a_{k+1,k}^{(k-1)} & a_{k+1,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k-1)} & a_{k+1,n+1}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{nk}^{(k-1)} & a_{n,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{nn}^{(k-1)} & a_{n,n+1}^{(k-1)} \end{array} \right)$$

Για $i = k + 1, \dots, n + 1$

$$\begin{aligned} l_{ik} &= a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \\ a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - l_{ik} a_{k,j}^{(k-1)} \quad j = k + 1, \dots, n + 1 \end{aligned}$$

Ο τελικός πίνακας της μεθόδου θα είναι ο ακόλουθος

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array} \right)$$

Συνολικά η διαδικασία επαναλήφθηκε $(n - 1)$ φορές.

Μπορούμε λοιπόν να καταλήξουμε από τον αρχικό πίνακα στον τελικό (άνω τριγωνικό) με τον ακόλουθο κώδικα.

$$\begin{aligned} \text{Για } k &= 1, \dots, n - 1 \\ \text{Για } i &= k + 1, \dots, n + 1 \\ l_{ik} &= a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \\ \text{Για } j &= k + 1, \dots, n + 1 \\ a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - l_{ik} a_{k,j}^{(k-1)} \end{aligned}$$

Το άνω τριγωνικό κομμάτι που προέκυψε από τον πίνακα A μετά την εφαρμογή της μεθόδου το ονομάζουμε U και το νέο δεξί μέλος $\tilde{b}$, δηλαδή ο πίνακας $A|b$ μετασχηματίζεται σε $U|\tilde{b}$ μπορούμε να το λύσουμε με προς τα πίσω αντικατάσταση.

2 Υλοποίηση στο MATLAB

Παρατηρήστε ότι καθώς εργαζόμαστε από πίνακα σε πίνακα δεν χρειαζόμαστε τους προηγούμενους πίνακες παρά μόνο τον αμέσως προηγούμενο. Επιπλέον μέσα σε κάθε πίνακα που μετασχηματίζουμε καθώς αλλάζουμε την κάθε γραμμή δεν χρειαζόμαστε την παλιά γραμμή έτσι μπορούμε να γράφουμε πάνω στον ίδιο πίνακα.

```
for k = 1:n-1
    for i = k+1:n
        L(i,k) = A(i,k)/A(k,k) ;
        for j =k:n+1
            A(i,j) = A(i,j) - L(i,k)*A(k,j) ;
        end
    end
end
```

Μπορούμε να αντικαταστήσουμε το

```
for j =k:n+1
    A(i,j) = A(i,j) - L(i,k)*A(k,j) ;
end
```

με μια γραμμή

```
A(i,k:n+1) = A(i,k:n+1) - L(i,k)*A(k,k:n+1) ;
```

Επιπλέον μπορούμε να γράφουμε

```
A(i,k+1:n+1) = A(i,k+1:n+1) - L(i,k)*A(k,k+1:n+1) ;
```

αφού γνωρίζουμε ότι τα στοιχεία της k στήλης κάτω από το $A(k, k)$ θα μηδενιστούν.

Σύμφωνα με τα παραπάνω η απαλοιφή Gauss γράφεται ως εξής:

```
for k = 1:n-1
    for i = k+1:n
        L(i,k) = A(i,k)/A(k,k) ;
        A(i,k+1:n+1) = A(i,k+1:n+1) - L(i,k)*A(k,k+1:n+1) ;
    end
end
```

Στο κάτω τριγωνικό κομμάτι του A μπορούμε να αποθηκεύσουμε τους πολλαπλασιαστές $L(i, j)$.

Στην παρακάτω συνάρτηση για την απαλοιφή Gauss παίρνουμε σαν όρισμα εξόδου και τον πίνακα που δημιουργήθηκε με τους πολλαπλασιαστές $L(i, j)$ τοποθετώντας στη διαγώνιο μονάδες (γράφουμε πριν την απαλοιφή $L = \text{eye}(n)$).

```
function [L,U,b1] = Gauss3(A,b)
% Gaussian elimination A x = b
% Input arguments
%   A a square matrix
%   b the right hand side (rhs) vector
% Output arguments
%   L a low triangular matrix that contains the multipliers
%   U an upper triangular coefficient matrix after the elimination
%   b1 the rhs vector after the elimination
[ma,na] = size(A) ;
[mb,nb] = size(b) ;
if ma == na
    n = ma ;
    if mb == n && nb == 1
        A = [A b] ; % create the augmented matrix
        L = eye(n) ;
% elimination
        for k = 1:n-1
            for i = k+1:n
                L(i,k) = A(i,k)/A(k,k) ;
                for j = k:n+1
                    A(i,j) = A(i,j) - L(i,k)*A(k,j) ;
                end
            end
        end
        b1 = A(:,n+1) ;
    U = A(:,1:n) ;
    else
        error('matrix dimensions do not agree') ;
    end
else
    error('A is not square') ;
end
end
```

Δημιουργήστε το γινόμενο L επί U . Τι παρατηρείται;