

Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

Γραμμικά Συστήματα με τριγωνικό πίνακα συντελεστών

1 Επανάληψη - εισαγωγικές έννοιες

Έστω το γραμμικό σύστημα 3 εξισώσεων με 3 άγνωστους τα x_1, x_2, x_3

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = 11 \\ -x_1 & +4x_2 & +2x_3 & = 13 \\ 3x_1 & & +x_3 & = 6 \end{array}$$

Μπορούμε να γράψουμε το σύστημα αυτό σε μορφή πινάκων,

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

όπου A είναι ο πίνακας συντελεστών, $\underline{b}$ είναι το δεξί μέλος, και $\underline{x}$ το διάνυσμα λύση

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = 11 & a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & = b_1 \\ -x_1 & +4x_2 & +2x_3 & = 13 & a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & = b_2 \\ 3x_1 & & +x_3 & = 6 & a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & = b_3 \end{array}$$

Μπορούμε να γράψουμε το σύστημα αυτό σε μορφή πινάκων,

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

όπου A είναι ο πίνακας συντελεστών, $\underline{b}$ είναι το δεξί μέλος, και $\underline{x}$ το διάνυσμα λύση

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Έστω τώρα το γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n άγνωστους

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Μπορούμε να το γράψουμε με χρήση πινάκων ως εξής:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Κάποιες φορές, για να αναλύσουμε μια μέθοδο, είναι χρήσιμο να έχουμε μια επιπλέον γραμμή ή στήλη

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

και να γράψουμε με χρήση πινάκων

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Μπορεί να χρειαστεί να βλέπουμε και την προτελευταία γραμμή ή και στήλη

$$\begin{array}{cccccccl}
 a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\cdots & +a_{1,n-1}x_{n-1} & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
 a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\cdots & +a_{2,n-1}x_{n-1} & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
 a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & +\cdots & +a_{3,n-1}x_{n-1} & +a_{3,n}x_n & = & b_3 \\
 & & \vdots & & & & & \vdots \\
 a_{n-1,1}x_1 & +a_{n-1,2}x_2 & +a_{n-1,3}x_3 & +\cdots & +a_{n-1,n-1}x_{n-1} & +a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\
 a_{n,1}x_1 & +a_{n,2}x_2 & +a_{n,3}x_3 & \cdots & +a_{n,n-1}x_{n-1} & +a_{n,n}x_n & = & b_n
 \end{array}$$

με χρήση πινάκων

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

2 Συστήματα με άνω τριγωνικό πίνακα συντελεστών

Λέμε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας διάστασης $n \times n$ είναι άνω τριγωνικός αν ισχύει

$$a_{ij} = 0, \quad i > j$$

δηλαδή όλα τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο του είναι ίσα με το μηδέν.

Ένας άνω τριγωνικός τετραγωνικός πίνακας έχει τη γενική μορφή

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Το γραμμικό σύστημα

$$A\underline{x} = \underline{b}, \quad \underline{b} \in \mathbb{R}^n$$

γράφεται

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Μπορούμε να λύσουμε την τελευταία εξίσωση

$$x_n = b_n/a_{nn}$$

η προηγούμενη εξίσωση είναι

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1}$$

στην οποία έχουμε τώρα έναν άγνωστο το x_{n-1}

$$x_{n-1} = (b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n) / a_{n-1,n-1}$$

συνεχίζοντας στη δεύτερη εξίσωση έχουμε άγνωστο το x_2

$$a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$x_2 = (b_2 - a_{2n}x_n - a_{2,n-1}x_{n-1} - \cdots - a_{23}x_3) / a_{22}$$

ή

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - \sum_{j=3}^n a_{2j}x_j \right)$$

Τέλος έχουμε την 1η εξίσωση

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

την οποία λύνουμε ως προς x_1

$$x_1 = (b_1 - a_{1n}x_n - a_{1,n-1}x_{n-1} - \cdots - a_{13}x_3 - a_{12}x_2) / a_{11}$$

ή

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j \right)$$

Γενικά από την i εξίσωση

$$a_{ii}x_i + a_{i,i+1}x_{i+1} + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

παίρνουμε το x_i

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j \right)$$

Επομένως η λύση του συστήματος προκύπτει:

Για $i = n, n-1, \dots, 2, 1$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j \right)$$

3 Συστήματα με κάτω τριγωνικό σύστημα συντελεστών

Λέμε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας διάστασης $n \times n$ είναι κάτω τριγωνικός αν ισχύει

$$a_{ij} = 0, \quad i < j$$

δηλαδή όλα τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο του είναι ίσα με το μηδέν.

Αν ο πίνακας συντελεστών είναι κάτω τριγωνικός

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

έχουμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rcccccccl} a_{11}x_1 & & & & & & & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & & & & & & = b_2 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & & & & & = b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n-1,1}x_1 & +a_{n-1,2}x_2 & +a_{n-1,3}x_3 & \cdots & +a_{n-1,n-1}x_{n-1} & & & = b_{n-1} \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +a_{n3}x_3 & \cdots & +a_{n,n-1}x_{n-1} & +a_{n,n}x_n & & = b_n \end{array}$$

Παράδειγμα για την περίπτωση 4×4

$$\begin{array}{rcccccl} 2x_1 & & & & & = 4 \\ 3x_1 & +x_2 & & & & = 7 \\ 5x_1 & -2x_2 & +4x_3 & & & = 20 \\ x_1 & & +2x_3 & -x_4 & & = 9 \end{array}$$

Το σύστημα αυτό είναι εύκολο να λυθεί. Λύνουμε την πρώτη εξίσωση για το x_1 , την δεύτερη για το x_2 κοκ

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{4}{2} = 2 \\ 3x_1 + x_2 &= 7 \Rightarrow x_2 = 7 - 3x_1 = 7 - 3 \cdot 2 = 1 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 20 \Rightarrow x_3 = \frac{20 - 5x_1 + 2x_2}{4} = \frac{20 - 5 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{4} = 3 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 &= 9 \Rightarrow x_4 = -(9 - x_1 - 2x_3) = -(9 - 2 - 2 \cdot 3) = -1 \end{aligned}$$

Γενικά η περίπτωση 4×4

$$\begin{array}{rcccccl} a_{11}x_1 & & & & & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & & & & = b_2 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & & & = b_3 \\ a_{41}x_1 & +a_{42}x_2 & +a_{43}x_3 & +a_{44}x_4 & & = b_4 \end{array}$$

Εργασία. Να συνεχίσεται ώστε να καταλήξετε στον τύπο που μας δίνει το x_i για $i = 1, 2, \dots, n$

4 Υπολογισμός του αντίστροφου

Θα λύσουμε τώρα το ακόλουθο πρόβλημα:

Δίνονται οι πίνακες A διάστασης $n \times n$ και B διάστασης $n \times m$ να βρεθεί πίνακας X έτσι ώστε να ισχύει $A \cdot X = B$

Είναι προφανές ότι ο ζητούμενος πίνακας έχει διάσταση $n \times m$.

Από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού πινάκων κάθε στήλη του πίνακα B είναι ίση με το γινόμενο του πίνακα A με την αντίστοιχη στήλη του X . Ας θεωρήσουμε ότι ο πίνακας B έχει τρεις στήλες ($m = 3$) τις οποίες ονομάζουμε

$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ τότε $B = [\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]$

τότε ο X επίσης έχει 3 στήλες και τις ονομάζουμε $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ τότε $X = [\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}]$

Μπορούμε τότε να τα γράψουμε το $A \cdot X = B$

$$A[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}] = [\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]$$

ή

$$A\underline{x} = \underline{a}$$

$$A\underline{y} = \underline{b}$$

$$A\underline{z} = \underline{c}$$

Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η εύρεση του αντίστροφου ενός πίνακα

$$AX = I_n$$

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση $n = 5$

$$AX = I_5$$

$$I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Κάθε στήλη του αντίστροφου του πίνακα A είναι:

$$\begin{aligned}A\underline{x} &= \underline{e}_1 \\A\underline{y} &= \underline{e}_2 \\A\underline{z} &= \underline{e}_3 \\A\underline{w} &= \underline{e}_4 \\A\underline{v} &= \underline{e}_5\end{aligned}$$

τότε

$$A^{-1} = [\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{w}, \underline{v}]$$

Εφαρμογή. Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα *Forsythe*

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$