

Αριθμητική Παρεμβολή

Ζ. Καλογηράτου

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Διηρημένες Διαφορές

Διηρημένη διαφορά μηδενικής τάξης στο σημείο x_i

$$f[x_i] = f(x_i).$$

Διηρημένη διαφορά πρώτης τάξης στα σημεία x_i, x_{i+1}

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}.$$

Διηρημένη διαφορά δεύτερης τάξης στα σημεία x_i, x_{i+1}, x_{i+2} χρησιμοποιώντας τις διαφορές πρώτης τάξης

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}.$$

Γενικά η διηρημένη διαφορά k τάξης $k \geq 1$ ορίζεται από τις διαφορές προηγούμενης τάξης ως εξής:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

π.χ. για $k = 3$

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] - f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_{i+3} - x_i}$$

Διηρημένες Διαφορές

Στον ακόλουθο πίνακα βλέπουμε τις διηρημένες διαφορές έως και τέταρτης τάξης για σημεία x_i , $i = 0, 1, 2, 3, 4$

$f(x_0) = f[x_0]$				
	$f[x_0, x_1]$			
$f(x_1) = f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
	$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
$f(x_2) = f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
	$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
$f(x_3) = f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		
	$f[x_3, x_4]$			
$f(x_4) = f[x_4]$				

Διηρημένες Διαφορές

Για τη διαφορά πρώτης τάξης έχουμε

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} + \frac{f_i}{x_i - x_{i+1}}.$$

Για τη διαφορά δεύτερης τάξης γράφουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] &= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} = \frac{\frac{f_{i+2} - f_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}}{x_{i+2} - x_i} \\ &= \frac{\frac{f_{i+2} - f_{i+1}}{(x_{i+2} - x_{i+1})(x_{i+2} - x_i)} - \frac{f_{i+1} - f_i}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+2} - x_i)}}{1} \\ &= \frac{f_{i+2}}{(x_{i+2} - x_{i+1})(x_{i+2} - x_i)} + \frac{f_{i+1}}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2})} + \frac{f_i}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})} \end{aligned}$$

Διηρημένες Διαφορές

Μπορούμε να αποδείξουμε με επαγωγή ότι

$$\begin{aligned} f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] &= \frac{f_i}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2}) \cdots (x_i - x_{i+k})} + \\ &\quad \frac{f_{i+1}}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2}) \cdots (x_{i+1} - x_{i+k})} + \\ &\quad \frac{f_{i+2}}{(x_{i+2} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1}) \cdots (x_{i+2} - x_{i+k})} + \cdots + \\ &\quad \frac{f_{i+k}}{(x_{i+k} - x_i)(x_{i+k} - x_{i+1}) \cdots (x_{i+k} - x_{i+k-1})} \end{aligned}$$

ή

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \sum_{j=0}^k \frac{f_j}{\prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^k (x_j - x_r)}$$

Διηρημένες Διαφορές

Από το παράπανω αποτέλεσμα προκύπτει ότι η διηρημένη διαφορά δεν εξαρτάται από τη σειρά των σημείων. Μπορεί να οριστεί και στην περίπτωση που κάποια ή όλα τα σημεία συμπίπτουν. Αν σε κάποιο σημείο x_0 ορίζεται η παράγωγος της f τότε ορίζουμε τη διαφορά $f[x_0, x_0]$ ίση με την παράγωγο, δηλαδή

$$f[x_0, x_0] = f'(x_0)$$

Διηρημένες Διαφορές

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_i, i = 0, 1, \dots, k$ διακεκριμένα σημεία στο $[a, b]$. Έστω επίσης $p_{k-1}(x)$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f που ορίζεται από τα σημεία $x_i, i = 0, 1, \dots, (k-1)$ ζητάμε να γράψουμε το πολυώνυμο παρεμβολής $p_k(x)$ στα σημεία $x_i, i = 0, 1, \dots, k$ ως εξής

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + q(x)$$

Για τα σημεία $x_i, i = 0, 1, \dots, k$ ισχύει

$$p_k(x_i) = p_{k-1}(x_i) = f(x_i)$$

οπότε $q(x_i) = 0$ στα σημεία αυτά. Τότε το $q(x)$ γράφεται

$$q_k(x) = a_k(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})$$

μένει να προσδιορίσουμε τον συντελεστή a_k .

Για $k = 1$ ισχύει

$$p_1(x) = f(x_0) + a_1(x - x_0)$$

επιπλέον ισχύει $p_1(x_1) = f(x_1)$ άρα

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$

επομένως $p_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0)$.

Διηρημένες Διαφορές

Για $k = 2$ ισχύει

$$\begin{aligned}p_2(x) &= p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)\end{aligned}$$

επιπλέον ισχύει $p_2(x_2) = f(x_2)$ άρα

$$f(x_2) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$a_2 = \frac{f(x_2) - f[x_0] - f[x_0, x_1](x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{\frac{f[x_2] - f[x_0] - f[x_0, x_1](x_2 - x_0)}{x_2 - x_1}}{x_2 - x_0}$$

εύκολα δείχνεται ότι ο αριθμητής του τελευταίου κλάσματος είναι ίσος με $f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]$ οπότε $a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$ και

$$p_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

Διηρημένες Διαφορές

Μπορούμε να δείξουμε με επαγωγή ότι $a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ οπότε

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}).$$

ή

$$p_k(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}).$$

Το τελευταίο είναι το πολυώνυμο παρεμβολής Newton .

Διηρημένες Διαφορές

Παράδειγμα

Να δοθεί το πολυώνυμο παρεμβολής Newton με διηρημένες διαφορές της όταν δίνονται τα σημεία $(0, 2)$, $(2, 4)$, $(2.5, 1)$, $(3.5, -2)$.

Δημιουργούμε τον πίνακα με τις διηρημένες διαφορές

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	0	2	$\frac{4-2}{2-0} = 1$		
1	2	4	$\frac{1-4}{2.5-2} = -6$	$\frac{-6-1}{2.5-0} = -2.8$	$\frac{2+2.8}{3.5-0} = 1.37143$
2	2.5	1	$\frac{-2-1}{3.5-2.5} = -3$	$\frac{-3+6}{3.5-2} = 2$	
3	3.5	-2			

Διηρημένες Διαφορές

Το πολυώνυμο παρεμβολής Νεωτον είναι το :

$$p_3(x) = 2 + (x - 0) - 2.8(x - 0)(x - 2) + 1.37143x(x - 2)(x - 2.5)$$

ή

$$p_3(x) = 2 + 13.4571x - 8.97144x^2 + 1.37143x^3$$

Παρατηρήστε ότι αυτό είναι το πολύώνυμο που βρήκαμε όταν εφαρμόσαμε παρεμβολή κατά Lagrange .

Διηρημένες Διαφορές

Αν επιπλέον των σημείων του προηγούμενου παραδείγματος έχουμε ακόμα δύο σημεία $(4, 2.5)$ και $(5, 5.5)$ τότε είναι εύκολο να δουλέψουμε πάνω στα προηγούμενα δεδομένα. Τα σημεία παρεμβολής τώρα είναι

$$(0, 2), (2, 4), (2.5, 1), (3.5, -2), (4, 2.5), (5, 5.5)$$

Συμπληρώνουμε τον πίνακα του προηγούμενου παραδείγματος με τα δύο επιπλέον σημεία και τις διαφορές που αντιστοιχούν σε αυτά.

i	x_i	$f[x_i]$	1η τάξη	2η τάξη	3η τάξη	4η τάξη	5η τάξη
0	0	2					
			1				
1	2	4		-2.8			
			-6		1.37143		
2	2.5	1		2		0.407143	
			-3		3		-0.601429
3	3.5	-2		8		-2.6	
			9		-4.8		
4	4	2.5		-4			
			3				
5	5	5.5					

Διηρημένες Διαφορές

Το πολυώνυμο παρεμβολής Newton προκύπτει από το πολυώνυμο τρίτου βαθμού του προηγούμενου παραδείγματος με δύο επιπλέον όρους

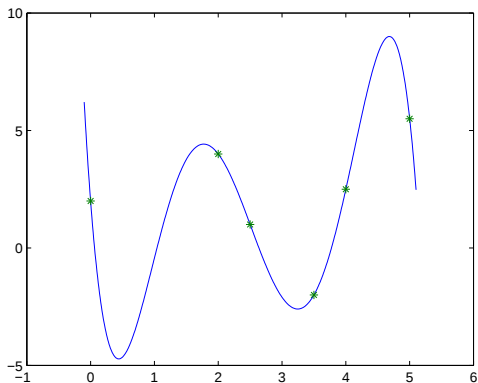
$$\begin{aligned}p_5(x) &= p_3(x) + 0.407143x(x-2)(x-2.5)(x-3.5) \\&\quad - 0.6014286x(x-2)(x-2.5)(x-3.5)(x-4) \\p_3(x) &= 2 + (x-0) - 2.8(x-0)(x-2) + 1.37143x(x-2)(x-2.5) \\&\quad + 0.407143x(x-2)(x-2.5)(x-3.5) \\&\quad - 0.6014286x(x-2)(x-2.5)(x-3.5)(x-4)\end{aligned}$$

μετά από πράξεις έχουμε

$$p_5(x) = 2 - 35.7679x + 59.9204x^2 - 33.6111x^3 + 7.62429x^4 - 0.601429x^5$$

Διηρημένες Διαφορές

Στο σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση του πολωνύμου πέμπτου βαθμού



Πεπερασμένες Διαφορές

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση που τα σημεία x_i ισαπέχουν ($x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = h$) τότε μπορούμε να πάρουμε μια απλούστερη μορφή του πολυωνύμου παρεμβολής Νεωτον. Όλοι οι παρονομαστές στις διηρημένες διαφορές μπορούν να γραφούν εμπλέκοντας το h

$$x_{i+1} - x_i = h, \quad x_{i+2} - x_i = 2h, \quad x_{i+3} - x_i = 3h$$

γενικά

$$x_{i+k} - x_i = k h$$

Γράφουμε τις διηρημένες διαφορές έως και τρίτης τάξης στην περίπτωση αυτή

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}.$$

Διηρημένες Διαφορές

$$\begin{aligned}f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] &= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} \\&= \frac{1}{2h} \left(\frac{f_{i+2} - f_{i+1}}{h} - \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \right) \\&= \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{2h^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] &= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] - f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_{i+3} - x_i} = \\&= \frac{1}{3h} \left(\frac{f_{i+3} - 2f_{i+2} + f_{i+1}}{2h^2} - \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{2h^2} \right) \\&= \frac{f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i}{3!h^3}\end{aligned}$$

Πεπερασμένες Διαφορές

Οι αριθμητές αντιστοιχούν στις λεγόμενες πεπερασμένες διαφορές (φινιτε διφφερενςες) τις οποίες ορίζουμε ακόλουθα. Η διηρημένη διαφορά μηδενικής τάξης ορίζεται και εδώ να είναι η τιμή της f

$$\Delta^0 f_i = f_i$$

Οι επόμενες διαφορές ορίζονται αναδρομικά

$$\Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i$$

Οι πεπερασμένες διαφορές έως και 5ης τάξης είναι

$$\Delta^1 f_i = \Delta^0 f_{i+1} - \Delta^0 f_i = f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta^2 f_i = \Delta^1 f_{i+1} - \Delta^1 f_i = (f_{i+2} - f_{i+1}) - (f_{i+1} - f_i) = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

$$\Delta^3 f_i = \Delta^2 f_{i+1} - \Delta^2 f_i = (f_{i+3} - 2f_{i+2} + f_{i+1}) - (f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i)$$

$$= f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta^4 f_i = f_{i+4} - 4f_{i+3} + 6f_{i+2} - 4f_{i+1} + f_i$$

$$\Delta^5 f_i = f_{i+5} - 5f_{i+4} + 10f_{i+3} - 10f_{i+2} + 5f_{i+1} - f_i$$

Πεπερασμένες Διαφορές

Παρατηρούμε ότι :

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{1}{h} \Delta^1 f_i$$

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{1}{2h^2} \Delta^2 f_0$$

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] = \frac{1}{3!h^3} \Delta^3 f_0$$

Μπορούμε να δείξουμε με επαγωγή ότι ισχύει

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{1}{k! h^k} \Delta^k f(x_0)$$

Γράφουμε το πολυώνυμο παρεμβολής Newton με πεπερασμένες διαφορές

$$\begin{aligned} p_n(x) = & \Delta^0 f(x_0) + \frac{\Delta^1 f(x_0)}{h} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2! h^2} (x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ & + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n! h^n} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Πεπερασμένες Διαφορές

Παράδειγμα

Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής Newton με προς τα εμπρός διαφορές όταν δίνονται τα σημεία $(-1, 5)$, $(0, 6)$, $(1, 3)$, $(2, 0)$, $(3, -2)$.

Τα σημεία ισαπέχουν και έχουμε $h = 1$. Σχηματίζουμε τις πεπερασμένες διαφορές

x_i	$\Delta^0 f_i$	$\Delta^1 f_i$	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$
-1	5				
		1			
0	6		-4		
		-3		4	
1	3		0		-3
		-3		1	
2	0		1		
		-2			
3	-2				

$$\Delta^0 f(x_0) = 5, \quad \Delta^1 f(x_0) = 1, \quad \Delta^2 f(x_0) = -4, \quad \Delta^3 f(x_0) = 4, \quad \Delta^4 f(x_0) = -3$$

Πεπερασμένες Διαφορές

το πολυώνυμο παρεμβολής είναι

$$\begin{aligned} p_n(x) = & \Delta^0 f(x_0) + \frac{\Delta^1 f(x_0)}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2! h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \\ & \frac{\Delta^3 f(x_0)}{3! h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \\ & \frac{\Delta^4 f(x_0)}{4! h^4}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \end{aligned}$$

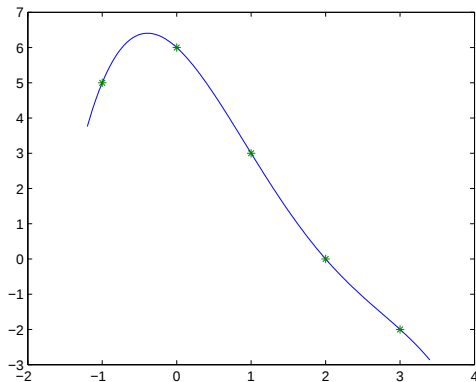
αντικαθιστούμε τις πεπερασμένες διαφορές

$$p_n(x) = 5 + 1(x + 1) + \frac{-4}{2}(x + 1)x + \frac{4}{6}(x + 1)x(x - 1) + \frac{-3}{24}(x + 1)x(x - 1)(x - 2)$$

και βρίσκουμε το πολυώνυμο παρεμβολής

$$p_n(x) = 6 - \frac{23}{12}x - \frac{15}{8}x^2 + \frac{11}{12}x^3 - \frac{1}{8}x^4$$

Πεπερασμένες Διαφορές



Πεπερασμένες Διαφορές

Αν τώρα θεωρήσουμε τη νέα μεταβλητή $s = (x - x_0)/h$ τότε $x - x_0 = sh$ και γενικά $x - x_i = (s - i)h$,

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \Delta^0 f(x_0) + \frac{\Delta^1 f(x_0)}{h} sh + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2! h^2} sh(s-1)h + \dots \\ &\quad + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n! h^n} sh(s-1)h \dots (s-n+1)h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_n(x_0 + sh) &= \Delta^0 f(x_0) + s\Delta^1 f(x_0) + \frac{s(s-1)}{2} \Delta^2 f(x_0) + \dots \\ &\quad + \frac{s(s-1) \dots (s-n+1)}{n!} \Delta^n f(x_0) \end{aligned}$$

οι συντελεστές των διαφορών μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια του δυωνυμικού συντελεστή

$$p_n(x_0 + sh) = \binom{s}{0} \Delta^0 f(x_0) + \binom{s}{1} \Delta^1 f(x_0) + \binom{s}{2} \Delta^2 f(x_0) + \dots + \binom{s}{n} \Delta^n f(x_0)$$

Το σφάλμα στην παρεμβολή γράφεται:

$$f(x) - p_n(x) = \binom{s}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$$