

Αριθμητική Παρεμβολή

Ζ. Καλογηράτου

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
Τμήμα Μαθηματικών

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

- 1 Το πρόβλημα της αριθμητικής παρεμβολής
- 2 Πολυωνυμική παρεμβολή - εισαγωγή
- 3 Παρεμβολή κατά Lagrange
- 4 Διηρημένες και πεπερασμένες διαφορές
- 5 Πολυώνυμο παρεμβολής Newton .

Ιστορική αναδρομή

Ο Νεύτωνας (1642-1727) ήταν ο πρώτος που βρήκε προσεγγιστικές λύσεις διαφορικών εξισώσεων χρησιμοποιώντας αριθμητικές διαδικασίες.

Εισήγαγε την τεχνική της πολυωνυμικής παρεμβολής.

Στην εργασία του *Mathematical Principles of Natural Philosophy* (Βιβλίο III) αυτός έδωσε τα ακόλουθα Λήμματα:

Λήμμα V

Να βρεθεί μια παραβολική καμπύλη που θα διέρχεται από οποιονδήποτε δεδομένο αριθμό σημείων.

Λήμμα VI

Εαν γνωρίζουμε ορισμένες παρατηρούμενες θέσεις ενός κομήτη, μπορούμε να βρούμε την θέση του σε οποιαδήποτε ενδιάμεση θέση.

Με τον όρο *παραβολική καμπύλη* εννοεί πολυώνυμο και περιγράφει την παρεμβολή με διηρημένες διαφορές.

Ιστορική αναδρομή

Ο Νεύτωνα αναφέρεται στον κομήτη του Χάλεϋ, έναν κομήτη μικρής περιόδου που είναι ορατός με γυμνό μάτι από τη Γη.

- Εμφανίζεται κάθε 75-79 χρόνια.
- Η τροχιά του γύρω από τον Ήλιο είναι εξαιρετικά ελλειπτική και έχει τροχιακή εκκεντρότητα 0.967.
- Εμφανίστηκε για τελευταία φορά στο εσωτερικό του Ηλιακού μας Συστήματος το 1986 και αναμένεται να εμφανιστεί στα μέσα του 2061.
- Η πρώτη καταγραφή του κομήτη του Χάλεϋ είναι το 240 π.Χ. στο κινεζικό χρονικό *Records of the Grand Historian*, το οποίο περιγράφει έναν κομήτη που εμφανίστηκε στα ανατολικά και κινήθηκε βόρεια.

Ο Έντμοντ Χάλεϋ (1656-1742) ήταν Άγγλος αστρονόμος, μαθηματικός και φυσικός, φίλος του Νεύτωνα και χρησιμοποίησε τον νόμο της παγκόσμιας βαρύτητας του Νεύτωνα για να υπολογίσει την περιοδοτικότητα του κομήτη που πήρε το όνομά του, το 1705 *Σύνοψη της Αστρονομίας των Κομητών*. Ο Χάλεϋ πέθανε το 1742 πριν προλάβει να παρατηρήσει την προβλεπόμενη επιστροφή του.

Πολυωνυμική Παρεμβολή

Ένας από τους πολύ σημαντικούς υπολογισμούς στην ιστορία της επιστήμης είναι η πρόβλεψη της επιστροφής του κομήτη που έγινε από τους Clairaut, Lalande και Lepaute το 1748.

Προέβλεψαν ότι ο κομήτης θα έφτανε στο περιήλιο στις 13 Απριλίου 1749, το οποίο ήταν λάθος μόνο για 31 ημέρες.

Η επόμενη παρατήρηση είχε προβλεφθεί το 1835 με σφάλμα 5 ημερών.

Η παρατήρηση το 1910 με σφάλμα 2.7 ημερών προβλέφθηκε από τους Cowell (1870-1949) και Crommelin (1865-1939), Βρετανούς αστρονόμους στο Royal Greenwich Observatory .

Investigation of the Motion of Halley's Comet from 1759-1910, Greenwich Observations 1909.

Η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε είναι η πολύ γνωστή μέθοδος Numeron οποία αναφέρεται επίσης στη βιβλιογραφία και ως μέθοδος Cowell.

Ο Boris Vasilyevich Numeron (1891-1941) ήταν Ρώσος αστρονόμος στο Αστεροσκοπείο της Αγίας Πετρούπολης και Καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της ίδιας πόλης στην οποία ίδρυσε και διεύθυνε το Ινστιτούτο Θεωρητικής Αστρονομίας.

Αριθμητική Παρεμβολή

Παρεμβολή

Αν γνωρίζουμε τις τιμές μιας συνάρτησης $f(x)$ σε $n + 1$ σημεία $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, τότε **παρεμβολή** (interpolation) είναι η διαδικασία με την οποία αποκτούμε προσεγγίσεις της $f(x)$ για τις τιμές του x οι οποίες βρίσκονται ενδιάμεσα στις δεδομένες τιμές $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$.

Παρεκβολή

Αν γνωρίζουμε τις τιμές μιας συνάρτησης $f(x)$ σε $n + 1$ σημεία $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, τότε **παρεκβολή** (extrapolation) είναι η διαδικασία με την οποία αποκτούμε προσεγγίσεις της $f(x)$ για τις τιμές του x οι οποίες βρίσκονται εκτός του διαστήματος των δεδομένων τιμών $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$.

Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την εύρεση μιας συνάρτησης $g(x)$ της οποίας οι τιμές συμπίπτουν με τις τιμές της $f(x)$ στα σημεία $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται συνάρτηση παρεμβολής (interpolation function) και τα σημεία x_i σημεία παρεμβολής (interpolation points) .

$$g(x_i) = f(x_i) \quad \text{για} \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Αριθμητική Παρεμβολή

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **συνάρτηση παρεμβολής (interpolation function)** και τα σημεία x_i **σημεία παρεμβολής (interpolation points)**.

$$g(x_i) = f(x_i) \quad \text{για} \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Η συνάρτηση παρεμβολής θέλουμε να είναι απλής μορφής ώστε να είναι εύχρηστη τόσο ως προς τον υπολογισμό των τιμών όσο και ως προς την παραγωγή και την ολοκλήρωση.

Η επιλογή της συνάρτησης παρεμβολής έχει να κάνει με τη μορφή των δεδομένων, συνήθως χρησιμοποιούμε πολυωνυμικές συναρτήσεις, δηλαδή γραμμικούς συνδυασμούς συναρτήσεων από το σύνολο

$$S = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$$

Άλλες επιλογές είναι να πάρουμε για παράδειγμα γραμμικούς συνδυασμούς από τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$T = \{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x, \dots\}$$

ή εκθετικές συναρτήσεις

$$E = \{1, e^{c_1 x}, e^{c_2 x}, e^{c_3 x}, \dots\}$$

όπου c_i είναι πραγματικοί αριθμοί άνισοι μεταξύ τους.

Αριθμητική Παρεμβολή

Θεωρούμε το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων που είναι ορισμένες σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ και

$$G = \{g_0(x), g_1(x), g_2(x), g_3(x), \dots\}$$

ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμο υποσύνολο του τέτοιο ώστε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του G να είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Υποθέτουμε ότι μια συνάρτηση παρεμβολής είναι γραμμικός συνδυασμός ενός πεπερασμένου υποσύνολου του G

$$g(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \dots + a_n g_n(x)$$

ζητάμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές a_i έτσι ώστε να ισχύει

$$g(x_i) = f(x_i) \text{ για } i = 0, 1, \dots, n.$$

από όπου προκύπτει το γραμμικό σύστημα

$$a_0 g_0(x_i) + a_1 g_1(x_i) + a_2 g_2(x_i) + \dots + a_n g_n(x_i) = f(x_i)$$

για $i = 0, 1, \dots, n$.

Αριθμητική Παρεμβολή

Ο πίνακας συντελεστών του συστήματος είναι

$$V = \begin{pmatrix} g_0(x_0) & g_1(x_0) & g_2(x_0) & \cdots & g_n(x_0) \\ g_0(x_1) & g_1(x_1) & g_2(x_1) & \cdots & g_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0(x_n) & g_1(x_n) & g_2(x_n) & \cdots & g_n(x_n) \end{pmatrix}$$

Για να έχει το σύστημα λύση πρέπει ο βαθμός του πίνακα να είναι $n + 1$, δηλαδή η ορίζουσα του πίνακα να είναι διάφορη του μηδενός.

Τότε μπορούμε να λύσουμε το σύστημα με μια αριθμητική μέθοδο όπως η μέθοδος απαλοιφής Gauss .

Πολυωνυμική Παρεμβολή

Όταν η συνάρτηση παρεμβολής είναι πολυώνυμο λέμε ότι έχουμε **πολυωνυμική παρεμβολή** (**polynomial interpolation**) .

Τα πολυώνυμα προσεγγίζουν ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις.

Για κάθε συνεχή συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ μπορούμε να βρούμε οσοδήποτε ένα πολυώνυμο.

Θεώρημα Weierstrass

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και $\epsilon > 0$ τότε υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$, ορισμένο στο $[a, b]$ για το οποίο ισχύει:

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon, \quad \text{για κάθε } x \in [a, b].$$

Πολυωνυμική Παρεμβολή

Είναι γνωστό ότι δύο σημεία ορίζουν ακριβώς μια ευθεία δηλαδή ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού. Έστω 2 σημεία x_0, x_1 και οι τιμές μιας συνάρτησης σε αυτά $f(x_0), f(x_1)$ μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές ενός πολυωνύμου πρώτου βαθμού $p(x) = a_1x + a_0$ για το οποίο ισχύει $p(x_0) = f(x_0)$ και $p(x_1) = f(x_1)$

$$a_0 + a_1x_0 = f(x_0)$$

$$a_0 + a_1x_1 = f(x_1)$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση αν $x_0 \neq x_1$

$$a_0 = \frac{x_1 f(x_0) - x_0 f(x_1)}{x_1 - x_0} \quad \text{και} \quad a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

τότε το πολυώνυμο γράφεται διαδοχικά:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_1x + a_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} x + \frac{x_1 f(x_0) - x_0 f(x_1)}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{(x_1 - x)f(x_0) + (x - x_0)f(x_1)}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \end{aligned}$$

Πολυωνυμική Παρεμβολή

Το πολυώνυμο παρεμβολής

$$p(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$p(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$$

όπου

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{και} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Παρατηρούμε ότι

$$L_0(x_0) = 1 \quad L_0(x_1) = 0 \quad L_1(x_0) = 0 \quad L_1(x_1) = 1$$

Πολυωνυμική Παρεμβολή

Αν έχουμε 3 σημεία x_0, x_1, x_2 και τις τιμές μιας συνάρτησης σε αυτά $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$ μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές ενός πολυωνύμου δεύτερου βαθμού

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

για το οποίο ισχύει $p(x_i) = f(x_i)$ για $i = 0, 1, 2$

$$p(x_0) = f(x_0), p(x_1) = f(x_1), p(x_2) = f(x_2)$$

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = f(x_0)$$

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = f(x_1)$$

$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = f(x_2)$$

Οι συντελεστές a_2, a_1, a_0 προκύπτουν σαν λύσεις του παραπάνω συστήματος γραμμικών εξισώσεων το οποίο για να έχει λύση πρέπει ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}$$

να είναι αντιστρέψιμος.

Πολυωνυμική Παρεμβολή

Δηλαδή η ορίζουσα του

$$(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

να είναι διάφορη του μηδέν που ισχύει αν τα σημεία είναι διακεκριμένα.

Λύνοντας το σύστημα παίρνουμε

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{f(x_2)x_0^2x_1 - f(x_2)x_0x_1^2 - f(x_1)x_0^2x_2 + f(x_1)x_1^2x_2 + f(x_1)x_0x_2^2 - f(x_0)x_1x_2^2}{(-x_0 + x_1)(x_1 - x_2)(-x_0 + x_2)} \\&= \frac{f(x_0)x_1x_2(x_1 - x_2) + f(x_1)x_0x_2(x_2 - x_0) + f(x_2)x_0x_1(x_0 - x_1)}{(-x_0 + x_1)(x_1 - x_2)(-x_0 + x_2)} \\a_1 &= \frac{f(x_0)(x_2^2 - x_1^2) + f(x_1)(x_0^2 - x_1^2) + f(x_2)(x_1^2 - x_0^2)}{(-x_0 + x_1)(x_1 - x_2)(-x_0 + x_2)} \\a_2 &= \frac{f(x_0)(x_2 - x_1) + f(x_1)(x_2 - x_0) + f(x_2)(x_1 - x_0)}{(-x_0 + x_1)(x_1 - x_2)(-x_0 + x_2)}\end{aligned}$$

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Πολυωνυμική Παρεμβολή

Ο αριθμητής γράφεται:

$$\begin{aligned} & f(x_0)x_1x_2(x_1 - x_2) + f(x_1)x_0x_2(x_2 - x_0) + f(x_2)x_0x_1(x_0 - x_1) + \\ & \left(f(x_0)(x_2^2 - x_1^2) + f(x_1)(x_0^2 - x_2^2) + f(x_2)(x_1^2 - x_0^2) \right) x + \\ & \left(f(x_0)(x_2 - x_1) + f(x_1)(x_2 - x_0) + f(x_2)(x_1 - x_0) \right) x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f(x_0) \left(x_1x_2(x_1 - x_2) + (x_2^2 - x_1^2)x - (x_2 - x_1)x^2 \right) + \\ & f(x_1) \left(x_0x_2(x_2 - x_0) + (x_0^2 - x_2^2)x + (x_2 - x_0)x^2 \right) + \\ & f(x_2) \left(x_0x_1(x_0 - x_1) + (x_1^2 - x_0^2)x - (x_1 - x_0)x^2 \right) \end{aligned}$$

$$p(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

Πολυωνυμική Παρεμβολή

Ορίζουμε τα πολυώνυμα

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \quad L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \quad L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

τότε το πολυώνυμο παρεμβολής γράφεται

$$p(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$$

Παρατηρούμε ότι

$$L_0(x_0) = 1 \quad L_0(x_1) = 0 \quad L_0(x_2) = 0$$

$$L_1(x_0) = 0 \quad L_1(x_1) = 1 \quad L_1(x_2) = 0$$

$$L_2(x_0) = 0 \quad L_2(x_1) = 0 \quad L_2(x_2) = 1$$

Όπως θα δούμε αργότερα τα πολυώνυμα $L_0(x)$, $L_1(x)$ και $L_2(x)$ καλούνται συντελεστές.

Πολυωνυμική Παρεμβολή

Αν έχουμε $n + 1$ σημεία $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ και τις τιμές μιας συνάρτησης $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$ σε αυτά μπορούμε να βρούμε πολυώνυμο

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

για το οποίο ισχύει

$$P_n(x_i) = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_nx_i^n = f_i$$

έχουμε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων με πίνακα συντελεστών

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Η ορίζουσα του πίνακα λέγεται ορίζουσα Vandermonde και ισούται με

$$|V| = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}} (x_i - x_j).$$

Είναι προφανές ότι η ορίζουσα είναι διάφορη του μηδενός για διακεκριμένα σημεία x_i .

Πολυωνυμική Παρεμβολή

Θεώρημα. Μοναδικότητα του πολυωνύμου παρεμβολής

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και x_i για $i = 0, 1, \dots, n$ διακεκριμένα σημεία του $[a, b]$ τότε υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο $P_n(x)$ βαθμού μικρότερου ή ίσου με n τέτοιο ώστε

$$P_n(x_i) = f(x_i) \text{ για } i = 0, 1, \dots, n.$$

Όπως είδαμε, αφού τα x_i για $i = 0, 1, \dots, n$ είναι διακεκριμένα, υπάρχει πολυώνυμο παρεμβολής βαθμού το πολύ n .

Θα δείξουμε ότι είναι μοναδικό.

Έστω $Q_n(x)$ ένα άλλο πολυώνυμο βαθμού το πολύ n για το οποίο ισχύει:

$$Q_n(x_i) = f(x_i) \text{ για } i = 0, 1, \dots, n$$

τότε

$$P_n(x_i) - Q_n(x_i) = 0 \text{ για } i = 0, 1, \dots, n.$$

Το πολυώνυμο $P_n(x) - Q_n(x)$ είναι και αυτό βαθμού το πολύ n και έχει $n + 1$ σημεία μηδενισμού, συνεπώς είναι μηδενικό. Άρα $P_n(x) \equiv Q_n(x)$ επομένως το πολυώνυμο παρεμβολής είναι μοναδικό.

Το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange

Θα δούμε τρόπους εύρεσης του πολυωνύμου παρεμβολής για τους οποίους δεν απαιτείται η λύση του γραμμικού συστήματος.

Ένας από αυτούς είναι η **παρεμβολή κατά Lagrange**. Για να βρούμε το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange $P_n(x)$

$$P_n(x_i) = f(x_i) \text{ για } i = 0, 1, \dots, n.$$

γράφουμε

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) \quad (1)$$

όπου $L_i(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ τα οποία καλούνται **συντελεστές Lagrange** και ικανοποιούν τις σχέσεις

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases}$$

Τότε το $P_n(x)$ είναι πολυώνυμο παρεμβολής αφού

$$p_n(x_i) = \sum_{j=0}^n L_j(x_i) f(x_j) = L_i(x_i) f(x_i) = f(x_i)$$

Το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange

Μένει τώρα να προσδιορίσουμε τα $L_i(x)$.

Αφού τα x_j για $j \neq i$ είναι ρίζες του $L_i(x)$, ισχύει:

$$L_i(x) = c(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)$$

από όπου

$$L_i(x_i) = c(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)$$

Από τη σχέση $L_i(x_i) = 1$ παίρνουμε

$$c(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n) = 1$$

$$c = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$

Συνεπώς

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$

ή

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange

Παράδειγμα

Να δοθεί το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange με διηρημένες διαφορές της όταν δίνονται τα σημεία $(0, 6)$, $(2, 4)$, $(2.5, 1)$, $(3.5, -2)$

$$L_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x - 2)(x - 2.5)(x - 3.5)}{(0 - 2)(0 - 2.5)(0 - 3.5)} = \frac{-17.5 + 20.75x - 8x^2 + x^3}{-17.5},$$

$$L_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x - 0)(x - 2.5)(x - 3.5)}{(2 - 0)(2 - 2.5)(2 - 3.5)} = \frac{8.75x - 6x^2 + x^3}{1.5}$$

$$L_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x - 0)(x - 2)(x - 3.5)}{(2.5 - 0)(2.5 - 2)(2.5 - 3.5)} = \frac{7x - 5.5x^2 + x^3}{-1.25}$$

$$L_3 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 2)(x - 2.5)}{(3.5 - 0)(3.5 - 2)(3.5 - 2.5)} = \frac{5x - 4.5x^2 + x^3}{5.25}$$

Το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange

οπότε το πολυώνυμο παρεμβολής είναι

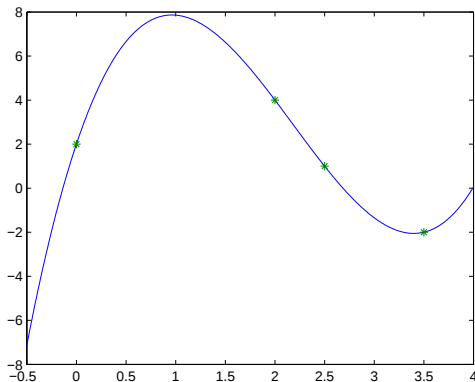
$$p_3(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) + f_3 L_3(x)$$

μετά τις αντικαταστάσεις γίνεται

$$p_3(x) = 2 + 13.4571x - 8.97144x^2 + 1.37143x^3.$$

Το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange

Στο σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση του παραπάνω πολυωνύμου



Πολυωνυμική Παρεμβολή

Θεώρημα. Σφάλμα στην παρεμβολή

Έστω ότι $f \in C^{n+1}[a, b]$,

x_i $i = 0, 1, \dots, n$ διακεκριμένα σημεία του διαστήματος $[a, b]$

και $P_n(x)$ το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange τότε για κάθε $x \in [a, b]$ υπάρχει αριθμός $\xi(x) \in (a, b)$ ώστε να ισχύει:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$