

Αριθμητική Ολοκλήρωση

Z. Καλογηράτου

22 Ιανουαρίου 2021

1 Αριθμητικοί τύποι Newton-Cotes

Ο αναλυτικός υπολογισμός πολλών ολοκληρωμάτων είναι πολλές φορές πολύπλοκος έως και αδύνατος, γιὰ αυτό το λόγο είναι χρήσιμος ο αριθμητικός υπολογισμός των ορισμένων ολοκληρωμάτων. Γιά την επίτευξη του σκοπού αυτού αντικαθιστούμε την συνάρτηση που θέλουμε να ολοκληρώσουμε στο διάστημα ολοκλήρωσης με ένα πολυώνυμο παρεμβολής και κατόπιν ολοκληρώνουμε το πολυώνυμο αυτό, αυτές οι μέθοδοι λέγονται Newton-Cotes.

Οι πλέον απλοί και συνήθεις τύποι είναι τύποι του τραπεζίου και του Simpson.

1.1 Κανόνας του Τραπεζίου

Ο απλός τύπος του τραπεζίου στηρίζεται στην αντικατάσταση της συνάρτησης με την ευθεία που περνά από τα άκρα του διαστήματος ολοκλήρωσης (δηλ. ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού). Έτσι ο απλός τύπος του τραπεζίου γράφεται:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a)$$

Αν τώρα χωρίσουμε το $[a, b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \\ x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = h = \frac{b - a}{n}$$

Τότε:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \\
&\approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + \frac{h}{2}(f_2 + f_3) + \cdots + \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n) \\
&= \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n) \\
&= h \sum_{i=1}^n f(x_i) + \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_n))
\end{aligned}$$

Είναι προφανές ότι καθώς το n αυξάνει (δηλ. το h μειώνεται) η προσεγγιση πλησιάζει περισσότερο την πραγματική τιμή του ολοκληρώματος.

Ενας εναλλακτικός τρόπος να παρούμε τον απλό κανόνα του τραπεζίου είναι να αντικαταστήσουμε την f με το πολυώνυμο πρώτου βαθμού Newton που παρεμβάλει την συνάρτηση στα a και b . Εστω $x_0 = a, x_1 = b, h = x_1 - x_0$ ισχύει:

$$f(x_0 + sh) = \Delta^0 f_0 + s\Delta^1 f_0 + h^2 \frac{s(s-1)}{2} f''(\xi)$$

τότε:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_0^1 \left[\Delta^0 f_0 + s\Delta^1 f_0 + h^2 \frac{s(s-1)}{2} f''(\xi) \right] hds \\
&= h \int_0^1 [f_0 + s(f_1 - f_0)] ds + \frac{h^3}{2} f''(\xi) \int_0^1 s(s-1)ds \\
&= \frac{h}{2}(f(b) + f(a)) - \frac{h^3}{12} f''(\xi).
\end{aligned}$$

Ετσι καταληξαμε στον απλό τύπο του τραπεζίου που είδαμε στην αρχή ενώ το σφάλμα είναι ίσο με:

$$E_T = -\frac{h^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

ενώ το σφάλμα του σύνθετου τύπου του τραπεζίου είναι:

$$E_T = -\frac{b-a}{12} h^2 f^{(2)}(\xi), \quad \xi \in (a, b)$$

Παράδειγμα 1: Να υπολογισθούν μέσω του τύπου του τραπεζίου τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^1 \exp(x) dx, \quad \int_0^1 \exp(x^2) dx$$

$x_0 = 0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, x_4 = 0.8, x_5 = 1$ Για το πρώτο ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &\approx h(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)) + \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_5)) \\ &= 0.2(\exp(0.2) + \exp(0.4) + \exp(0.6) + \exp(0.8)) + 0.1(\exp(0) + \exp(1)) \\ &= 1.724051 \end{aligned}$$

η πραγματική τιμή του ολοκληρώματος αυτού είναι 1.718281.

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &\approx h(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)) + \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_5)) \\ &= 0.2(\exp(0.04) + \exp(0.16) + \exp(0.36) + \exp(0.64)) + 0.1(\exp(0) + \exp(1)) \\ &= 1.480645 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2: Να υπολογισθεί ο αριθμός των υποδιαστημάτων που απαιτείται για την προσεγγίση του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 \exp(x) dx$$

με τον κανόνα του τραπεζίου και με ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων.

$$\begin{aligned} E_T &= -\frac{1}{12}h^2 \exp(x) = -\frac{1}{12} \frac{1}{n^2} \exp(x) \\ |E_T| &= \frac{1}{12n^2} \exp(x) < \frac{1}{12n^2} 2.71828 = \frac{0.226523}{n^2} \end{aligned}$$

Θέλουμε $E_T < 0.005$ άρα:

$$\frac{0.226523}{n^2} < 0.005, \quad n^2 > 45$$

1.2 Κανόννας του Simpson

Ενας ακόμα χρήσιμος τέτοιος κανόννας είναι αυτός του Simpson που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε την f με το πολυώνυμο Newton δεύτερου βαθμού που παρεμβάλλει την f στα σημεία $x_0 = a, x_1 = (a + b)/2, x_2 = b$.

$$f(x_0 + sh) = \Delta^0 f_0 + s\Delta^1 f_0 + h^2 \frac{s(s-1)}{2} \Delta^2 f_0 + h^3 \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} f^{(3)}(\xi)$$

τότε:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_0^2 \left[\Delta^0 f_0 + s\Delta^1 f_0 + \frac{s(s-1)}{2} \Delta^2 f_0 + h^3 \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} f^{(3)}(\xi) \right] h ds \\ &= h \int_0^2 \left(f_0 + s(f_1 - f_0) + \frac{s^2 - s}{2} (f_2 - 2f_1 + f_0) \right) ds + O(h^4) \\ &= h \left(f_0 [s]_0^2 + (f_1 - f_0) \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^2 + (f_2 - 2f_1 + f_0) \frac{1}{2} \left[\frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2} \right]_0^2 \right) + O(h^4) \\ &= h \left(2f_0 + 2(f_1 - f_0) + (f_2 - 2f_1 + f_0) \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} \right) \right) + O(h^4) \\ &= h \left(2f_0 + 2f_1 - 2f_0 + (f_2 - 2f_1 + f_0) \frac{1}{3} \right) + O(h^4) \\ &= h \frac{1}{3} (6f_1 + f_2 - 2f_1 + f_0) + O(h^4) \\ &= \frac{h}{3} (f_2 + 4f_1 + f_0) + O(h^4) \end{aligned}$$

Έτσι ο απλός τύπος του Simpson είναι:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right),$$

ενώ το σφάλμα είναι ίσο με

$$E_S = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

ενώ το σφάλμα του σύνθετου τύπου του Simpson είναι:

$$E_S = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b)$$

Από τον απλό τύπο μπορούμε να πάρουμε τον σύνθετο παίρνοντας ανά δύο τα διαστήματα $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots$.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \int_{x_4}^{x_6} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx \\ &\approx \frac{h}{3}(f_2 + 4f_1 + f_0) + \frac{h}{3}(f_4 + 4f_3 + f_2) + \frac{h}{3}(f_6 + 4f_5 + f_4) + \dots \\ &\quad + \frac{h}{3}(f_n + 4f_{n-1} + f_{n-2}) \\ &= \frac{h}{3}(f_0 + f_n + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{n-2}))\end{aligned}$$

1.3 Κανόννας 3/8

Αν αντικαταστήσουμε την f με το πολυώνυμο Newton τρίτου βαθμού που παρεμβάλει την f στα σημεία $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, x_3 = x_0 + 3h$

$$f(x_0 + sh) = \Delta^0 f_0 + s\Delta^1 f_0 + h^2 \frac{s(s-1)}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} \Delta^3 f_0$$

$$\begin{aligned}f(x_0 + sh) &= f_0 + s(f_1 - f_0) + \frac{s(s-1)}{2} \Delta^2(f_2 - 2f_1 + f_0) \\ &\quad + \frac{s(s-1)(s-2)}{6} (f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0)\end{aligned}$$

τότε:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx &= \int_0^3 \left(f_0 + s(f_1 - f_0) + \frac{s(s-1)}{2} \Delta^2(f_2 - 2f_1 + f_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{s(s-1)(s-2)}{6} (f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0) \right) h ds \\ &= \frac{3}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)\end{aligned}$$

Αν αντικαταστήσουμε την f με το πολυώνυμο Newton 4ου βαθμού που παρεμβάλει την f στα σημεία $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, x_3 = x_0 + 3h, x_4 = x_0 + 4h$

$$f(x_0 + sh) = \Delta^0 f_0 + s\Delta^1 f_0 + h^2 \frac{s(s-1)}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \binom{s}{4} \Delta^4 f_0$$

ή

$$\begin{aligned} f(x_0 + sh) &= \Delta^0 f_0 + s\Delta^1 f_0 + h^2 \frac{s(s-1)}{2} \Delta^2 f_0 \\ &\quad + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{4!} \Delta^4 f_0 \end{aligned}$$

παίρνουμε τον τύπο

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_4} f(x) dx &= h \int_0^4 p_4(s) ds \\ &= \frac{1}{45} (14f_0 + 64f_1 + 8f_2 + 64f_3 + 14f_4) \end{aligned}$$