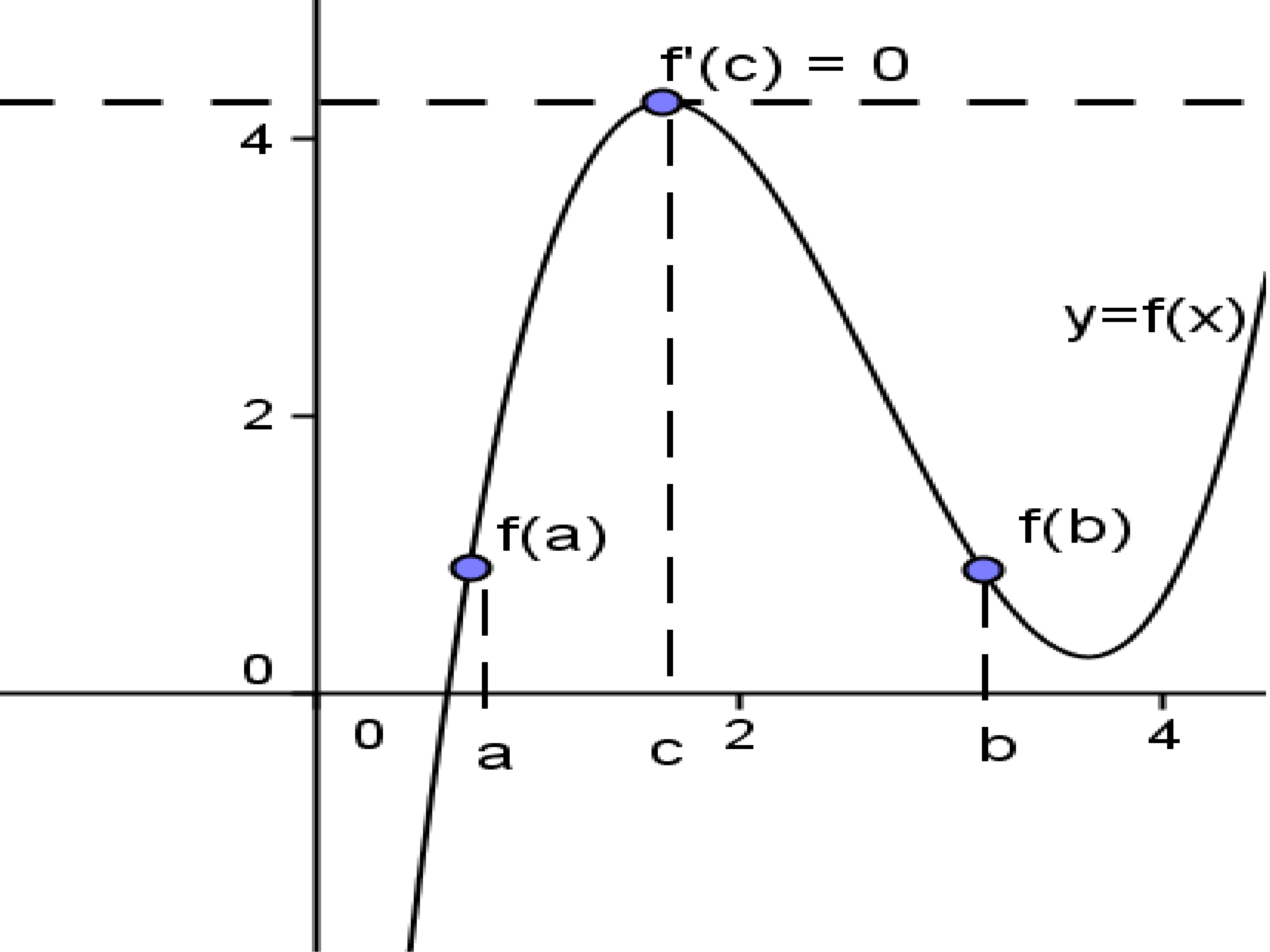
Μαθηματικά 11

Θεώρημα Μέσης Τιμής – Μονοτονία Συνάρτησης

Θεώρημα του Rolle: Θεωρούμε μια συνάρτηση f συνεχή στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (a,b). Εάν $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει c στο διάστημα (a,b) τέτοιο ώστε $f^{'}(c) = 0$.

Η παράγωγος αποτελεί εφαπτομένη της συνάρτησης f, δηλαδή δείχνει την κλίση της συνάρτησης, η οποία όταν πάρει την τιμή μηδέν σε συγκεκριμένο σημείο παριστάνεται με παράλληλη ευθεία προς τον άξονα x

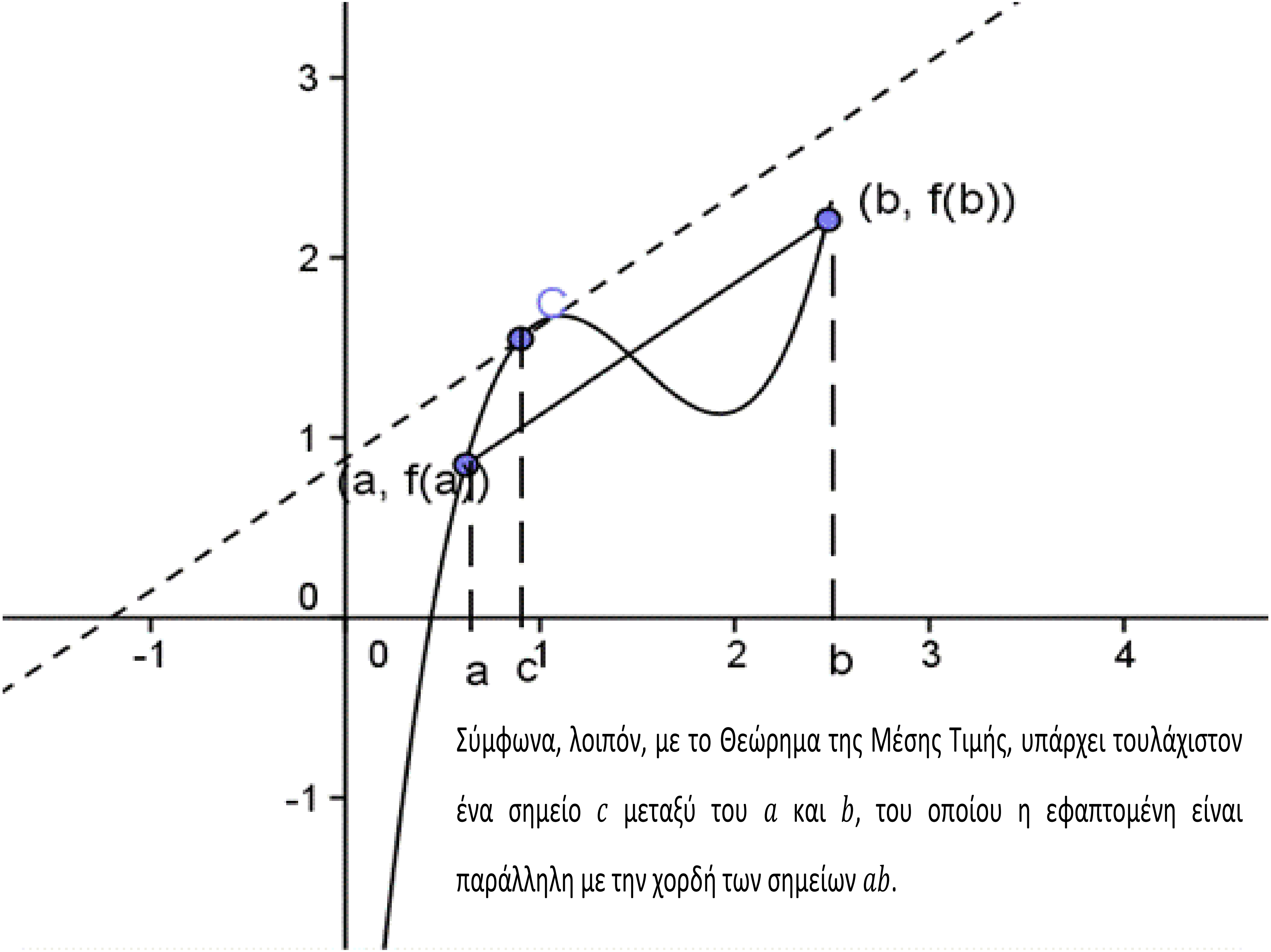


f'(c) = 0
4
2
0
y=f(x)
f(a)
f(b)
0
a
c
2
b
4

Θεώρημα Μέσης Τιμής: Εάν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (a, b), τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $x = c$ στο διάστημα (a, b) για το οποίο να ισχύει:

$$f^{'}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Η $f^{'}(c)$ είναι η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο c, ενώ η $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ είναι η κλίση (εφαπτομένη) της χορδής που ενώνει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$



Σύμφωνα, λοιπόν, με το Θεώρημα της Μέσης Τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο c μεταξύ του a και b, του οποίου η εφαπτομένη είναι παράλληλη με την χορδή των σημείων ab.

Υποθέτοντας ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα Δ και με βάση το Θεώρημα Μέσης Τιμής, προκύπτουν τα ακόλουθα πορίσματα:

- $f^{'}(x) = 0$ σε κάθε σημείο στο διάστημα Δ, εάν και μόνο αν η συνάρτηση f είναι σταθερή στο Δ.

- Εάν $f^{'}(x) = g^{'}(x)$ για κάθε x (σημείο) στο διάστημα Δ, τότε η συναρτήσεις f και g διαφέρουν το πολύ κατά μια σταθερά c, δηλαδή $f(x) = g(x) + c$, $c \in \mathcal{R}$, για κάθε $x \in \Delta$.

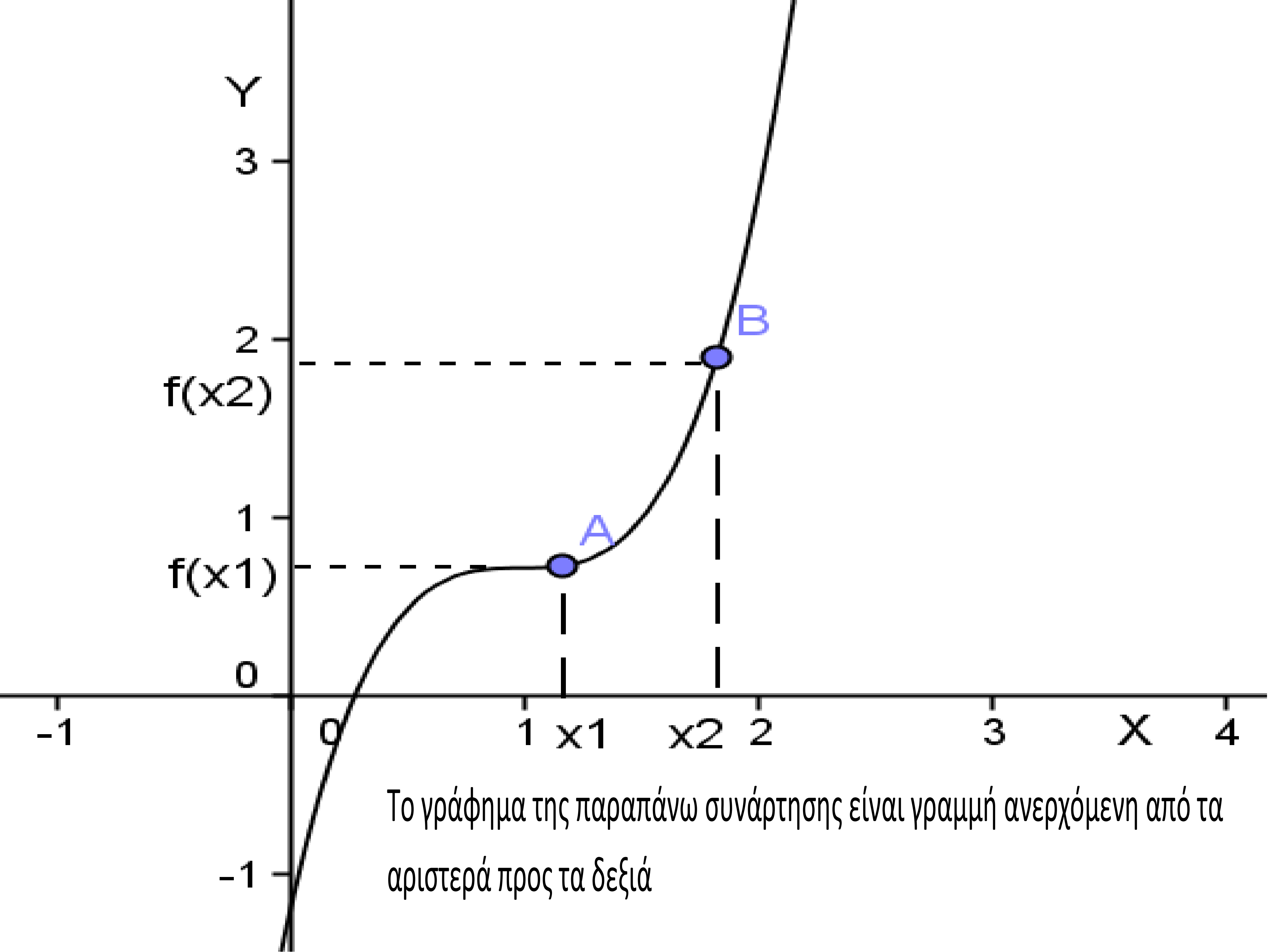
- Εάν $f^{'}(x) > 0$ για κάθε x (σημείο) στο διάστημα Δ, τότε η f είναι αύξουσα στο διάστημα Δ.

- Εάν $f^{'}(x) < 0$ για κάθε x (σημείο) στο διάστημα Δ, τότε η f είναι φθίνουσα στο διάστημα Δ.

Ορισμός 1: Μια συνάρτηση f ορίζεται *γνησίως αύξουσα* σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της εάν για κάθε x_1, x_2 του εν λόγω διαστήματος ισχύει:

- $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) < f(x_2)$

Το γράφημα της παραπάνω συνάρτησης είναι γραμμή ανερχόμενη από τα αριστερά προς τα δεξιά

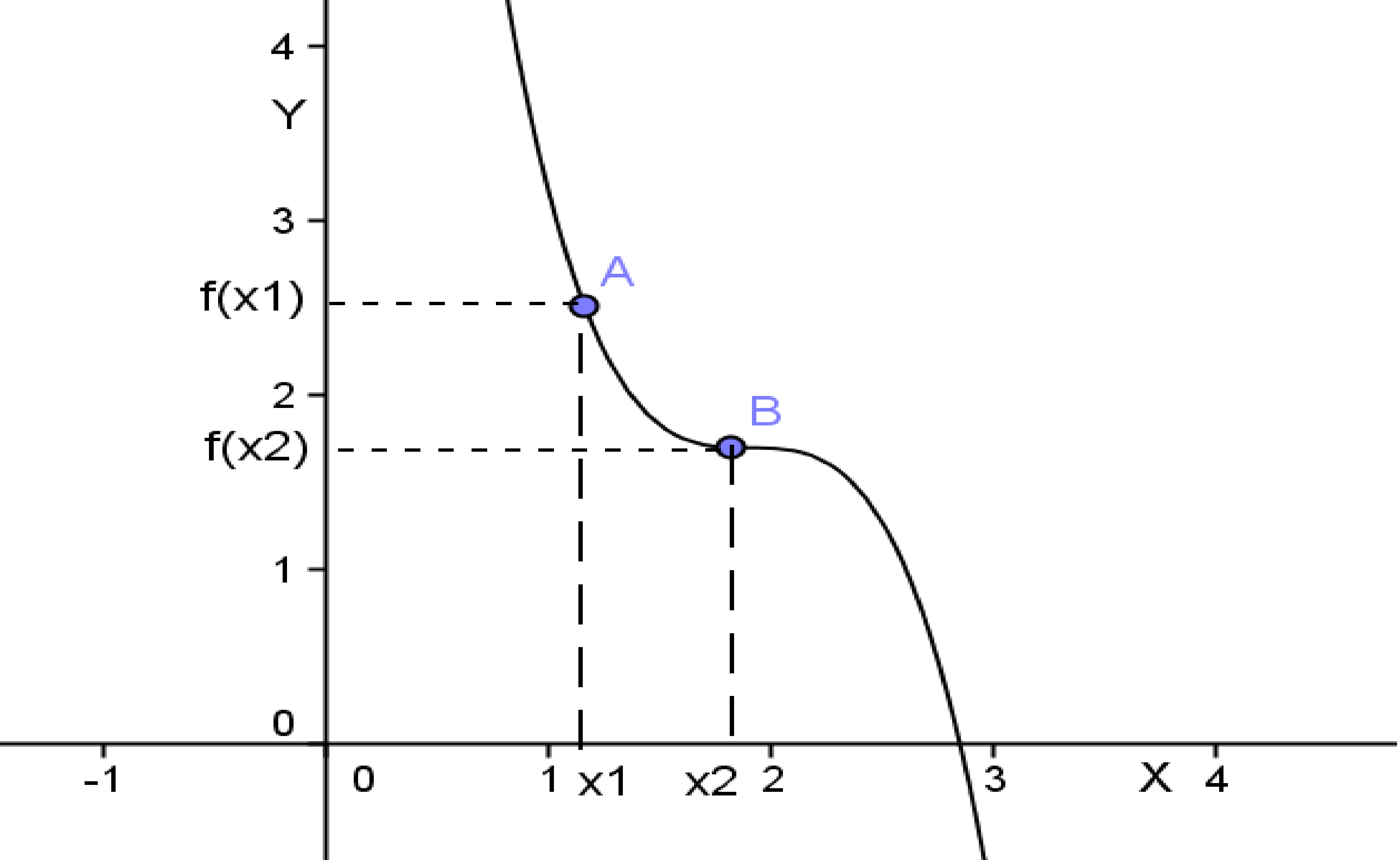


Το γράφημα της παραπάνω συνάρτησης είναι γραμμή ανερχόμενη από τα αριστερά προς τα δεξιά

Ορισμός 2: Μια συνάρτηση f ορίζεται *γνησίως φθίνουσα* σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της εάν για κάθε x_1, x_2 του εν λόγω διαστήματος ισχύει:

- $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) > f(x_2)$

Το γράφημα της παραπάνω συνάρτησης είναι γραμμή κατερχόμενη από τα αριστερά προς τα δεξιά



Το γράφημα της παραπάνω συνάρτησης είναι γραμμή κατερχόμενη από τα αριστερά προς τα δεξιά

Ορισμός 3: Μια συνάρτηση f ορίζεται *αύξουσα* σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της εάν για κάθε x_1, x_2 του εν λόγω διαστήματος ισχύει:

- $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) \leq f(x_2)$

Ορισμός 4: Μια συνάρτηση f ορίζεται *φθίνουσα* σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της εάν για κάθε x_1, x_2 του εν λόγω διαστήματος ισχύει:

- $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) \geq f(x_2)$

Ορισμός 5: Μια συνάρτηση f ορίζεται *σταθερή* σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της εάν για κάθε x_1, x_2 του εν λόγω διαστήματος ισχύει:

- $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$

Ορισμός 6: Μια συνάρτηση f ορίζεται *γνησίως μονότονη* σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της όταν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα, αντίστοιχα ονομάζεται μονότονη όταν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

Θεώρημα: Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $A = [a, b]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, b), τότε

- αν $f^{'}(x) > 0$ για κάθε σημείο του διαστήματος (a, b), η συνάρτηση είναι *γνησίως αύξουσα* στο εν λόγω διάστημα.

- αν $f^{'}(x) \geq 0$ για κάθε σημείο του διαστήματος (a, b), η συνάρτηση είναι *αύξουσα* στο εν λόγω διάστημα.

- αν $f'(x) < 0$ για κάθε σημείο του διαστήματος (a, b), η συνάρτηση είναι *γνησίως φθίνουσα* στο εν λόγω διάστημα.

- αν $f^{'}(x) \leq 0$ για κάθε σημείο του διαστήματος (a, b), η συνάρτηση είναι *φθίνουσα* στο εν λόγω διάστημα.

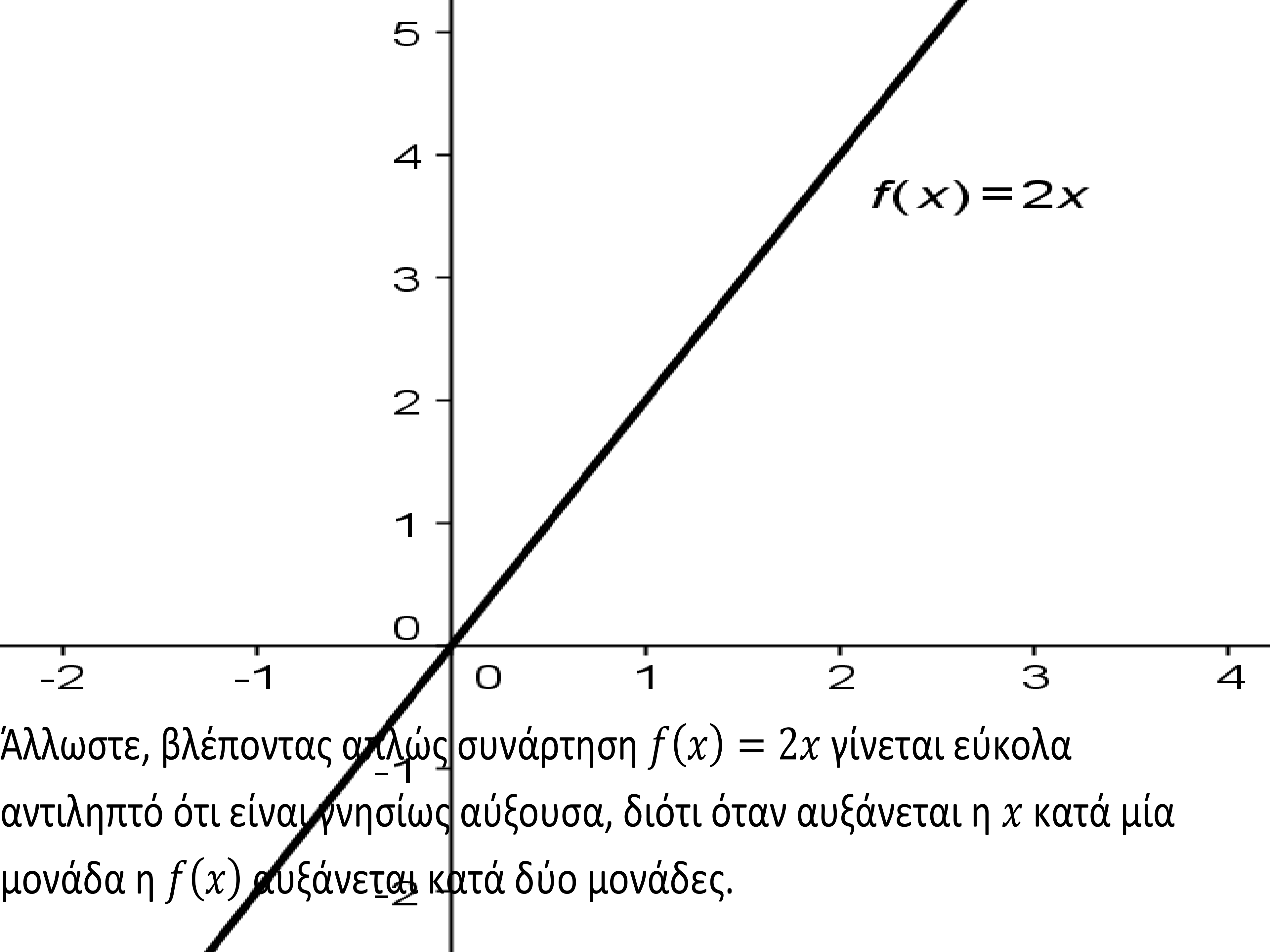
- αν $f^{'}(x) = 0$ για κάθε σημείο του διαστήματος (a, b), η συνάρτηση είναι *σταθερή* στο εν λόγω διάστημα.

Σημειώνεται ότι το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, αν διαπιστώσουμε μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση f αυτό δεν σημαίνει ότι η παράγωγος συνάρτηση θα είναι υποχρεωτικά μεγαλύτερη του μηδενός, δηλαδή $f^{'}(x) > 0$.

Λύση: Η συνάρτηση f, ως πολυωνυμική, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathcal{R}$. Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f είναι:

$$f'(x) = (2x)' = 2 > 0$$

η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ↑. Στο παρακάτω γράφημα της συνάρτησης φαίνεται ότι η συνάρτηση είναι αύξουσα, καθώς η γραμμή της συνάρτησης είναι ανοδική από τα αριστερά προς τα δεξιά



Άλλωστε, βλέποντας απλώς συνάρτηση $f(x) = 2x$ γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι είναι γνησίως αύξουσα, διότι όταν αυξάνεται η x κατά μία μονάδα η $f(x)$ αυξάνεται κατά δύο μονάδες.

Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση

$$f(x) = -x^2 + 2x$$

Λύση: Η συνάρτηση f, ως πολυωνυμική, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathcal{R}$. Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f είναι:

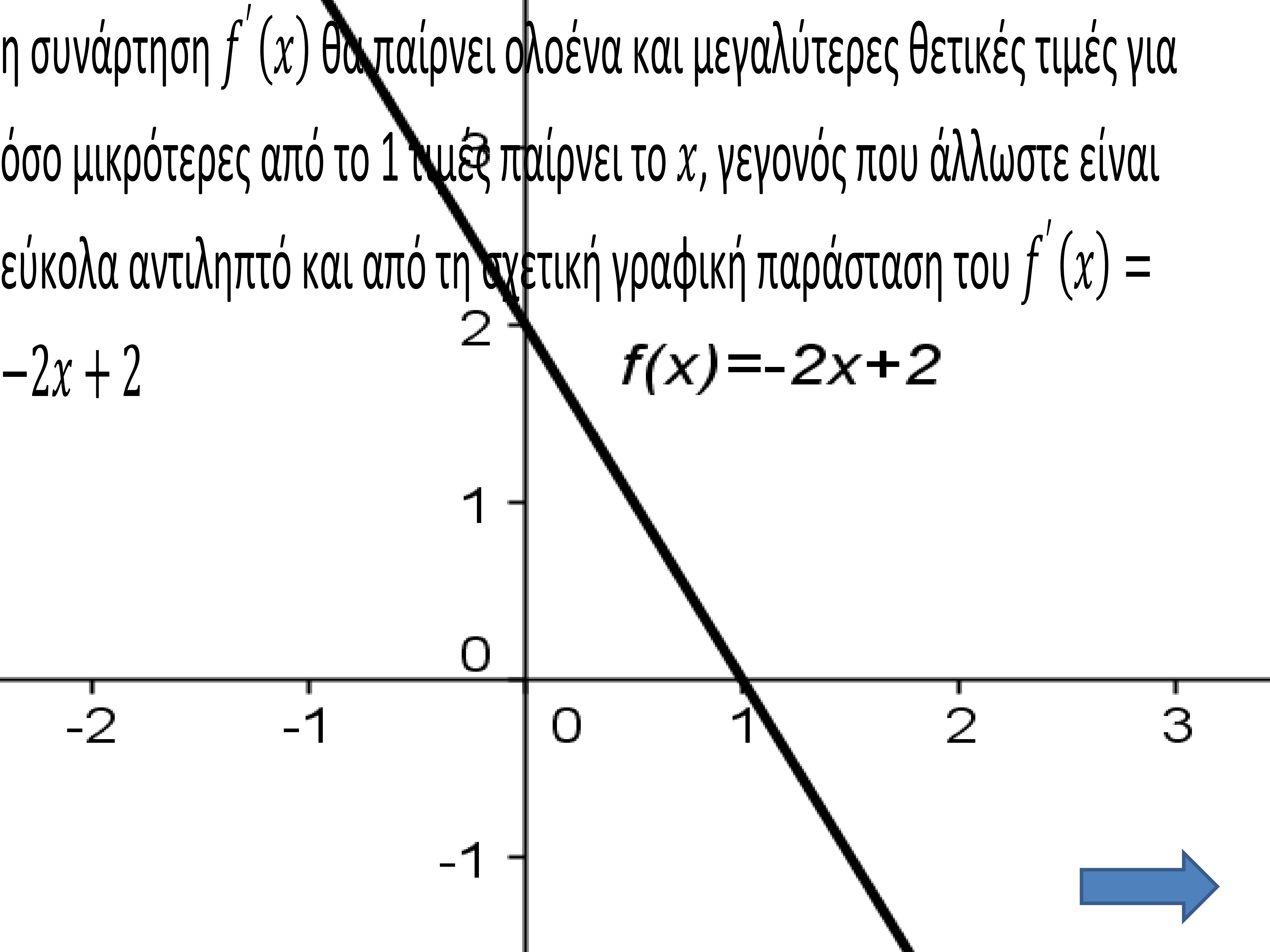
$$f^{'}(x) = (-x^2 + 2x)^{'} = -2x + 2$$

$$f^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 2 = 0 \Leftrightarrow -2x = -2 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} = \frac{-2}{-2} \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$ $\qquad$ 1 $\qquad$ $+\infty$	
f'	+	-
f	↗	↘

Στον πίνακα προσήμων ξεκινάμε με το πρόσημο $+$ διότι το πρόσημο του x στην εξίσωση $-2x+2=0$ είναι αρνητικό και επομένως το αποτέλεσμα για τιμές μικρότερες του 1 θα είναι θετικό, ενώ για τιμές μεγαλύτερες του 1 θα είναι αντίστοιχα αρνητικό. Π.χ. για $x=-1$ η εξίσωση $f'(x)$ θα δώσει αποτέλεσμα $-2\cdot(-1)+2=4>0$, ενώ για $x=-2$ θα δώσει $-2\cdot(-2)+2=6>0$.

η συνάρτηση $f'(x)$ θα παίρνει ολοένα και μεγαλύτερες θετικές τιμές για όσο μικρότερες από το 1 τιμές παίρνει το x, γεγονός που άλλωστε είναι εύκολα αντιληπτό και από τη σχετική γραφική παράσταση του $f'(x) = -2x + 2$

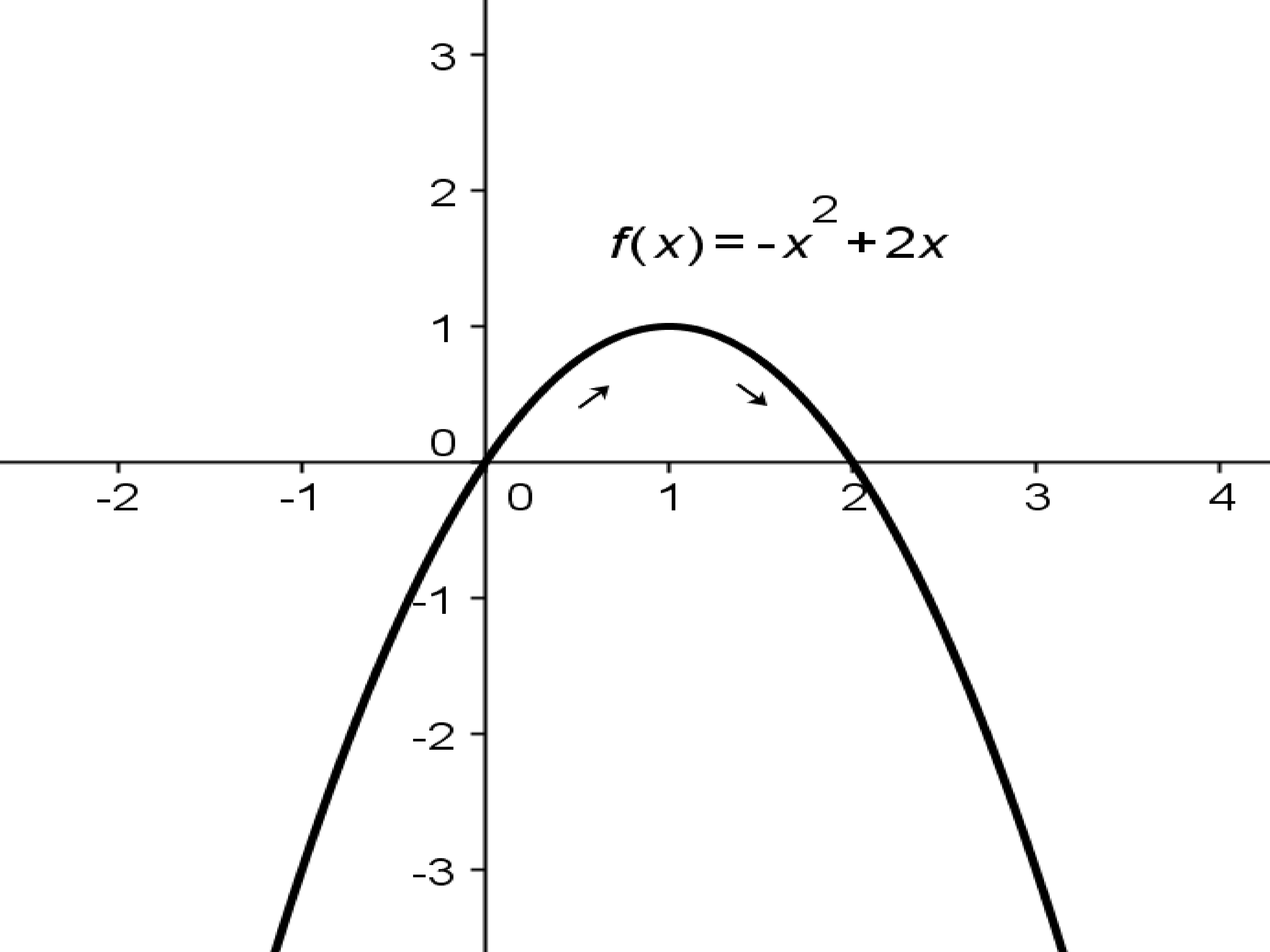


x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$+$		$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$

η μονοτονία της συνάρτησης είναι:

- γνησίως αύξουσα από $(-\infty, 1)$, καθώς η καμπύλη της συνάρτησης είναι ανερχόμενη από τα αριστερά προς τα δεξιά, και

- γνησίως φθίνουσα από $(1, +\infty)$, καθώς η καμπύλη της συνάρτησης είναι κατερχόμενη από τα δεξιά προς τα αριστερά.



$f(x) = -x^2 + 2x$
3
2
1
0
-1
-2
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση

$$f(x) = 4x^3 - x^2 - x + 1$$

Λύση: Η συνάρτηση f, ως πολυωνυμική, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathcal{R}$. Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f είναι:

$$f^{'}(x) = 12x^2 - x - 1$$

$$f^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - x - 1 = 0$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης $12x^2 - 2x - 1 = 0$ είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-1) = 52$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{2a} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{52}}{2 \cdot 12} \Leftrightarrow$$

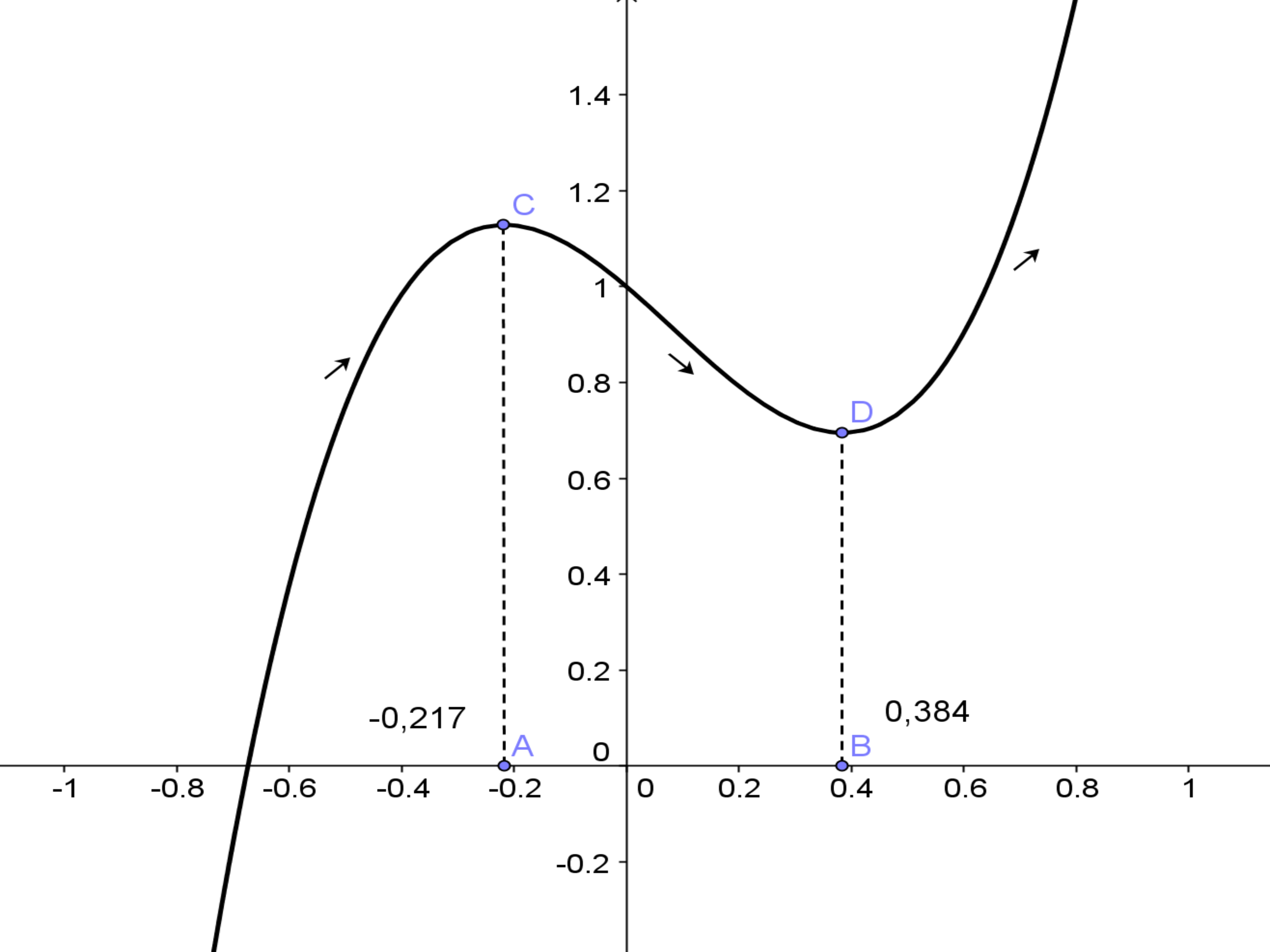
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-(-2) + \sqrt{52}}{24} \\ x_2 = \dfrac{-(-2) - \sqrt{52}}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2 + \sqrt{52}}{24} \\ x_2 = \dfrac{2 - \sqrt{52}}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0{,}384 \\ x_2 = -0{,}217 \end{cases}$$

Στον παρακάτω πίνακα προσήμων ξεκινάμε με το πρόσημο $+$ διότι το πρόσημο του μεγιστοβάθμιου όρου $(12x^2)$ στην εξίσωση $12x^2 - 2x - 1 = 0$ είναι θετικό.

x	$-\infty$ $\quad -0{,}217$	$0{,}384$	$+\infty$
f'	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

η μονοτονία της συνάρτησης είναι:

- γνησίως αύξουσα από $(-\infty, -0{,}217)$, καθώς η καμπύλη της συνάρτησης είναι ανερχόμενη από τα αριστερά προς τα δεξιά,
- γνησίως φθίνουσα από $(-0{,}217, 0{,}384)$, καθώς η καμπύλη της συνάρτησης είναι κατερχόμενη από τα δεξιά προς τα αριστερά και
- γνησίως αύξουσα από $(0{,}384, +\infty)$, καθώς η καμπύλη της συνάρτησης είναι πάλι ανοδική από τα δεξιά προς τα αριστερά.


C
D
A
B
-0,217
0,384
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

Λύση: Επειδή το υπόριζο θα πρέπει να είναι θετικό:

$$4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2 - x)(2 + x) \geq 0,$$

οι ρίζες της εξίσωσης $(2 - x)(2 + x) = 0$ είναι $\begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$\sqrt{4 - x^2}$	$-$	$+$	$-$	

το παρακάτω πίνακα ξεκινάμε με το πρόσημο – του μεγιστοβάθμιου όρου $-x^2$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο A. Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f είναι:

$$f'(x) = \left(\sqrt{4-x^2}\right)' = \overbrace{\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}(4-x^2)'}^{\substack{\textit{Σύνθετη συνάρτηση}\\ (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'}} =$$

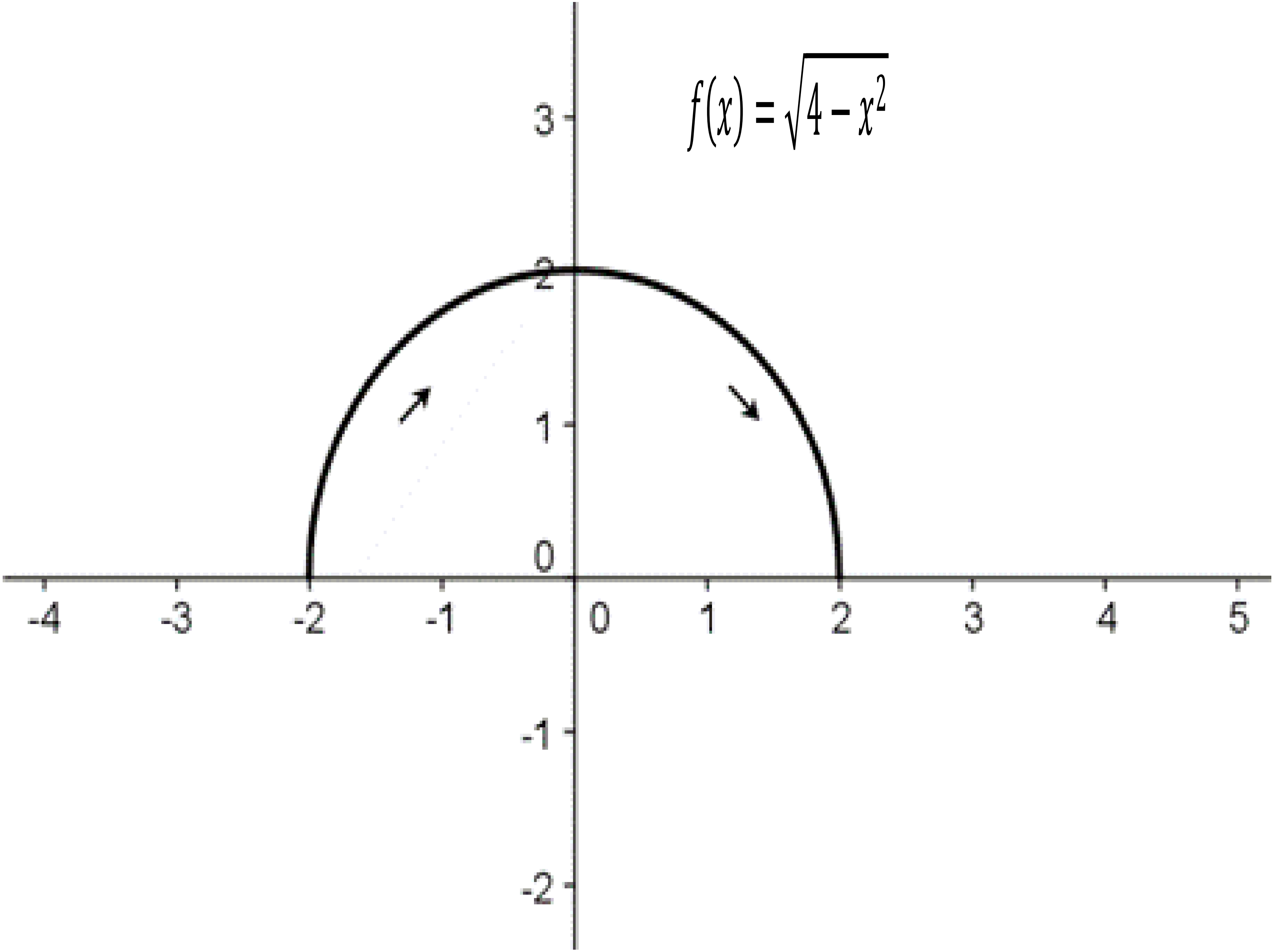
$$= \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \quad -\underbrace{\overbrace{\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = 0}^{\substack{\textit{αρκεί ο αριθμητής να είναι}\\ \textit{μηδέν}}}}_{\substack{\textit{σημειώνεται ότι η x είναι συνεχής}\\ \textit{στο ανοικτό διάστημα } (-2,\ 2)\\ \textit{συνεπώς στο διάστημα αυτό}\\ \textit{δεν υπάρχει απροσδιοριστία.}}} \quad \Rightarrow -x = 0$$

x	-2	0	2
f'	$+$		$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$

η μονοτονία της συνάρτησης είναι:

- γνησίως αύξουσα από $(-2, 0)$, καθώς η καμπύλη της συνάρτησης είναι ανερχόμενη από τα αριστερά προς τα δεξιά, και
- γνησίως φθίνουσα από $(0, 2)$, καθώς η καμπύλη της συνάρτησης είναι κατερχόμενη από τα δεξιά προς τα αριστερά.



$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
3
2
1
0
-1
-2
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + x$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = \mathcal{R} - \{1\}$, καθώς ο παρονομαστής θα πρέπει να είναι διάφορος του μηδενός, δηλαδή $x \neq 1$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο A. Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης είναι:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x-1} + x\right)' = \left((x-1)^{-1} + x\right)' = \overbrace{\left((x-1)^{-1}\right)' + x'}^{\Pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\gamma o\varsigma\ \ \alpha\theta\rho o\acute{\iota}\sigma\mu\alpha\tau o\varsigma} =$$

$$\overbrace{= -1 \cdot (x-1)^{-1-1} \cdot (x-1)' + 1 =}^{\substack{\Pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\gamma o\varsigma\ \ \sigma\acute{\upsilon}\nu\theta\varepsilon\tau\eta\varsigma\ \ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\varsigma \\ (u^{-1})' = -1u^{-1-1} * u'}}$$

$$= -(x-1)^{-2} \cdot 1 + 1 = -\frac{1}{(x-1)^2} + 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{(x-1)^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{(x-1)^2} = -1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{(x-1)^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1 + x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων

- Για την εύρεση του προσήμου πολυωνυμικής συνάρτησης εκτελούμε τα ακολουθούμε:
- Τοποθετούμε τις ρίζες της παραγώγους στον άξονα (ή και σημεία στα οποία η παραγωγός δεν υπάρχει π.χ. σημεία που εξαιρούνται από το πεδίο ορισμού επειδή μηδενίζουν τον παρονομαστή μιας συνάρτησης).
- Ξεκινάμε με το πρόσημο του μεγιστοβάθμιου όρου.
- Αν υπάρχουν διπλές ρίζες το πρόσημο δεν εναλλάσσεται.
- *Επιπλέον των ριζών 0 και 2 συμπεριλαμβάνεται και το 1, καθώς στο σημείο αυτό η συνάρτηση δεν ορίζεται.*

Επιπλέον των ριζών 0 και 2 συμπεριλαμβάνεται και το 1, καθώς στο σημείο αυτό η συνάρτηση δεν ορίζεται.

x	$-\infty$ 0	1		2 $+\infty$
f'	+	-	-	+
f	↗	↘	↘	↗

- *Αρχίζουμε με το πρόσημο του μεγιστοβάθμιου όρου (+) και εναλλάσσουμε τα πρόσημα.*
- *Στην μονάδα το πρόσημο αριστερά και δεξιά δεν αλλάζει, διότι η παράγωγος έχει στον παρονομαστή τη ρίζα στο τετράγωνο $(x-1)^2$.*

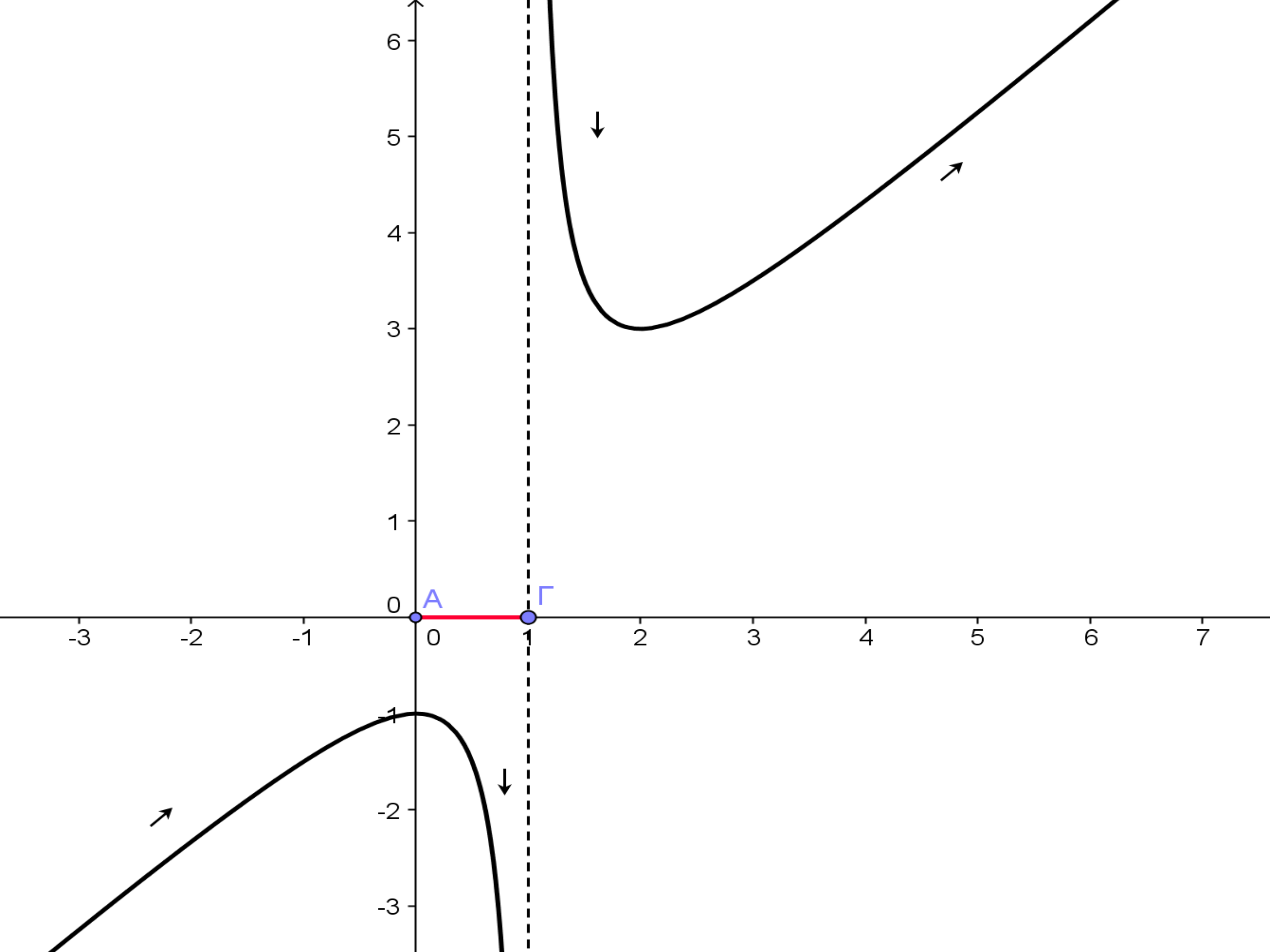
η μονοτονία της συνάρτησης είναι:

- γνησίως αύξουσα από $(-\infty, 0)$, καθώς η καμπύλη της συνάρτησης είναι ανερχόμενη από τα αριστερά προς τα δεξιά,

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
f'	$+$	$-$	$-$	$+$	
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

- γνησίως φθίνουσα από $(0,2)$, καθώς η καμπύλη της συνάρτησης είναι κατερχόμενη από τα δεξιά προς τα αριστερά (δεν περιλαμβάνεται η μονάδα όπως φαίνεται και από το Σχήμα και

- γνησίως αύξουσα από $(2,+\infty)$, καθώς η καμπύλη της συνάρτησης είναι πάλι ανοδική από τα δεξιά προς τα αριστερά.



A
Γ

Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση

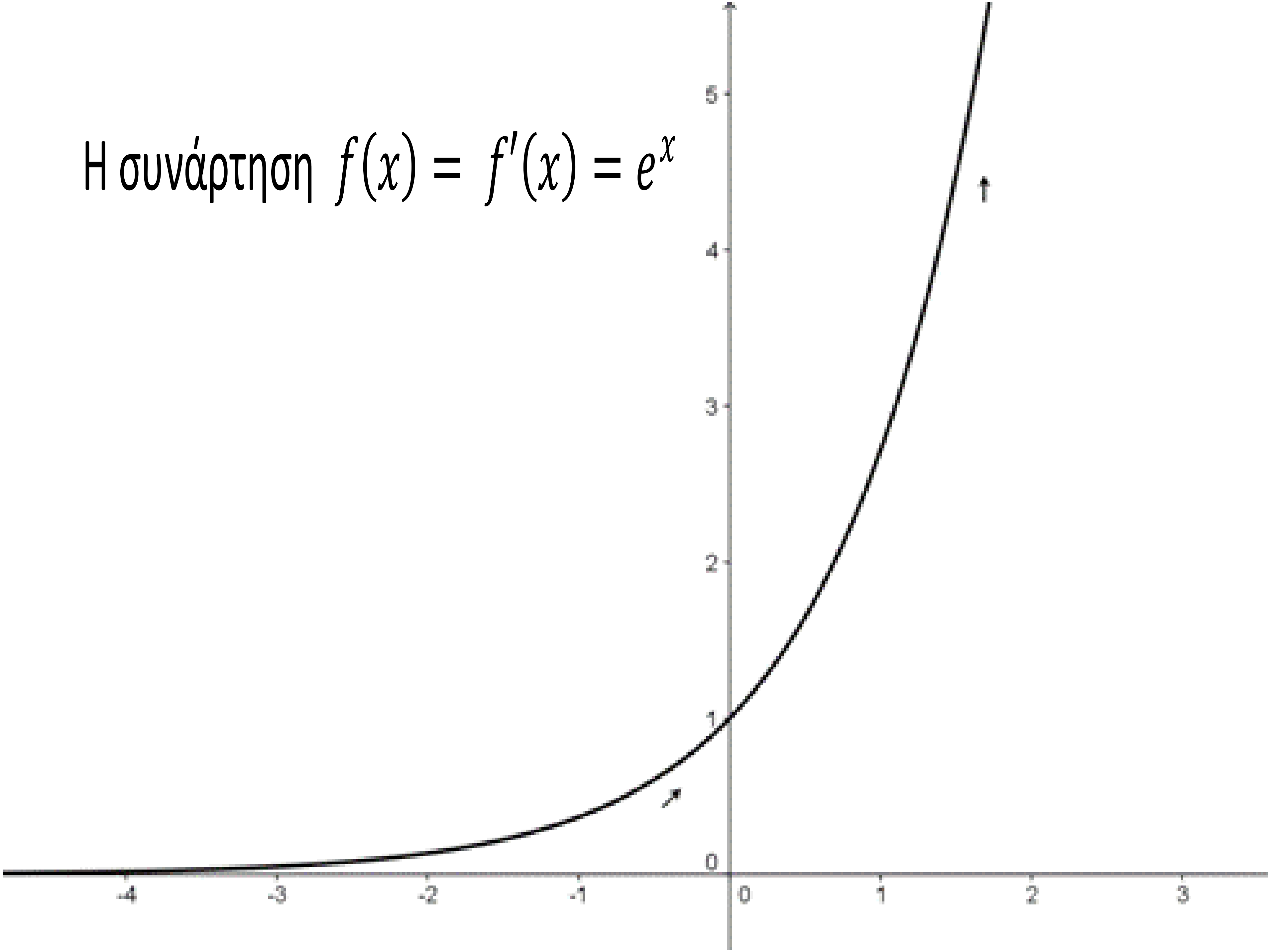
$$f(x) = e^x$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το όλο το $\mathcal{R}$. Η συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathcal{R}$. Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης είναι:

$$f^{'}(x) = (e^{x})^{'} = e^{x} > 0$$

Η παράγωγος συνάρτηση $f^{'}(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, καθώς η συνάρτηση $f^{'}(x) = e^{x}$ είναι μεγαλύτερη του μηδενός για κάθε $x \in \mathcal{R}$. Στο Σχήμα διαπιστώνεται εύκολα η μονοτονία της συνάρτησης, καθώς η καμπύλη της είναι ανερχόμενη από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Η συνάρτηση $f(x) = f'(x) = e^x$



Να βρεθεί με τη χρήση των παραγώγων η μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = x^4 - 2x^2$

Να βρεθεί η μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = x^4 - 2x^2$

Το πεδίο ορισμού είναι όλο το R. Η συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

$$f'(x) = (x^4 - 2x^2)' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Για την εύρεση του προσήμου πολυωνυμικής συνάρτησης εκτελούμε τα ακολουθούμε:

- Τοποθετούμε τις ρίζες της παραγώγους στον άξονα (ή και σημεία στα οποία η παραγωγός δεν υπάρχει π.χ. σημεία που εξαιρούνται από το πεδίο ορισμού επειδή μηδενίζουν τον παρονομαστή μιας συνάρτησης).
- Ξεκινάμε με το πρόσημο του μεγιστοβάθμιου όρου **από δεξιά.**
- Αν υπάρχουν διπλές ρίζες το πρόσημο δεν εναλλάσσεται.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		-		+		-		+	
f		↘		↗		↘		↗	

Αρχίζουμε ***από δεξιά*** *με το πρόσημο του μεγιστοβάθμιου όρου (+) και εναλλάσσουμε τα πρόσημα.*

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	-	-	+	+	
x^2-1	+	-	-	+	
	-	+	-	+	
f	↘	↗	↘	↗	

Στην πρωτοβάθμια εξίσωση αρχίζουμε με το αντίθετο πρόσημο του x.

Στην Δευτεροβάθμια αρχίζουμε με το πρόσημο του μεγιστοβάθμιου όρου (+) και εναλλάσσουμε τα πρόσημα.

Να βρεθεί η μονοτονία της συνάρτησης

$$f(x) = 2x^5 - 5x^2 + 1$$

Να βρεθεί η μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = 2x^5 - 5x^2 + 1$

- *Το πεδίο ορισμού είναι όλο το R. Η συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.*
- $f'(x) = (2x^5 - 5x^2 + 1)' = 10x^4 - 10x = 10x(x^3 - 1) \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

x	-∞	0	1	+∞
f'	+	-	+	
f	↗	↘	↗	

Να βρεθεί η μονοτονία της συνάρτησης

$$f(x) = 2x^5 - 5x^2 + 1$$

- *Το πεδίο ορισμού είναι όλο το R. Η συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.*
- $f'(x) = (2x^5 - 5x^2 + 1)' = 10x^4 - 10x = 10x(x^3 - 1) \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

x	-∞	0	1	+∞
x	-	+	+	
$x^3 - 1$	-	-	+	
$x(x^3 - 1)$	+	-	+	
f	↗	↘	↗	