



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών

Μαθηματική Ανάλυση II

Ενότητα 5: Αλυσιδωτή παραγωγή, διαφορίσιμες
συναρτήσεις, διαφορικό

Επίκουρος Καθηγητής Θ. Ζυγκιρίδης

e-mail: tzygiridis@uowm.gr

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ψηφιακά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Περιεχόμενα

- Αλυσιδωτή παραγωγή.
- Διαφορίσιμες συναρτήσεις.
- Διαφορικό συνάρτησης πολλών μεταβλητών.
- Γραμμική προσέγγιση συνάρτησης.



Στόχοι

Μετά την ολοκλήρωση της ενότητας, οι φοιτητές:

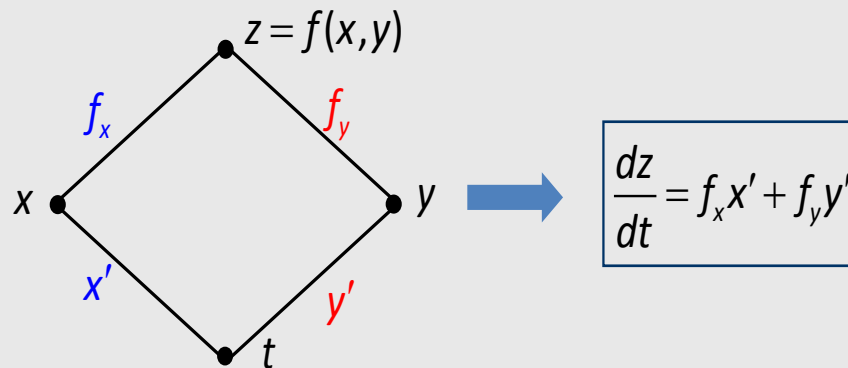
- Θα είναι σε θέση να εφαρμόσουν αλυσιδωτή παραγωγή για ένα μεγάλο εύρος περιπτώσεων,
- Θα έχουν κατανοήσει την έννοια και τη γεωμετρική ερμηνεία του διαφορικού,
- Θα μπορούν να προσδιορίσουν γραμμικές προσεγγίσεις συναρτήσεων.



$z = f(x,y), x = x(t), y = y(t) \quad (1/2)$

Αν μια συνάρτηση $z = f(x,y)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους f_x, f_y στο ανοιχτό σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και οι συναρτήσεις $x(t), y(t)$ είναι συνεχείς στο διάστημα $[t_1, t_2]$, τότε η $f(x(t), y(t))$ είναι **παραγωγίσιμη ως προς t** στο $[t_1, t_2]$ και ισχύει

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$



$z = f(x, y), x = x(t), y = y(t) \quad (2/2)$

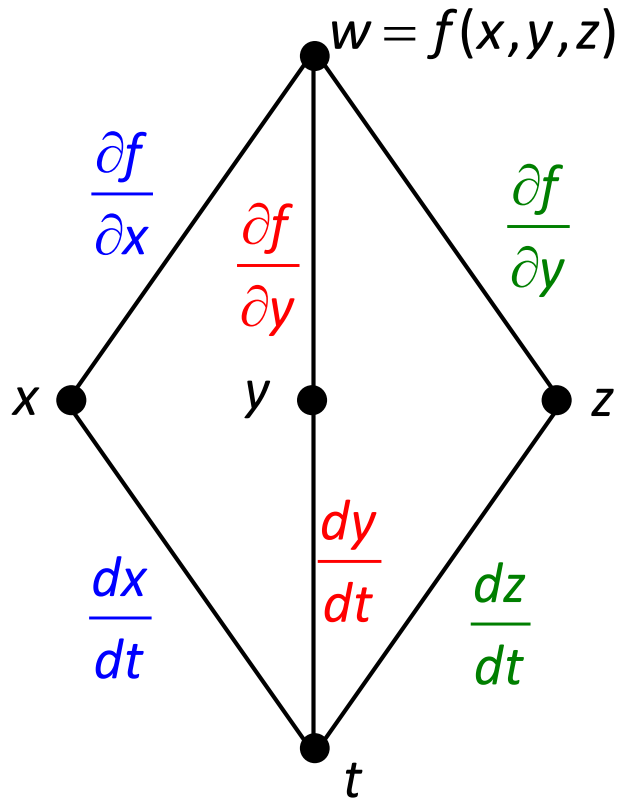
- **Εφαρμογή:**

- Αν οι συναρτήσεις $f(x, y), x(t), y(t)$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες, να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος της f ως προς t .

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dt^2} &= f_{xx} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2f_{xy} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + f_{yy} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + f_x \frac{d^2 x}{dt^2} + f_y \frac{d^2 y}{dt^2} \\ &= \left(f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} \right)^{(2)} + f_x \frac{d^2 x}{dt^2} + f_y \frac{d^2 y}{dt^2} \end{aligned}$$



$$w = f(x, y, z), \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$



$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

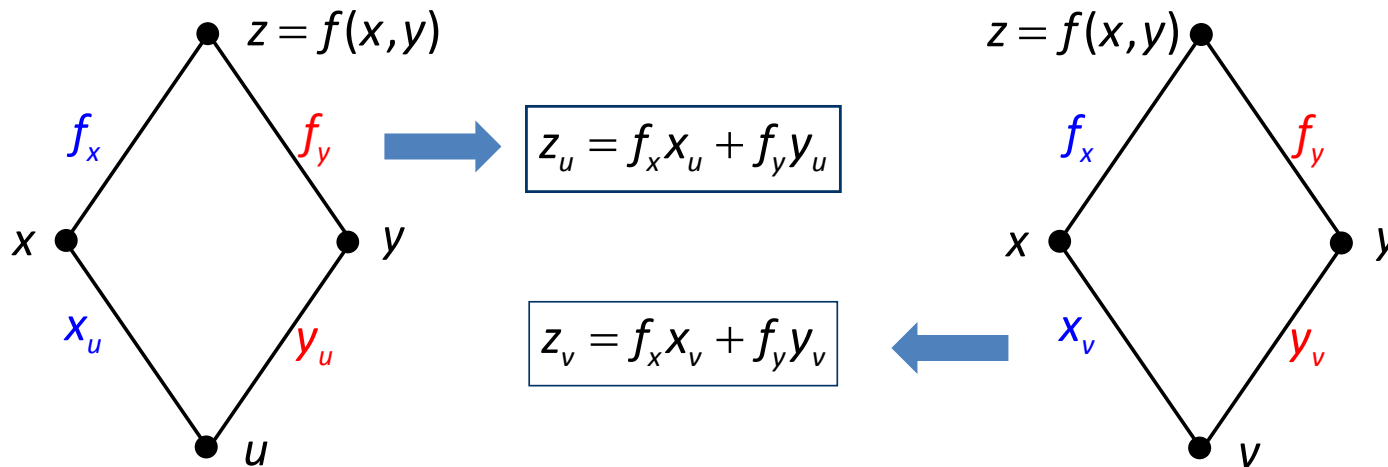
$$\frac{d^2w}{dt^2} = \left(f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} + f_z \frac{dz}{dt} \right)^{(2)} + f_x \frac{d^2x}{dt^2} + f_y \frac{d^2y}{dt^2} + f_z \frac{d^2z}{dt^2}$$



$z = f(x, y), x = x(u, v), y = y(u, v)$ (1/2)

- Αν η συνάρτηση $f(x, y)$ έχει συνεχείς παραγώγους f_x, f_y και οι συναρτήσεις $x(u, v), y(u, v)$ έχουν συνεχείς παραγώγους x_u, x_v, y_u, y_v , τότε είναι:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$



$z = f(x, y), x = x(u, v), y = y(u, v) \quad (2/2)$

- **Εφαρμογή:**

- Αν οι συναρτήσεις $z = f(x, y), x(u, v), y(u, v)$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες, να βρεθούν οι δεύτερες παράγωγοι της z .

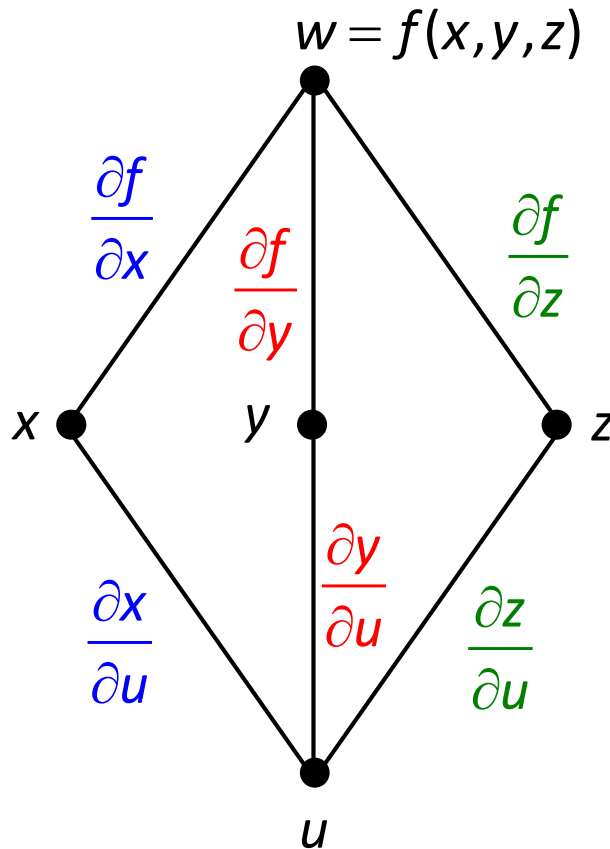
$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \left(f_x \frac{\partial x}{\partial u} + f_y \frac{\partial y}{\partial u} \right)^{(2)} + f_x \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + f_y \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \left(f_x \frac{\partial x}{\partial v} + f_y \frac{\partial y}{\partial v} \right)^{(2)} + f_x \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + f_y \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = f_{xx} x_u x_v + f_{yy} y_u y_v + f_{xy} (x_u y_v + x_v y_u) + f_x x_{uv} + f_y y_{uv}$$



$$w = f(x, y, z), \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$



$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}$$



Διαφορίσιμες συναρτήσεις (1/2)

Μια συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ καλείται **διαφορίσιμη** στο σημείο $(x_0, y_0) \in A$, αν ισχύει

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

με το $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ να ανήκει σε περιοχή του (x_0, y_0) , όπου τα A, B **δεν εξαρτώνται** από τα $\Delta x, \Delta y$, ενώ τα $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ **εξαρτώνται** από τα $\Delta x, \Delta y$ με $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ όταν $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$.

- Αποδεικνύεται ότι:

$$A = f_x(x_0, y_0)$$

$$B = f_y(x_0, y_0)$$



Διαφορίσιμες συναρτήσεις (2/2)

Αν μια συνάρτηση έχει **συνεχείς μερικές παραγώγους** σε μια περιοχή ενός σημείου $P(x_0, y_0)$, τότε είναι **διαφορίσιμη** στο P .

Αν μια συνάρτηση είναι **διαφορίσιμη** σε ένα σημείο, τότε είναι **συνεχής** στο σημείο αυτό.



Ολικό διαφορικό

- **Ολικό διαφορικό** μιας διαφορίσιμης συνάρτησης f στο σημείο $P(x_0, y_0)$ ονομάζεται η παράσταση

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y) = x \rightarrow dx = \Delta x \\ f(x, y) = y \rightarrow dy = \Delta y \end{array} \right\} \Rightarrow df = f_x dx + f_y dy$$

Αφού η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη, θα ισχύει

$$\Delta f = f_x \Delta x + f_y \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \Rightarrow$$

$$\Delta f = df + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$



Ιδιότητες διαφορικού

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι διαφορίσιμες, τότε είναι:

$$d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$d(fg) = gdf + fdg$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}, g \neq 0$$

Μια παράσταση της μορφής

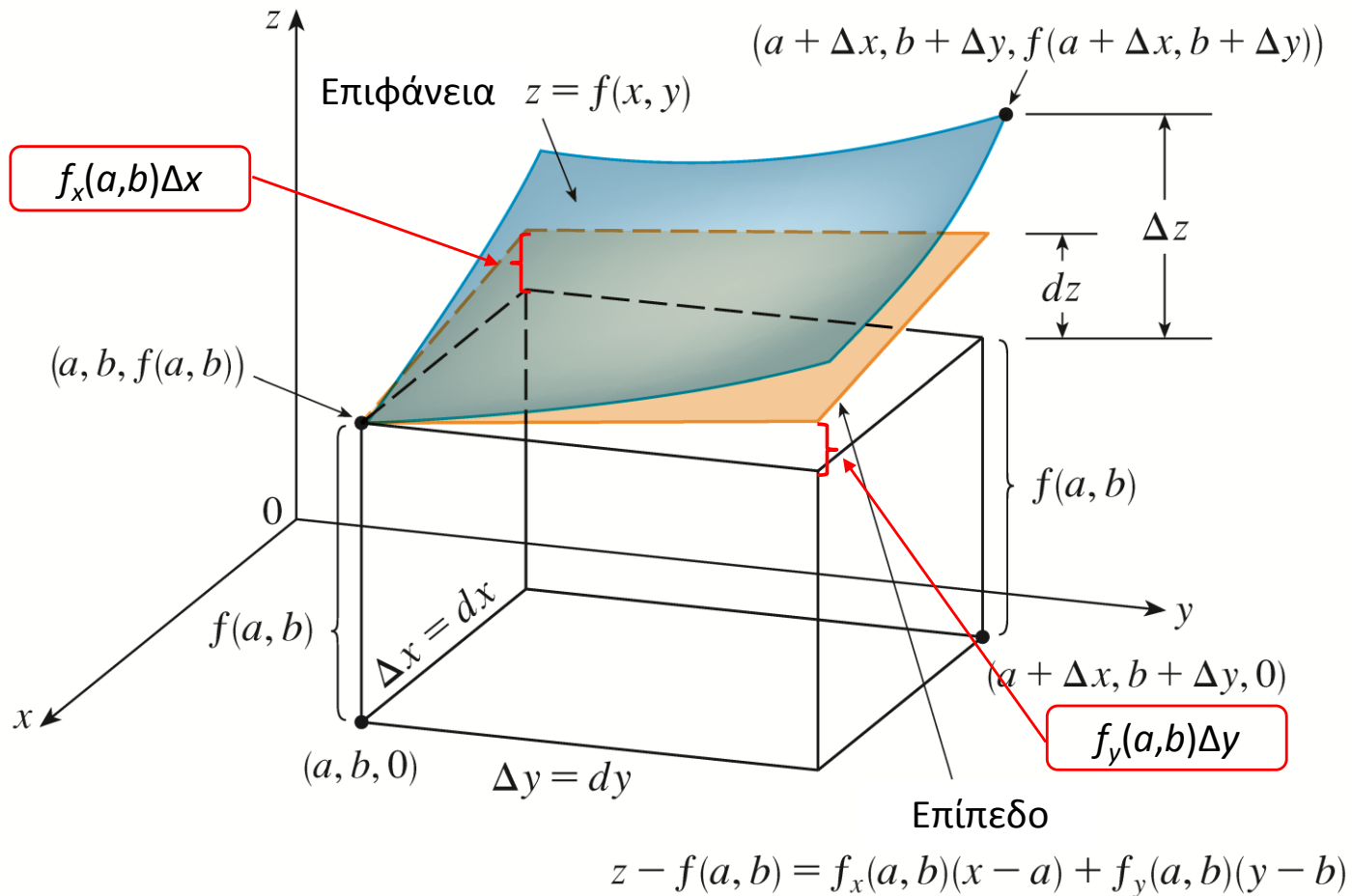
$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

αποτελεί ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης, αν είναι

$$P_y = Q_x$$



Γεωμετρική ερμηνεία διαφορικού



Γραμμική προσέγγιση συνάρτησης (1/3)

Για μικρές τιμές των $\Delta x, \Delta y$, ισχύει

$$\Delta f; df$$

δηλ. το διαφορικό αποτελεί προσέγγιση της μεταβολής της f .

$$\underbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}_{\Delta f}; \underbrace{f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y}_{df}$$



$$x = x_0 + \Delta x$$

$$y = y_0 + \Delta y$$

$$f(x, y); f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$



Γραμμική προσέγγιση συνάρτησης (2/3)

- Παράδειγμα:

- Να βρεθεί η γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ στο σημείο $P(0.2,0.2)$

$$f_x(0.2,0.2) = -2x|_{(0.2,0.2)} = -0.4$$

$$f_y(0.2,0.2) = -2y|_{(0.2,0.2)} = -0.4$$

$$f(0.2,0.2) = 1 - 0.2^2 - 0.2^2 = 0.92$$

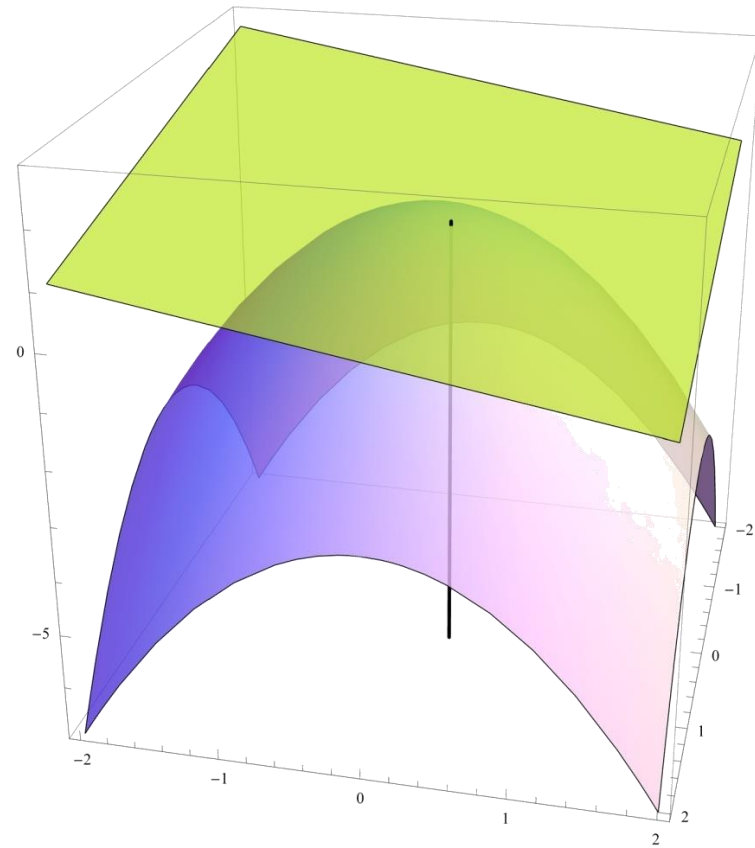
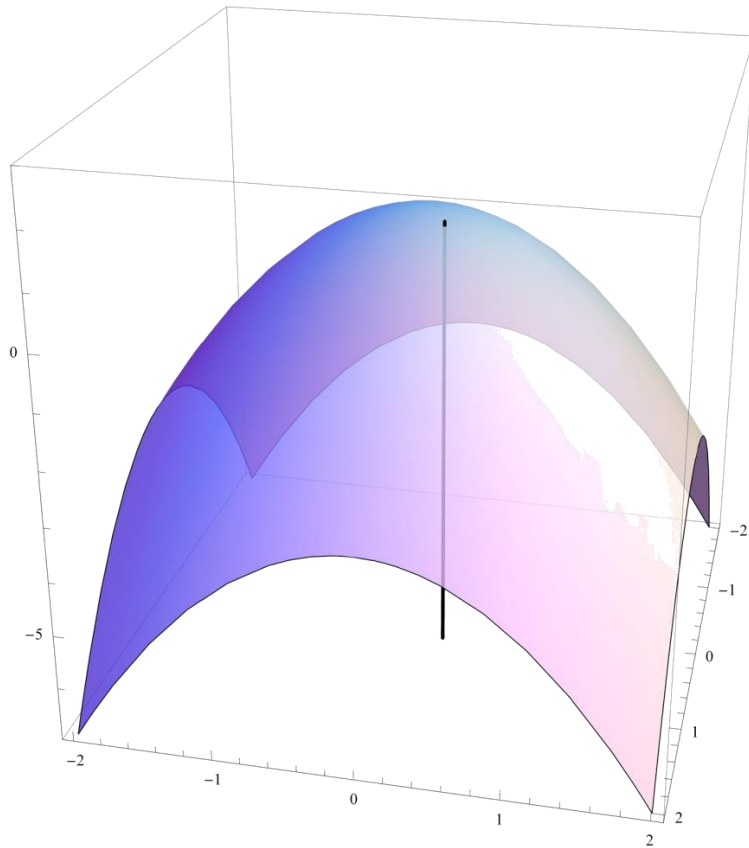
$$f(x,y); \quad 0.92 - 0.4(x - 0.2) - 0.4(y - 0.2)$$



Γραμμική προσέγγιση συνάρτησης (3/3)

$$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$$

$$g(x,y) = 0.92 - 0.4(x - 0.2) - 0.4(y - 0.2)$$



Σφάλματα

Έστω η διαφορίσιμη συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ και τα σημεία $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ και $P'(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n)$ του A .

Η μεταβολή $\Delta f(P) = f(P') - f(P)$ ονομάζεται **απόλυτο σφάλμα** (προσεγγίζεται με το df).

Τα ο ηλίκο $\frac{\Delta f(P)}{f(P)}$ ονομάζεται **σχετικό σφάλμα** (προσεγγίζεται με το $\frac{df(P)}{f(P)}$)



Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Σημείωμα Αναφοράς

- Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Ζυγκιρίδης Θεόδωρος. «Μαθηματική Ανάλυση II». Έκδοση: 1.0. Κοζάνη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.uowm.gr/courses/ICTE260/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Όχι Παράγωγα Έργα Μη Εμπορική Χρήση 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό



Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους
υπερσυνδέσμους.

