Μαθηματική Ανάλυση II

Ενότητα 3: Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Επίκουρος Καθηγητής Θ. Ζυγκιρίδης

e-mail: *tzygiridis@uowm.gr*

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ψηφιακά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

- Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.
- Γράφημα συνάρτησης.
- Ισοσταθμικές.
- Όρια.
- Συνέχεια.

Στόχοι

Μετά την ολοκλήρωση της ενότητα, οι φοιτητές:

- θα έχουν κατανοήσει τα βασικά χαρακτηριστικά συναρτήσεων πολλών μεταβλητών,
- θα γνωρίζουν τις γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων,
- θα μπορούν να παριστάνουν συναρτήσεις με τη βοήθεια ισοσταθμικών,
- θα είναι σε θέση να υπολογίζουν όρια συναρτήσεων και να αποδεικνύουν τη μη ύπαρξη ορίων.

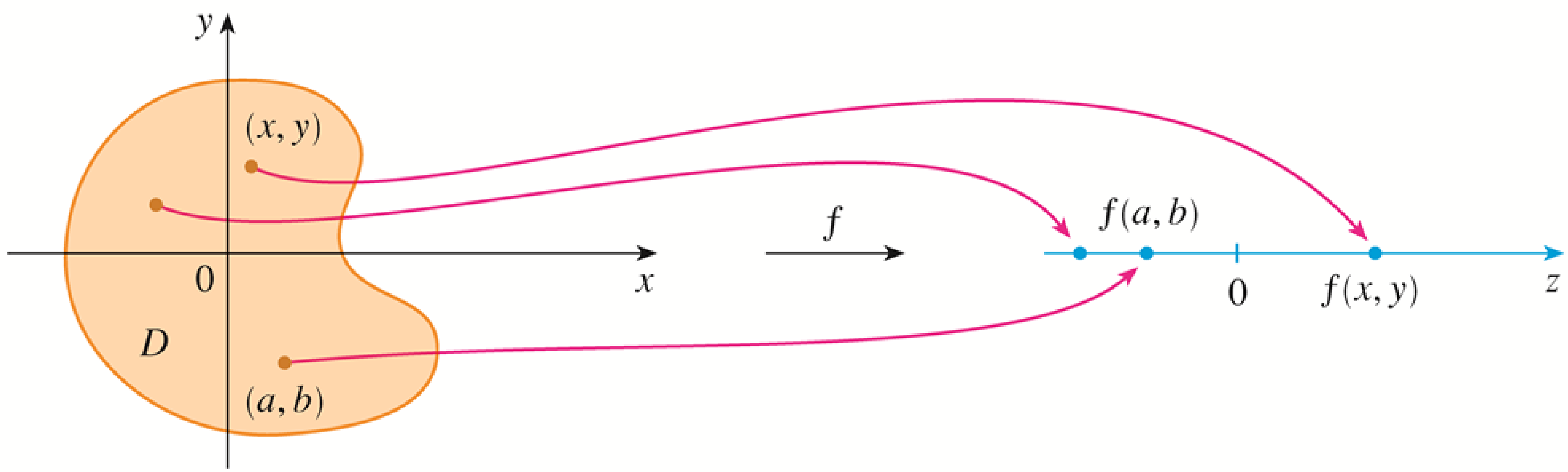
Συνάρτηση δύο μεταβλητών (1/3)

Μια **πραγματική συνάρτηση** f **δύο μεταβλητών** ονομάζεται ένας κανόνας, ο οποίος αντιστοιχίζει σε κάθε ζεύγος $(x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$ ένα μόνο πραγματικό αριθμό $z \in \mathbb{R}$:

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

- x, y: **ανεξάρτητες μεταβλητές**
- $z = f(x,y)$: **εξαρτημένη μεταβλητή**

Συνάρτηση δύο μεταβλητών (2/3)

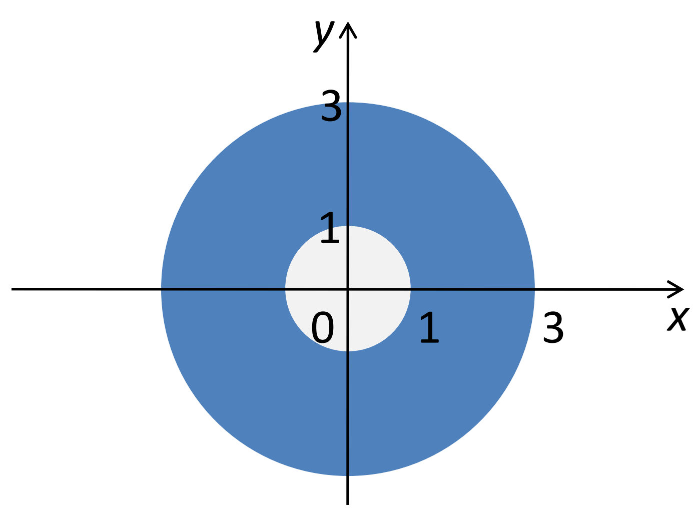


- Α: **πεδίο ορισμού**
- Το σύνολο που αποτελείται από τις τιμές $z = f(x,y)$, με $(x, y) \in A$, αποτελεί το **πεδίο τιμών** της f.

Συνάρτηση δύο μεταβλητών (3/3)

- Παράδειγμα
  - Να βρεθεί το **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης.

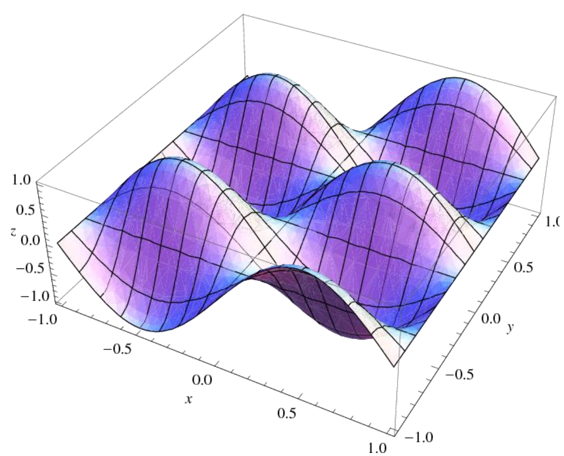
$$f(x,y) = \ln\{(x^2 + y^2 - 1)(9 - x^2 - y^2)\}$$



Γράφημα συνάρτησης

- Έστω συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. **Γράφημα** της f ονομάζεται το υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^3$ που αποτελείται από τα σημεία $(x, y, f(x,y))$:

$$\text{graph}(f) = \{(x, y, f(x,y)) : (x, y) \in A\}$$



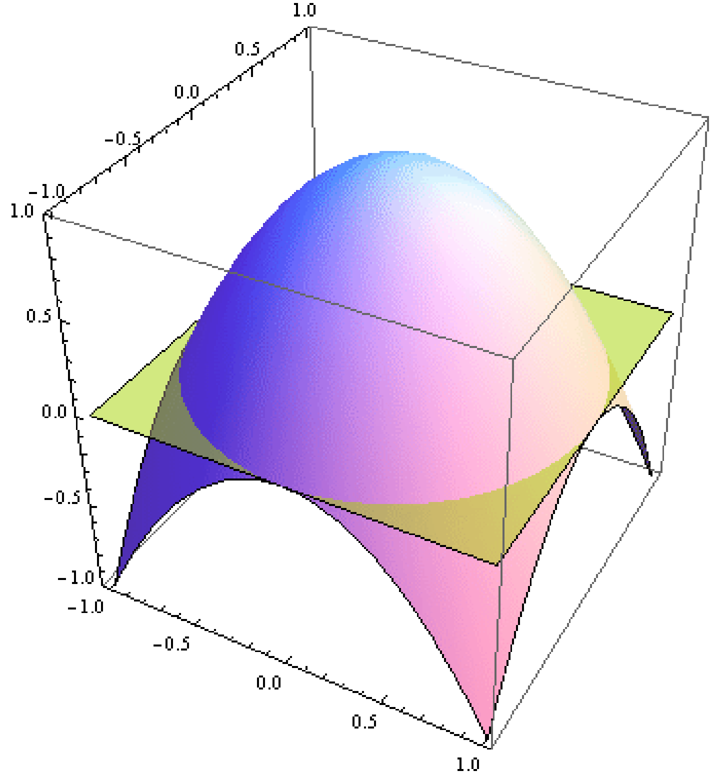
$$f(x,y) = \sin(\pi x)\cos(2\pi y)$$

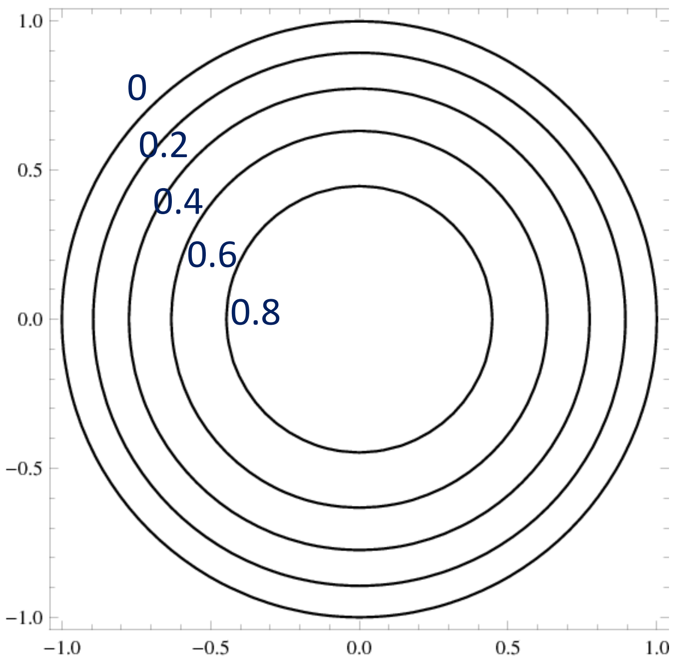
Ισοσταθμικές καμπύλες (1/2)

- **Ισοσταθμική καμπύλη** μιας επιφάνειας S: $z = f(x,y)$ ονομάζεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου Oxy, στα οποία η τιμή της συνάρτησης f είναι σταθερή.
- Η ισοσταθμική που περιγράφεται ως $\boldsymbol{f(x,y) = c}$ είναι η προβολή στο επίπεδο Oxy της καμπύλης που προκύπτει από την τομή της **επιφάνειας** $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ με το επίπεδο $\boldsymbol{z = c}$.

Ισοσταθμικές καμπύλες (2/2)

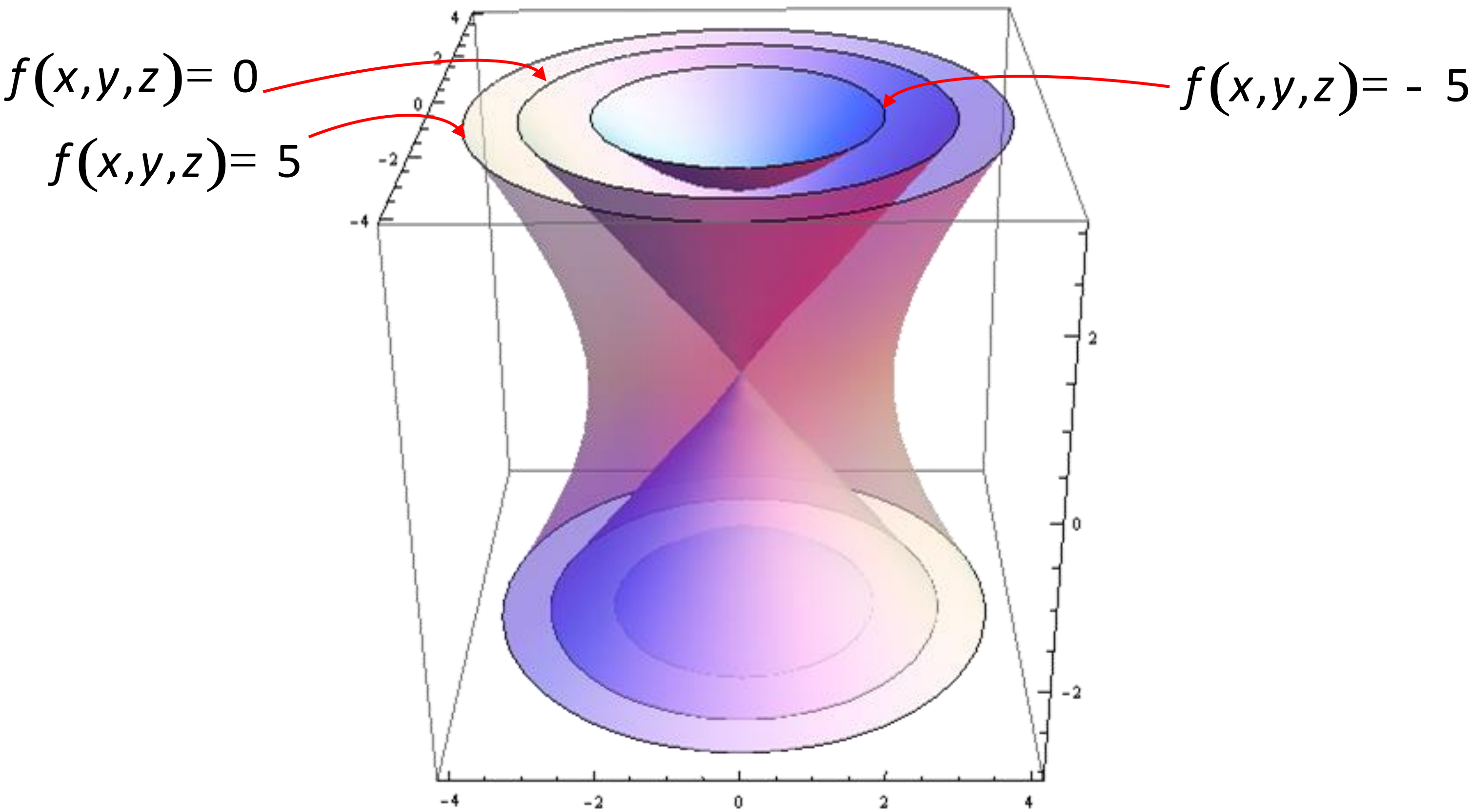
$$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$$





Ισοσταθμικές επιφάνειες

$$\boxed{f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2}$$



Όριο συνάρτησης 2 μεταβλητών (1/2)

Έστω συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $P(x_0, y_0)$ ένα σημείο του A. Η f **έχει όριο το *L*** ή **τείνει στο *L*** καθώς το (x, y) τείνει στο (x_0, y_0), αν για κάθε αριθμό $\varepsilon > 0$ υπάρχουν αριθμοί $\delta_1, \delta_2 > 0$, τέτοιοι ώστε για κάθε (x, y) του A με

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \text{ και } 0 < |y - y_0| < \delta_2$$

να ισχύει

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

Όριο συνάρτησης 2 μεταβλητών (2/2)

Έστω συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $P(x_0, y_0)$ ένα σημείο του A.

Η f **έχει όριο το *L*** ή **τείνει στο *L*** καθώς το (x, y) τείνει στο (x_0, y_0), αν για κάθε αριθμό $\varepsilon > 0$ υπάρχει αριθμός $\delta > 0$, τέτοιος ώστε για κάθε (x, y) του A με

$$0 < \sqrt{\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2} < \delta$$

να ισχύει

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

Ιδιότητες ορίων

Αν $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L,\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$, τότε είναι:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left[f(x,y)+g(x,y)\right]=L+M$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left[f(x,y)-g(x,y)\right]=L-M$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left[f(x,y)\cdot g(x,y)\right]=L\cdot M$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left[k\cdot f(x,y)\right]=k\cdot L$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right]=\frac{L}{M},\ \ (M\neq 0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left[f(x,y)\right]^{m/n}=L^{m/n}$$

Κριτήριο μη ύπαρξης ορίου

Αν μια συνάρτηση $f(x,y)$ έχει διαφορετικό όριο για διαφορετικές διαδρομές καθώς $(x,y) \to (x_0, y_0)$, τότε δεν υπάρχει το $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

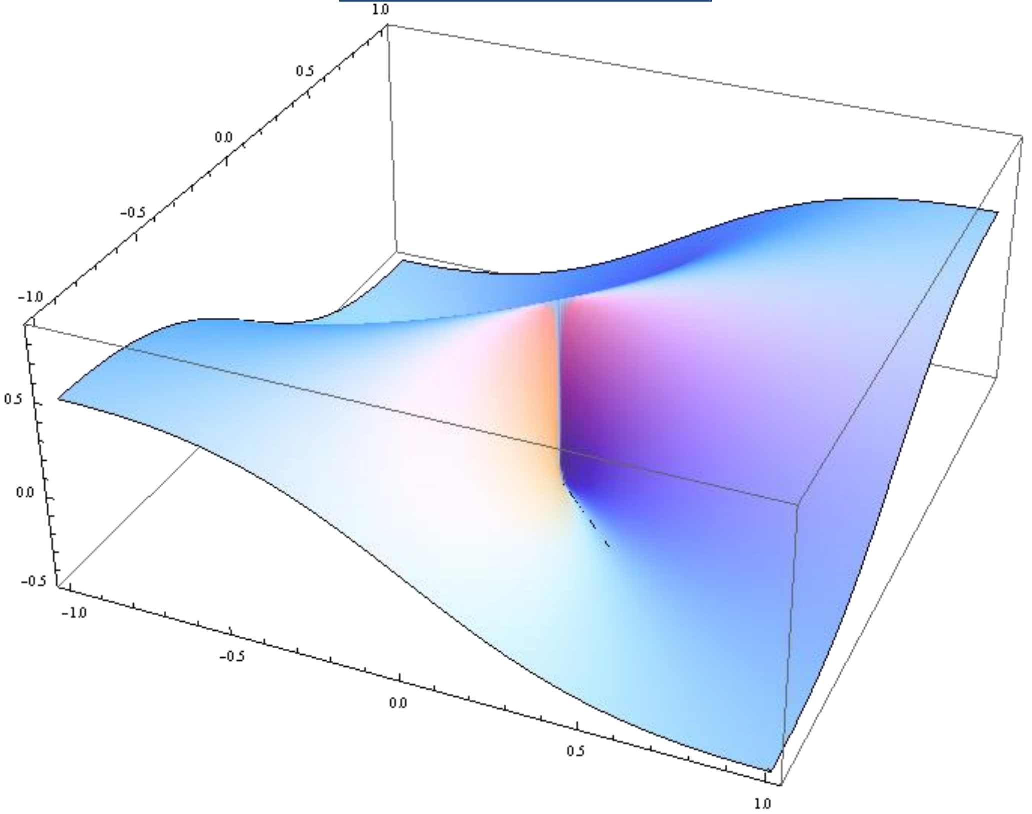
Παράδειγμα:

- Να δειχτεί ότι δεν υπάρχει το όριο

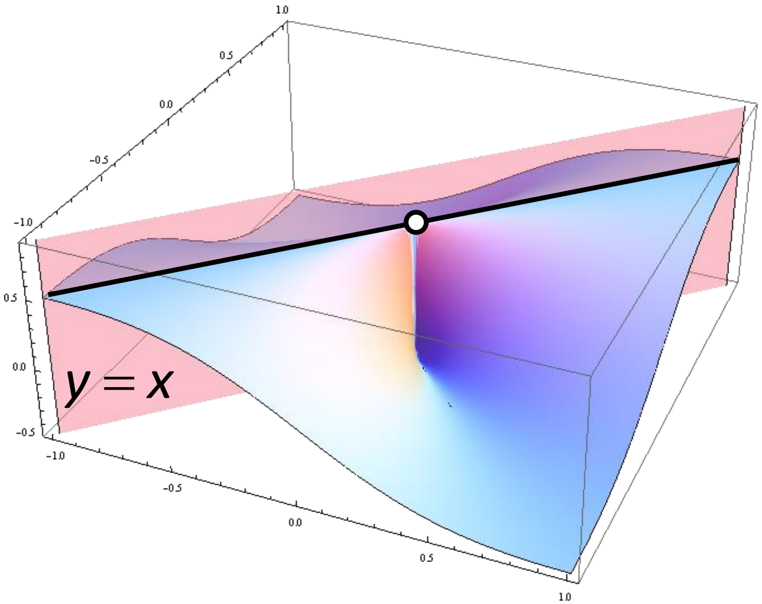
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Μη ύπαρξη ορίου (1/2)

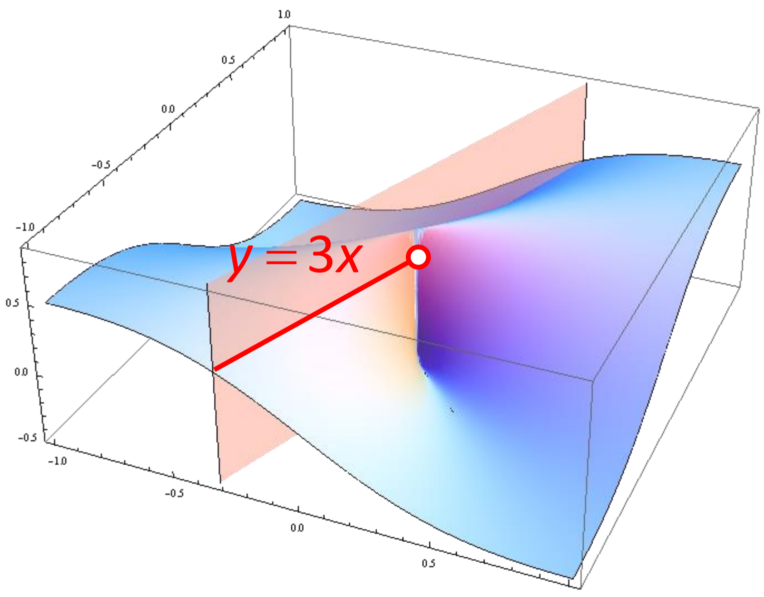
$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$



Μη ύπαρξη ορίου (2/2)



$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$$



$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=3x}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{3}{10}$$

Επάλληλα όρια

- **Επάλληλα ή διαδοχικά όρια** μιας συνάρτησης $f\,(x,y)$ ονομάζονται τα όρια

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right]$$

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right]$$

- Τα επάλληλα όρια δεν είναι απαραίτητα ίσα.

- Αν υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, τότε τα επάλληλα όρια είναι ίσα.

Συνέχεια συναρτήσεων (1/2)

Έστω συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Η f λέγεται **συνεχής** στο σημείο $P(x_0, y_0)$ του Α, αν ισχύουν οι συνθήκες:

1) το $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ υπάρχει,

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

- Μια συνάρτηση είναι **συνεχής σε ένα σύνολο**, εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του συνόλου.
- Μια συνάρτηση είναι συνεχής στα **μεμονωμένα σημεία** του πεδίου ορισμού της.

Συνέχεια συναρτήσεων (2/2)

- Αν οι συναρτήσεις $f(x,y)$, $g(x,y)$ είναι συνεχείς, τότε είναι συνεχείς και οι συναρτήσεις:

$$f(x,y) \pm g(x,y)$$

$$f(x,y) \cdot g(x,y)$$

$$\frac{f(x,y)}{g(x,y)},\ g(x,y) \neq 0$$

- Οι **πολυωνυμικές** συναρτήσεις είναι συνεχείς.
- Οι **ρητές** συναρτήσεις είναι συνεχείς, στα σημεία που δε μηδενίζεται ο παρανομαστής.

Τέλος Ενότητας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Αναφοράς

- Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Ζυγκιρίδης Θεόδωρος. «Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ». Έκδοση: 1.0. Κοζάνη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

  https: //eclass.uowm.gr/courses/ICTE260/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

– το Σημείωμα Αναφοράς
– το Σημείωμα Αδειοδότησης
– τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
– το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.