



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών

Μαθηματική Ανάλυση II

Ενότητα 2: Επιφάνειες 2^{ου} βαθμού

Επίκουρος Καθηγητής Θ. Ζυγκιρίδης

e-mail: tzygiridis@uowm.gr

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ψηφιακά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Περιεχόμενα

- Ελλειψοειδές.
- Ελλειπτικό παραβολοειδές.
- Υπερβολικό παραβολοειδές.
- Μονόχωνο και δίχωνο υπερβολοειδές.
- Κυλινδρικές επιφάνειες.
- Κωνικές επιφάνειες.



Στόχοι

Μετά την ολοκλήρωση της ενότητας, οι φοιτητές:

- Θα γνωρίζουν τη γενική μορφή των επιφανειών β' βαθμού,
- Θα αναγνωρίζουν επιμέρους κατηγορίες,
- Θα είναι σε θέση να σχεδιάζουν βασικές επιφάνειες β' βαθμού.



Επιφάνειες 2^{ου} βαθμού

Επιφάνειες 2^{ου} βαθμού είναι οι επιφάνειες με σημεία των οποίων οι συντεταγμένες (x, y, z) επαληθεύουν μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού,

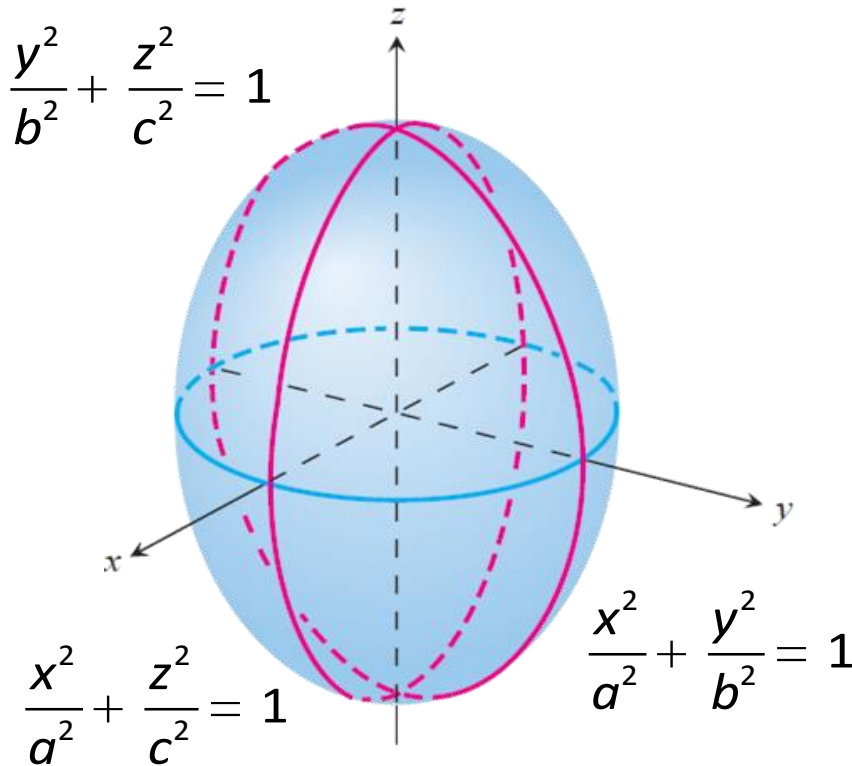
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

- Ένας τουλάχιστον από τους συντελεστές A, B, C, D, E, F πρέπει να είναι διάφορος του 0.
- Αν $A = B = C = D = E = F = 0$, η εξίσωση που προκύπτει αντιστοιχεί σε ένα **επίπεδο**.



Ελλειψοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

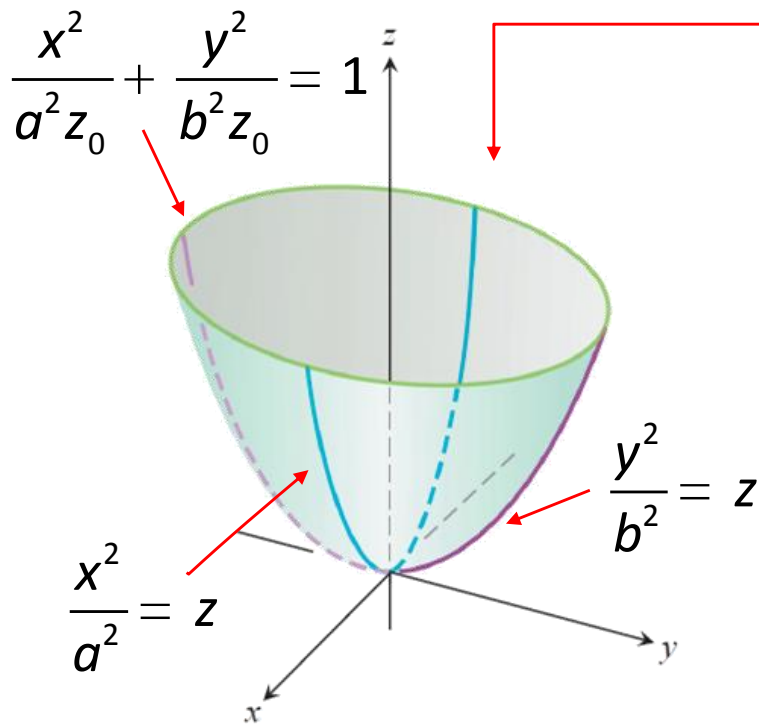


- Αν 2 από τους 3 ημιάξονες είναι ίσοι, το ελλειψοειδές ονομάζεται **εκ περιστροφής**.
- Αν και οι τρεις ημιάξονες είναι ίσοι, τότε προκύπτει **σφαίρα**.



Ελλειπτικό παραβολοειδές

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = x, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = y, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

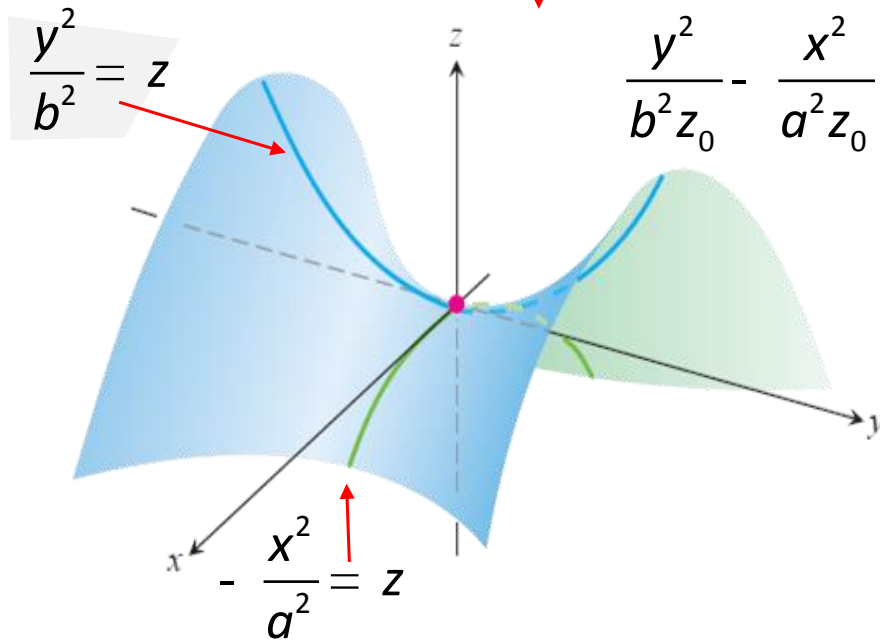


Στην περίπτωση που $a = b$, το παραβολοειδές ονομάζεται **κυκλικό** και είναι επιφάνεια εκ περιστροφής.

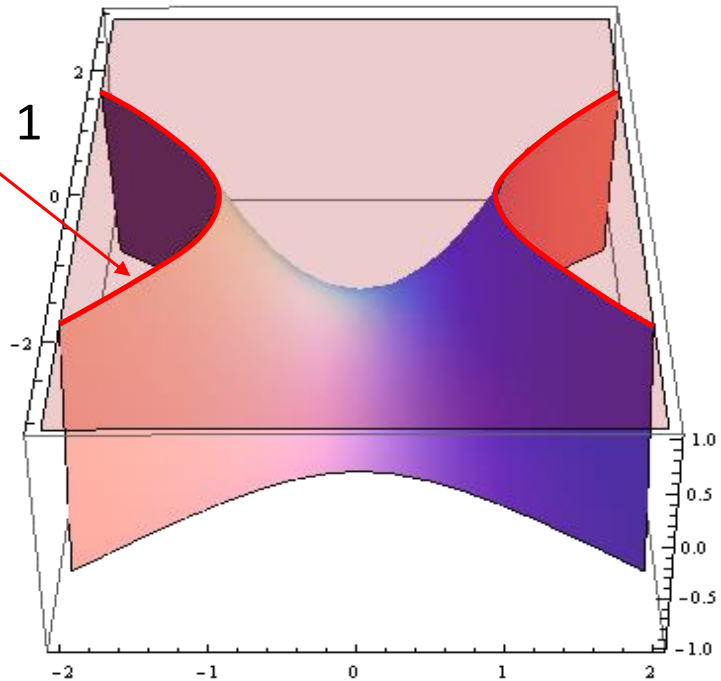


Υπερβολικό παραβολοειδές

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = x, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = y, \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = z, \dots$$

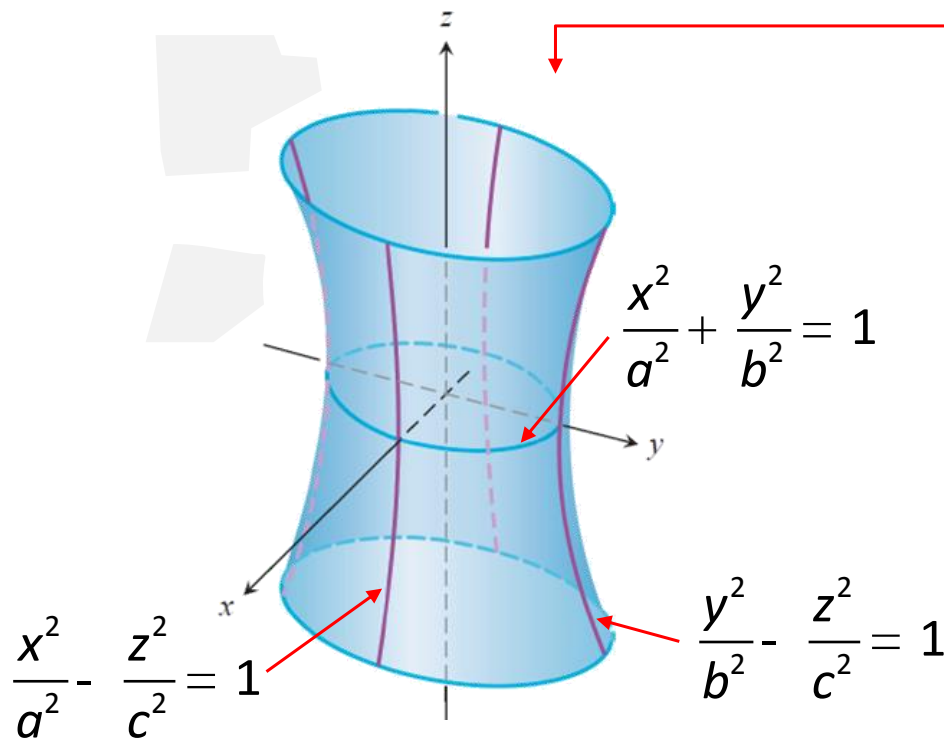


$$\frac{y^2}{b^2 z_0} - \frac{x^2}{a^2 z_0} = 1$$



Μονόχωνο υπερβολοειδές

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

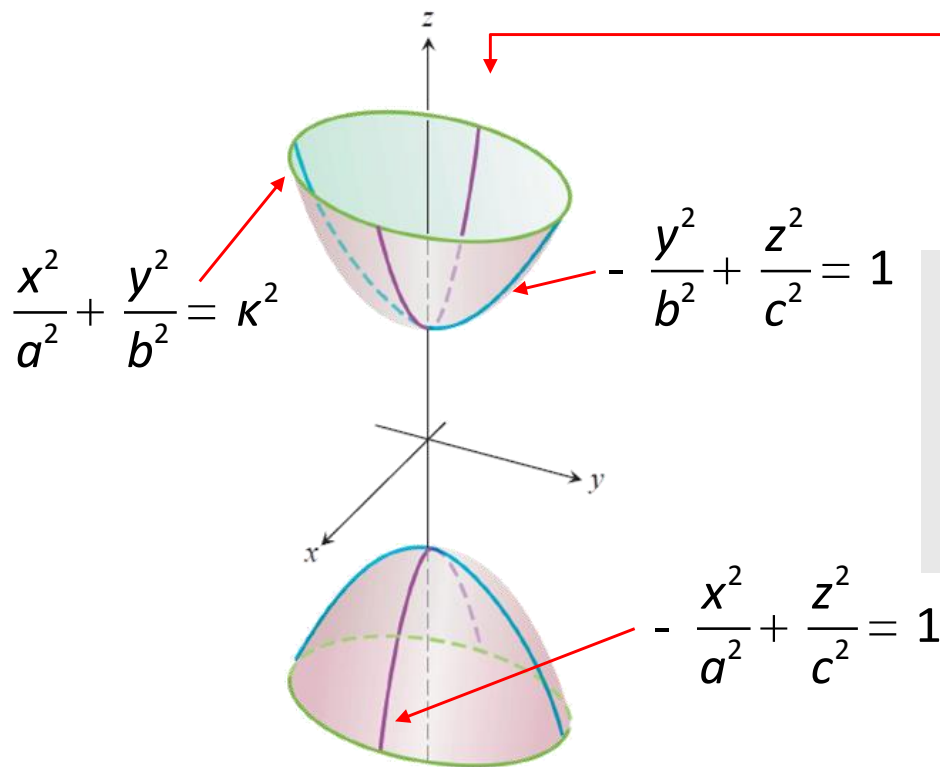


Στην περίπτωση που $a = b$,
προκύπτει **μονόχωνο**
υπερβολοειδές εκ
περιστροφής.



Δίχωνο υπερβολοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Στην περίπτωση που $a = b$,
προκύπτει **δίχωνο υπερβολοειδές**
εκ περιστροφής.



Ευθειογενείς επιφάνειες (1/2)

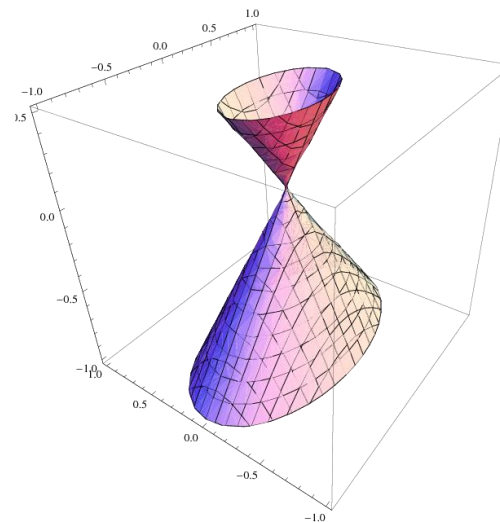
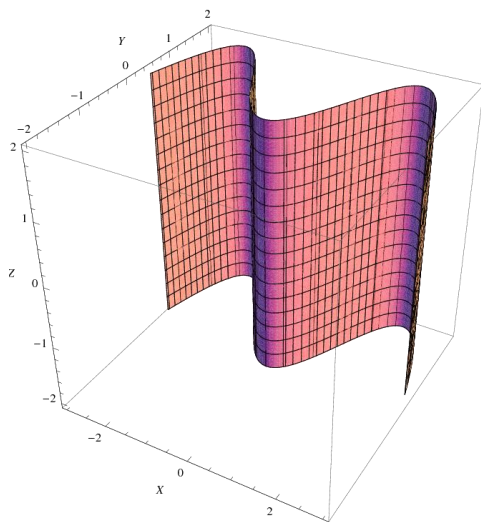
Ευθειογενείς είναι εκείνες οι επιφάνειες που από κάθε σημείο τους διέρχεται τουλάχιστον μία ευθεία, η οποία βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια.

- Ευθειογενείς επιφάνειες μπορεί να θεωρηθούν ότι προκύπτουν από την “κίνηση” μιας ευθείας (της **γενέτειρας**).
- Μια καμπύλη της επιφάνειας από κάθε σημείο της οποίας διέρχεται μια γενέτειρα, ονομάζεται **οδηγός** ή **γεννήτρια** καμπύλη.



Ευθειογενείς επιφάνειες (2/2)

- Στις **κυλινδρικές επιφάνειες**, οι γενέτειρες είναι παράλληλες προς συγκεκριμένη ευθεία του χώρου (π.χ. ελλειπτικοί, υπερβολικοί, παραβολικοί κύλινδροι).
- Στις **κωνικές επιφάνειες**, οι γενέτειρες διέρχονται από σταθερό σημείο (την **κορυφή**).



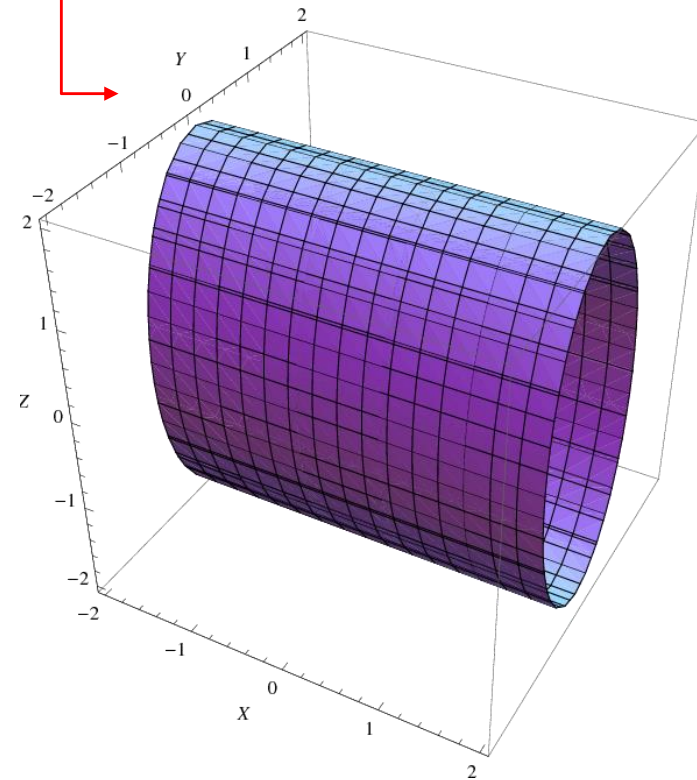
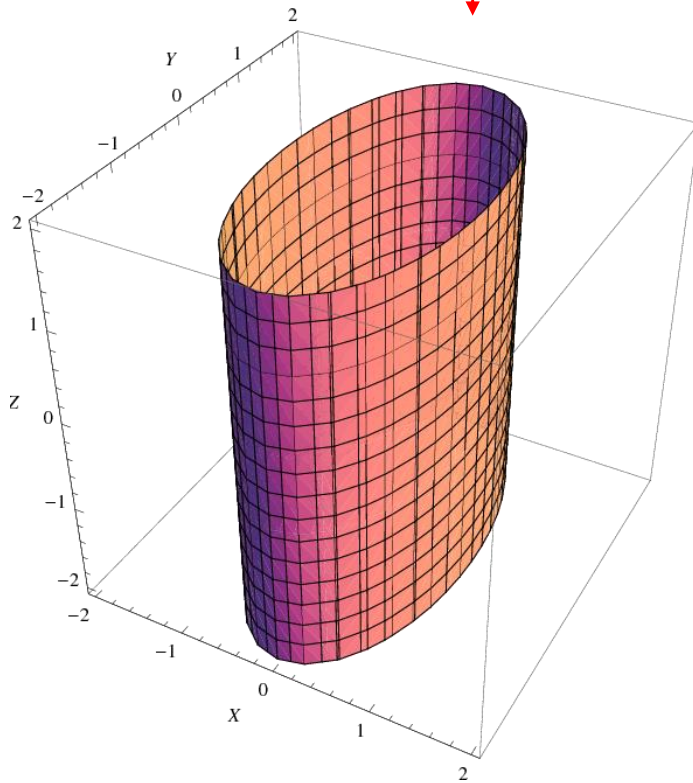
Κυλινδρικές επιφάνειες

- Κάθε καμπύλη της μορφής $f(x,y) = c$ του επιπέδου xy καθορίζει μια κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρες παράλληλες προς τον άξονα των z .
- Κάθε καμπύλη της μορφής $g(x,z) = c$ του επιπέδου xz καθορίζει μια κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρες παράλληλες προς τον άξονα των y .
- Κάθε καμπύλη της μορφής $h(y,z) = c$ του επιπέδου yz καθορίζει μια κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρες παράλληλες προς τον άξονα των x .



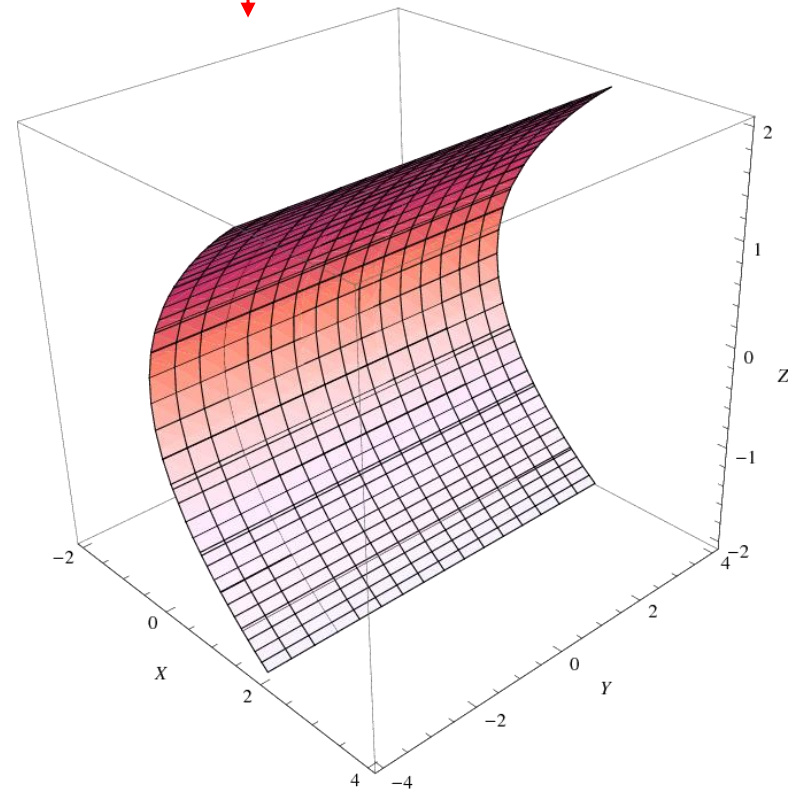
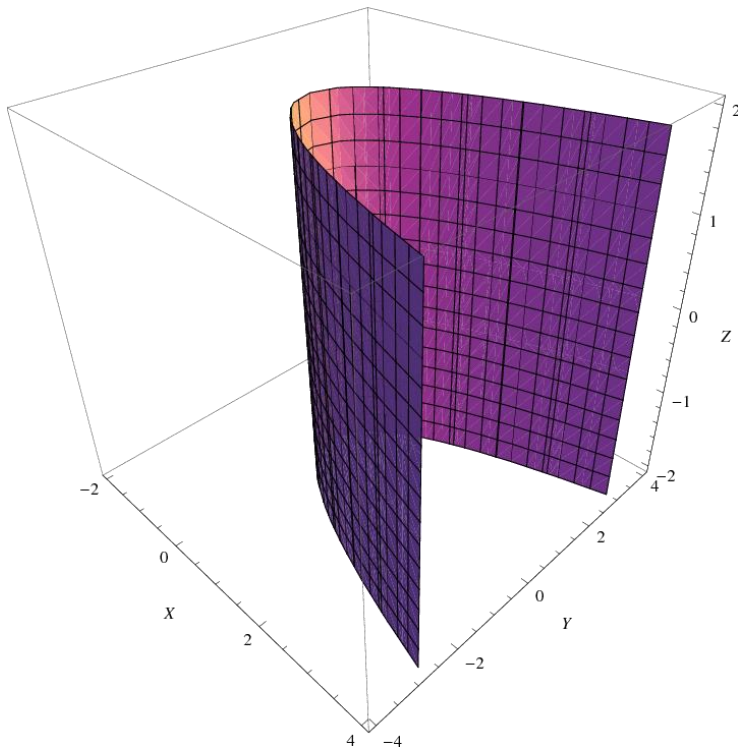
Ελλειπτικός κύλινδρος

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



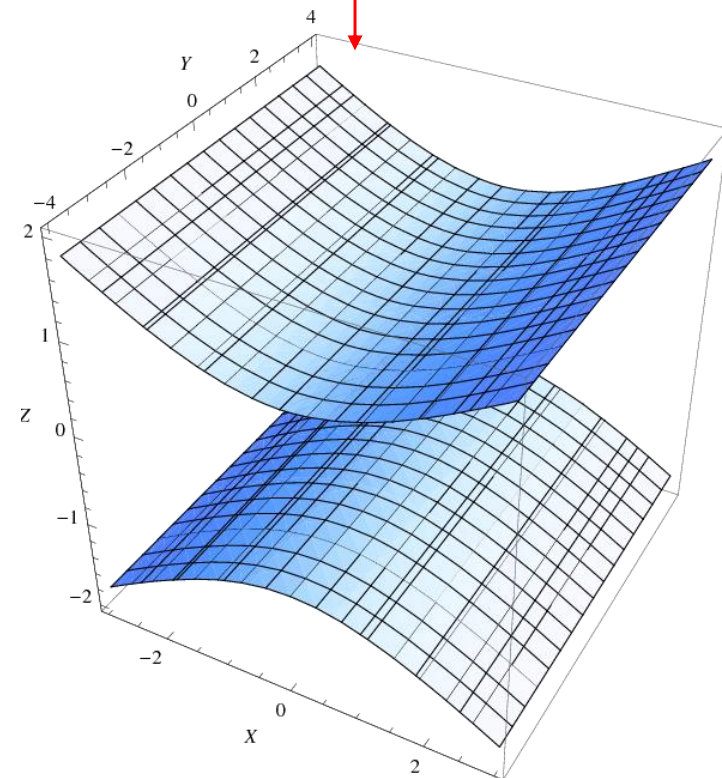
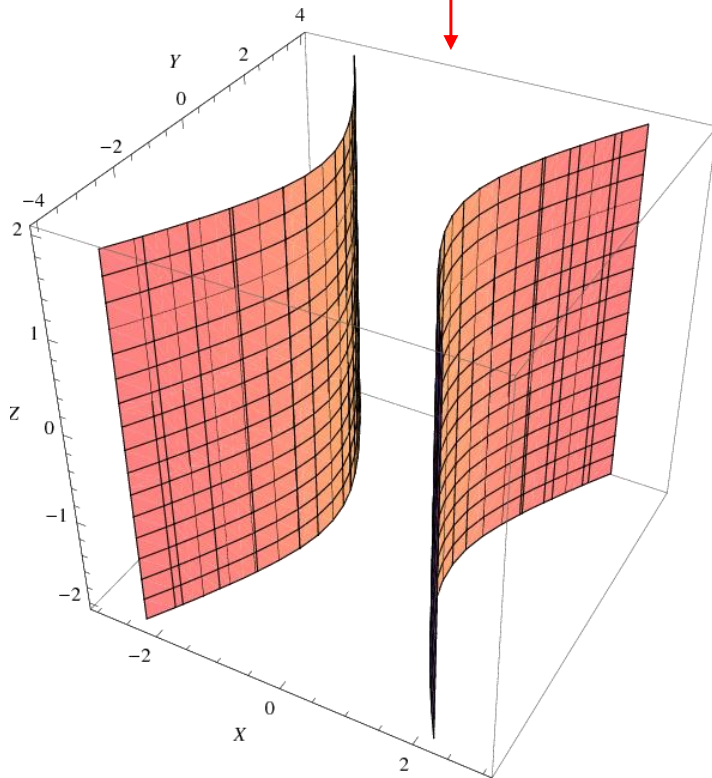
Παραβολικός κύλινδρος

$$y^2 = 2px, \quad z^2 = 2px, \quad x^2 = 2py, \dots$$



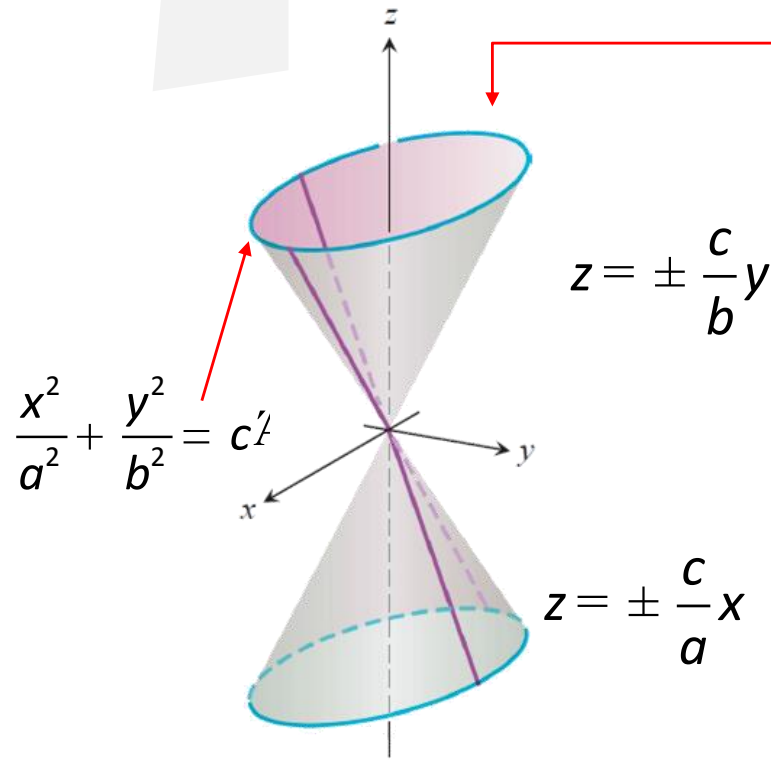
Υπερβολικός κύλινδρος

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \dots$$



ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟΣ ΚΩΝΟΣ

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{y^2}{b^2}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$



Στην περίπτωση που $a = b$,
προκύπτει **κυκλικός** κώνος.



Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Σημείωμα Αναφοράς

- Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Ζυγκιρίδης Θεόδωρος. «Μαθηματική Ανάλυση II». Έκδοση: 1.0. Κοζάνη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.uowm.gr/courses/ICTE260/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Όχι Παράγωγα Έργα Μη Εμπορική Χρήση 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους
υπερσυνδέσμους.

