



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας  
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών

---

# Μαθηματική Ανάλυση I

Ενότητα 9: Εφαρμογές Ολοκληρωμάτων

Επίκουρος Καθηγητής Θ. Ζυγκιρίδης

e-mail: [tzygiridis@uowm.gr](mailto:tzygiridis@uowm.gr)

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

---



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Άδειες Χρήσης

---

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ψηφιακά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



# Περιεχόμενα

---

- Εμβαδόν επίπεδου χωρίου.
- Μήκος επίπεδης καμπύλης.
- Όγκος στερεού εκ περιστροφής.
- Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας στερεού εκ περιστροφής.



# Στόχοι

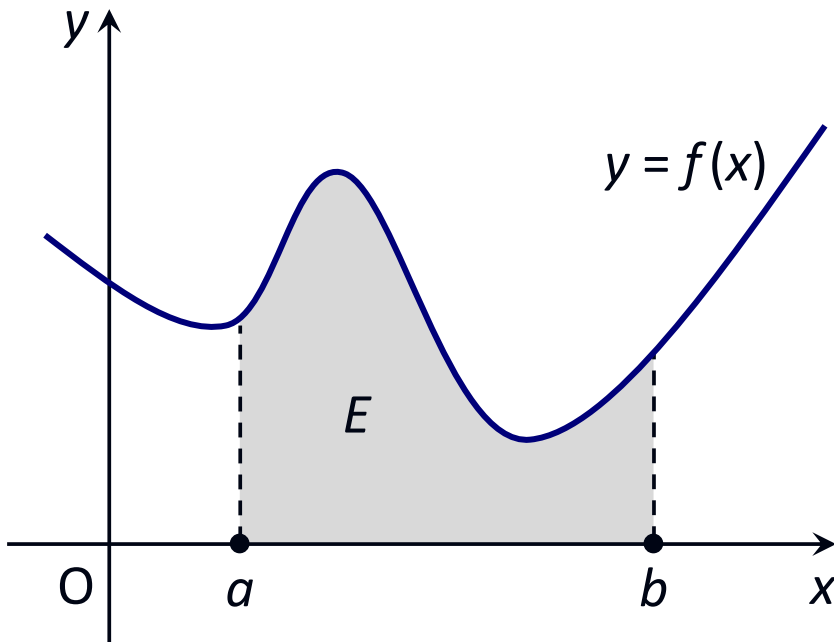
---

Μέσα από αυτήν την ενότητα, οι φοιτητές

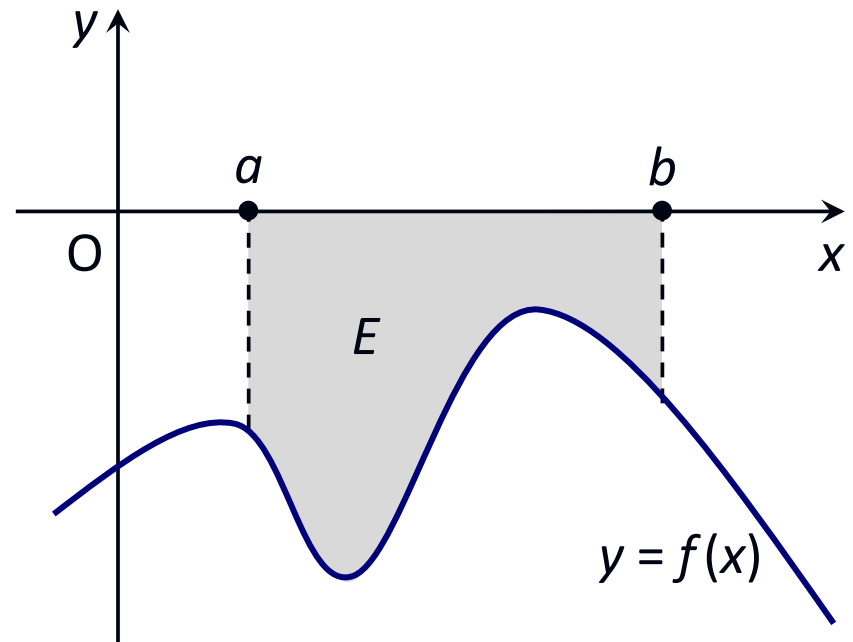
- Θα μπορούν να υπολογίζουν το εμβαδόν επίπεδων χωρίων,
- Θα μάθουν να υπολογίζουν το μήκος επίπεδων καμπυλών,
- Θα είναι σε θέση να βρίσκουν τον όγκο και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός στερεού εκ περιστροφής,
- Θα μελετούν τα παραπάνω προβλήματα σε πολικές συντεταγμένες και σε περιπτώσεις παραμετρικά ορισμένων συναρτήσεων.



# Εμβαδόν επίπεδου χωρίου (1/2)



$$E = \int_a^b f(x) dx$$



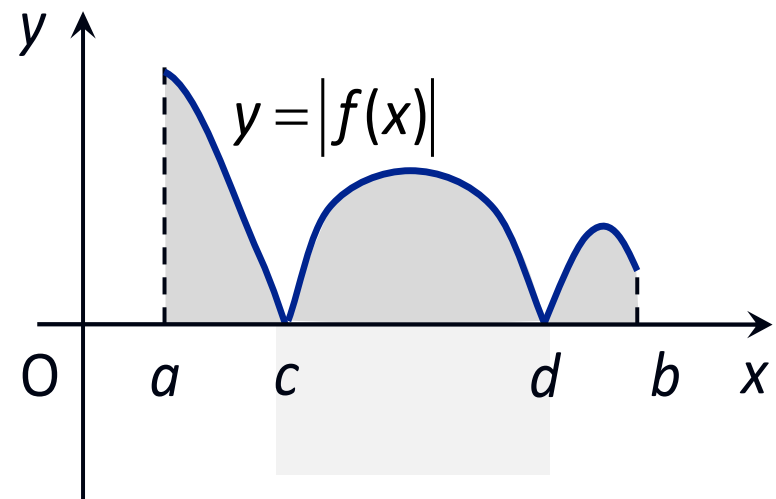
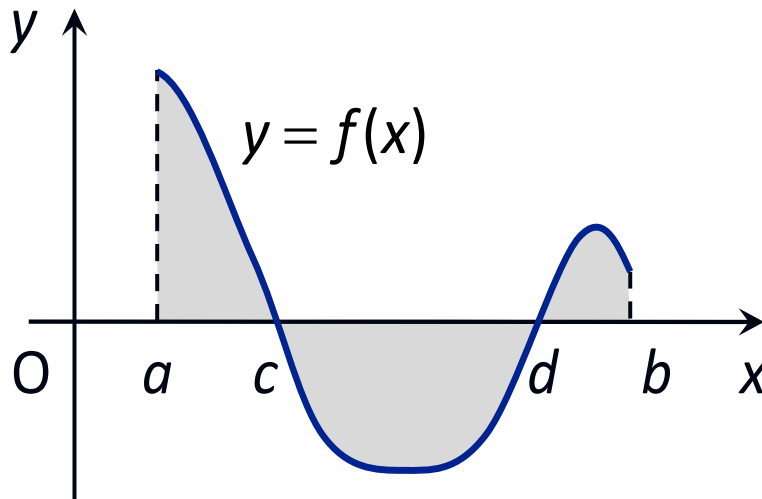
$$E = -\int_a^b f(x) dx$$



# Εμβαδόν επίπεδου χωρίου (2/2)

- Το εμβαδόν  $E$  του χωρίου που περικλείεται από το γράφημα της ολοκληρώσιμης συνάρτησης  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , τον άξονα των  $x$  και τις ευθείες  $x = a$ ,  $x = b$ , ισούται με

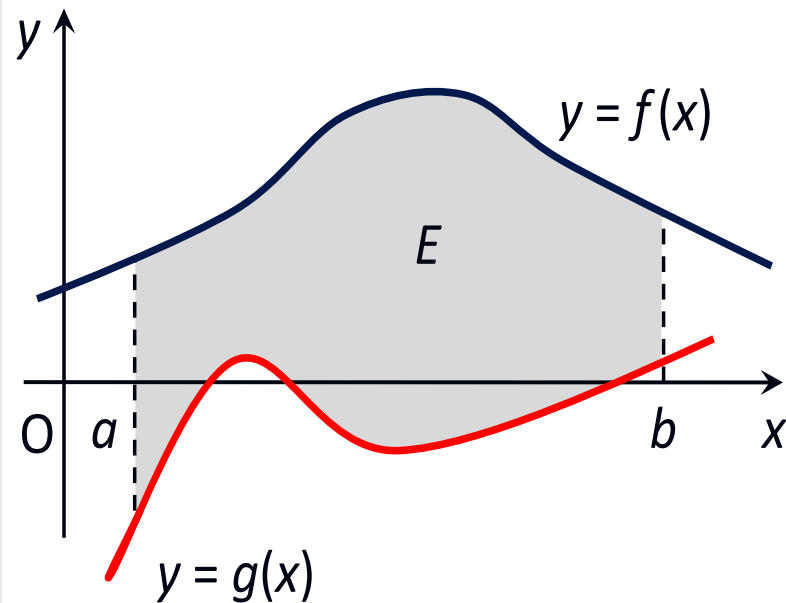
$$E = \int_a^b |f(x)| dx$$



# Εμβαδόν μεταξύ καμπυλών (1/3)

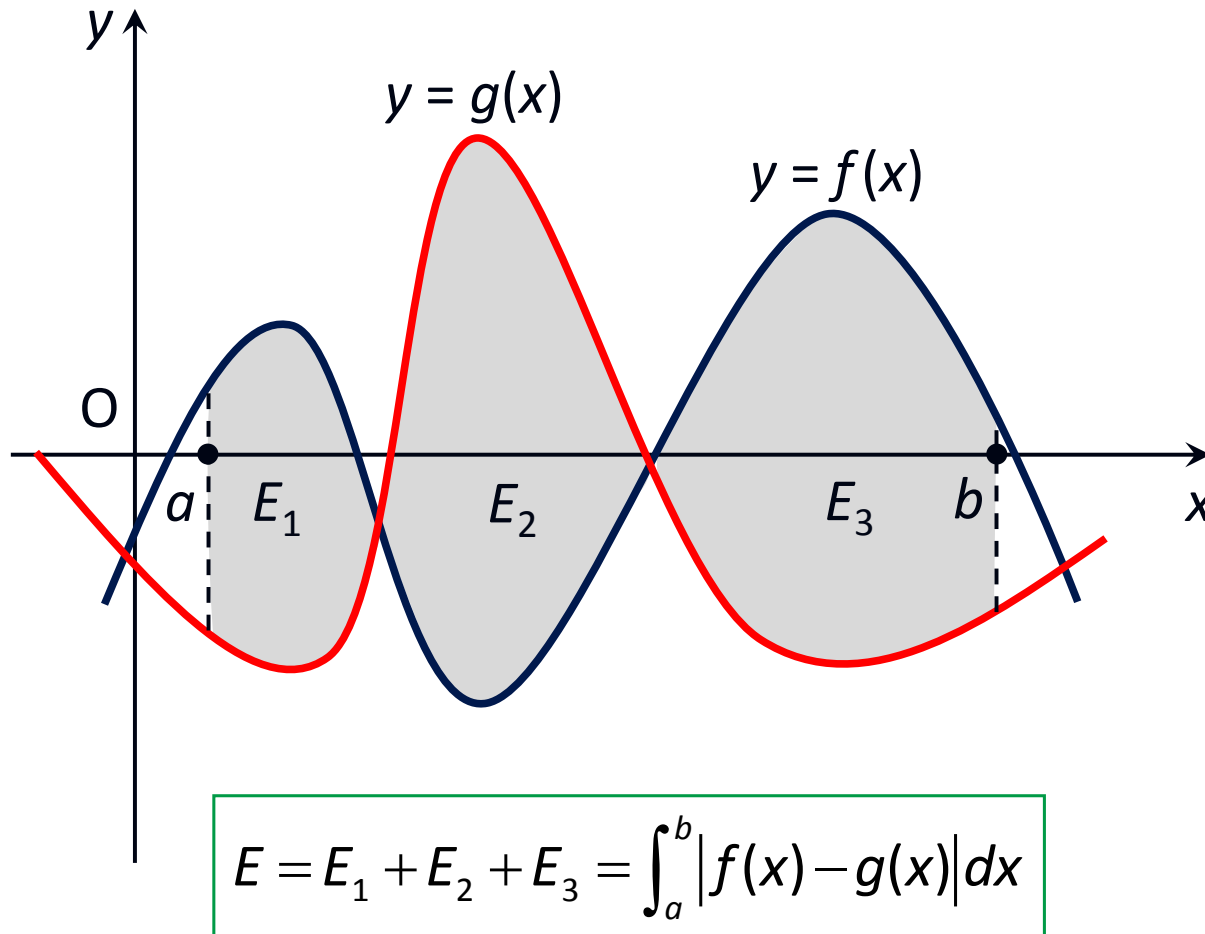
Το εμβαδόν  $E$  του χωρίου που περικλείεται από τα γραφήματα των συναρτήσεων  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (με  $f(x) \geq g(x)$ ) και τις ευθείες  $x = a, x = b$ , ισούται με

$$E = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

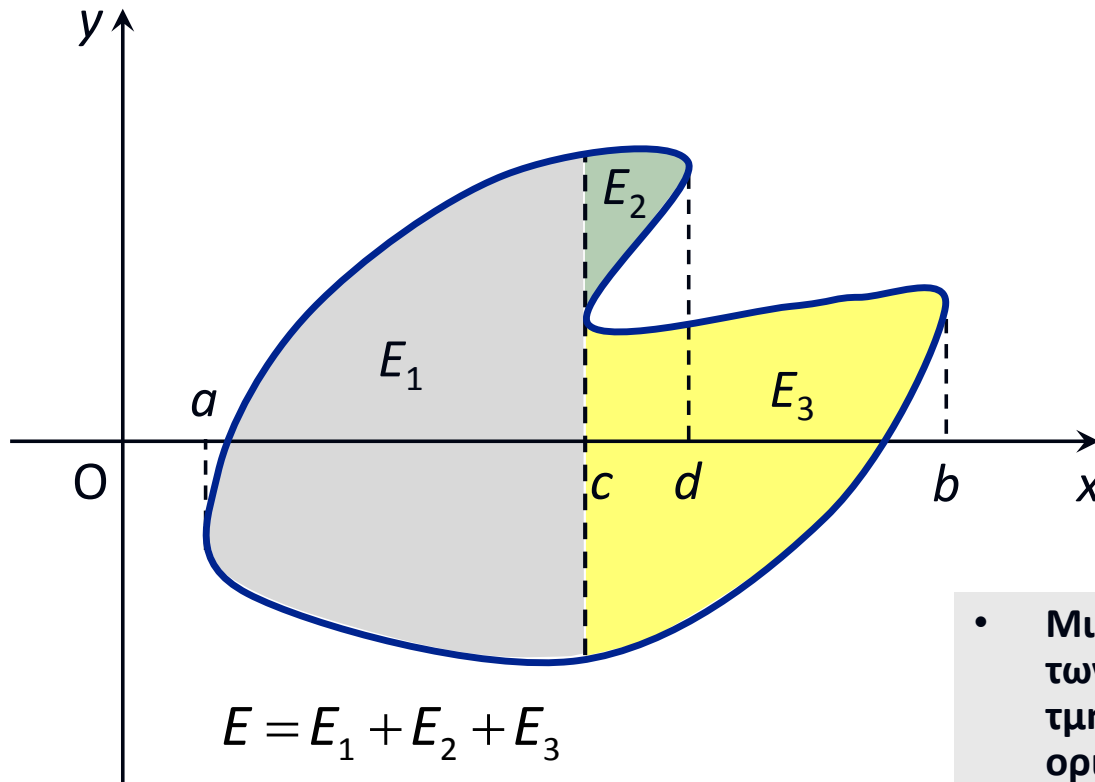




# Εμβαδόν μεταξύ καμπυλών (2/3)



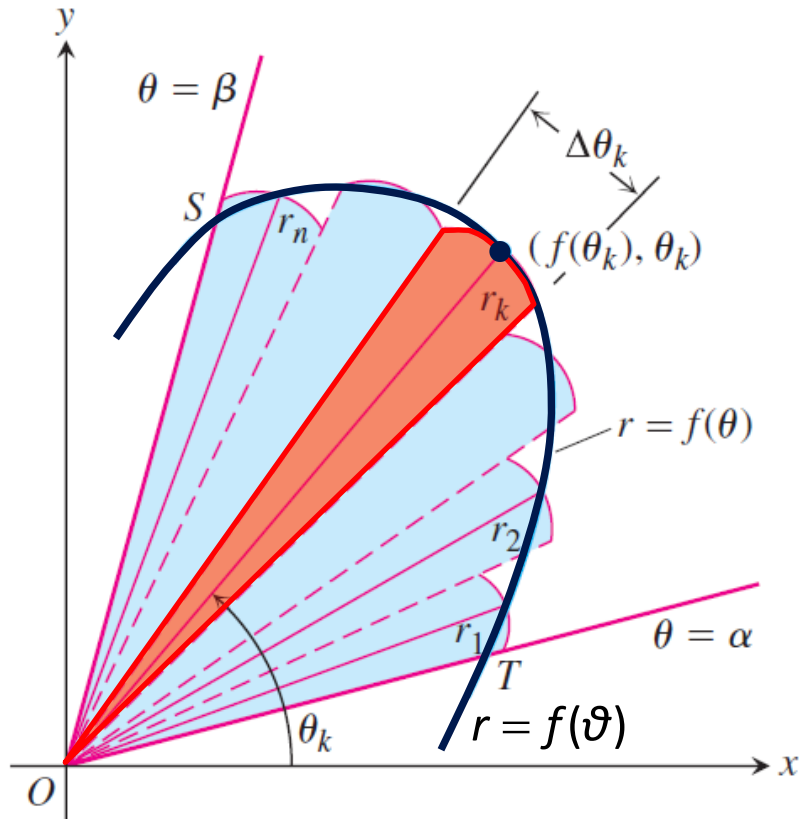
# Εμβαδόν μεταξύ καμπυλών (3/3)



- Μια ευθεία κάθετη στον άξονα των  $x$  θα πρέπει να τέμνει τα τμήματα της καμπύλης που οριοθετούν κάθε επιμέρους χωρίο σε δύο το πολύ σημεία.



# Εμβαδόν σε πολικές συντεταγμένες (1/3)



Εμβαδόν κυκλικού τομέα

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{\Delta\vartheta_k}{2\pi} \pi r_k^2 \\ &= \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\vartheta_k \\ &= \frac{1}{2} [f(\vartheta_k)]^2 \Delta\vartheta_k \end{aligned}$$

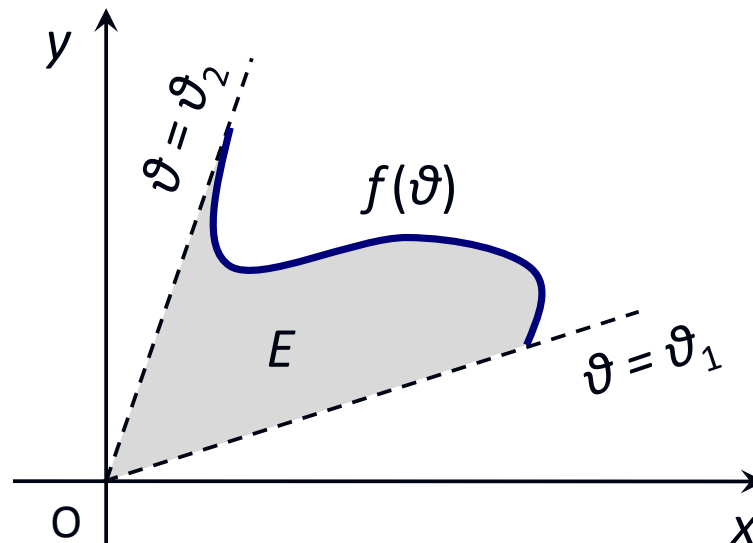
$$E = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} [f(\vartheta_k)]^2 \Delta\vartheta_k$$



# Εμβαδόν σε πολικές συντεταγμένες (2/3)

- Το εμβαδόν  $E$  του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη  $r = f(\vartheta)$  και τις ευθείες  $\vartheta = \vartheta_1$ ,  $\vartheta = \vartheta_2$ , ισούται με

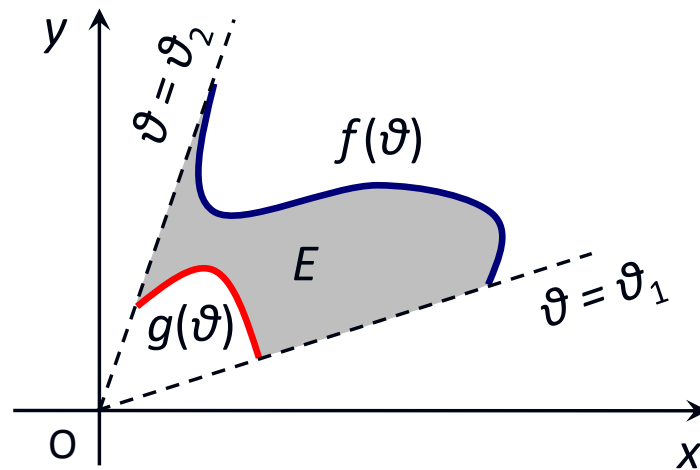
$$E = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} [f(\vartheta)]^2 d\vartheta = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r^2 d\vartheta$$



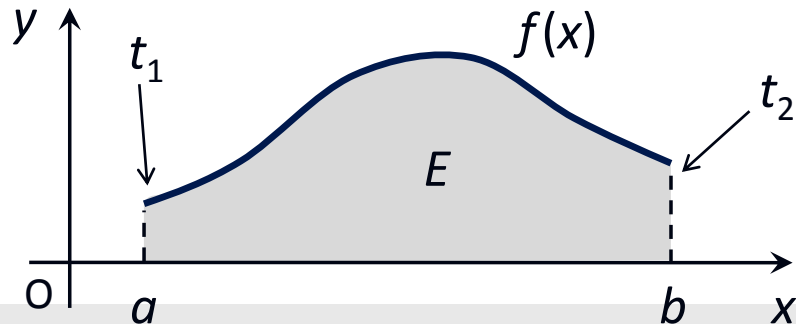
# Εμβαδόν σε πολικές συντεταγμένες (3/3)

Το εμβαδόν  $E$  του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες  $r = f(\vartheta)$ ,  $r = g(\vartheta)$  και τις ευθείες  $\vartheta = \vartheta_1$ ,  $\vartheta = \vartheta_2$ , με  $f(\vartheta) \geq g(\vartheta)$  για κάθε  $\vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$  ισούται με

$$E = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left\{ [f(\vartheta)]^2 - [g(\vartheta)]^2 \right\} d\vartheta$$



# Ορισμός συνόρου με παραμετρικές εξισώσεις



Αν η καμπύλη (σύνορο) περιγράφεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$x = \varphi_1(t), y = \varphi_2(t) > 0, t \in [t_1, t_2]$$

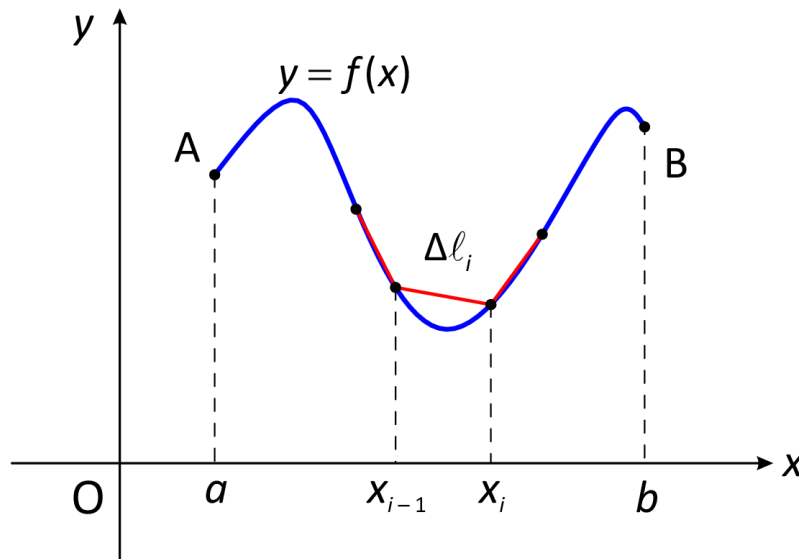
και  $\varphi_1(t_1) = a, \varphi_1(t_2) = b, \varphi_1'(t) > 0$ , τότε το ζητούμενο εμβαδόν

ισούται με

$$E = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_2(t) \varphi_1'(t) dt$$



# Μήκος επίπεδης καμπύλης (1/2)



- Αν  $f$  είναι μια συνεχής συνάρτηση στο  $[a, b]$  με συνεχή παράγωγο, το μήκος του γραφήματός της από το σημείο  $A(a, f(a))$  ως το σημείο  $B(b, f(b))$  είναι ίσο με

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$\Delta l_i \approx \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)^2} \Delta t_i \quad (\Delta t_i > 0)$$



# Μήκος επίπεδης καμπύλης (2/2)

Αν η καμπύλη ορίζεται **παραμετρικά** από τις  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , τότε

$$\left[ \Delta \ell_i \approx \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)^2} \Delta t_i \quad (\Delta t_i > 0) \right]$$

όπου οι τιμές  $t_1$ ,  $t_2$  αντιστοιχούν στα άκρα της καμπύλης με  $t_1 < t_2$ .

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

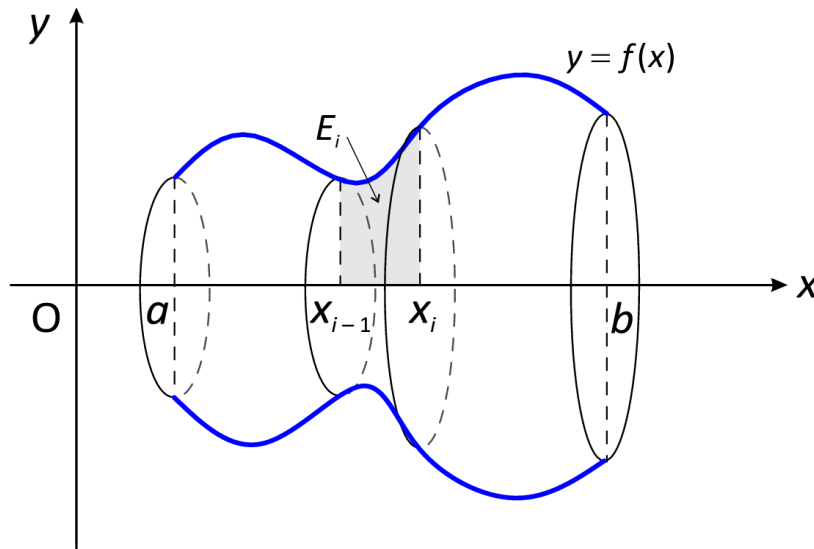
Αν  $r = f(\vartheta)$  είναι μια συνεχής συνάρτηση στο  $[\vartheta_1, \vartheta_2]$ , το μήκος του γραφήματός της από το σημείο  $(\vartheta_1, f(\vartheta_1))$  ως το σημείο  $(\vartheta_2, f(\vartheta_2))$  ισούται ( $\vartheta_1 < \vartheta_2$ ) με

$$\ell = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{[f(\vartheta)]^2 + [f'(\vartheta)]^2} d\vartheta$$





# Όγκος στερεού εκ περιστροφής



Από την περιστροφή του χωρίου με εμβαδόν  $E_i$  γύρω από τον  $x$  προκύπτει στερεό με όγκο  $V_i$ .  
Αποδεικνύεται ότι

$$V_i = \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta x_i$$

όπου  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Όλος ο όγκος

$$\text{είναι } V = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta x_i$$

δηλαδή αποτελεί άθροισμα Riemann της συνάρτησης  $\pi f^2$ .

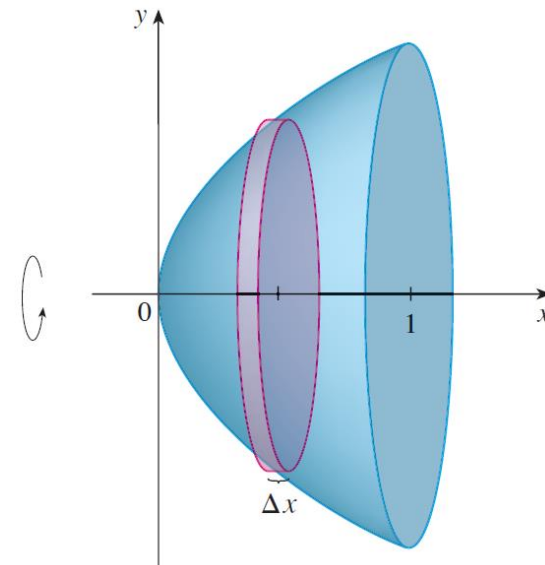
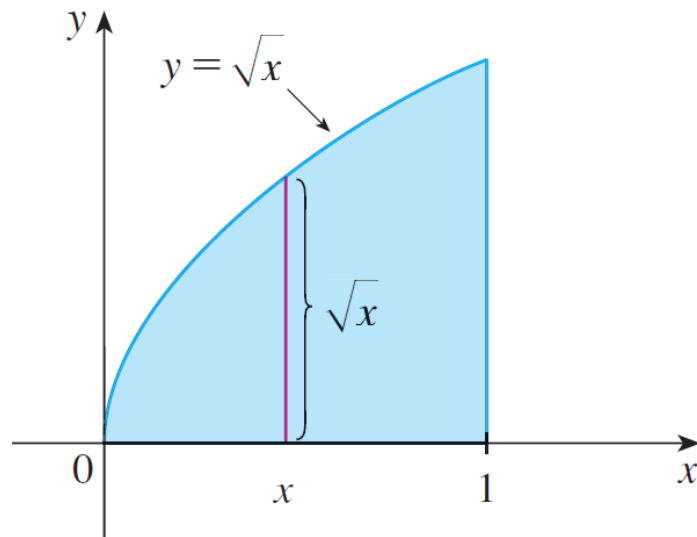
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



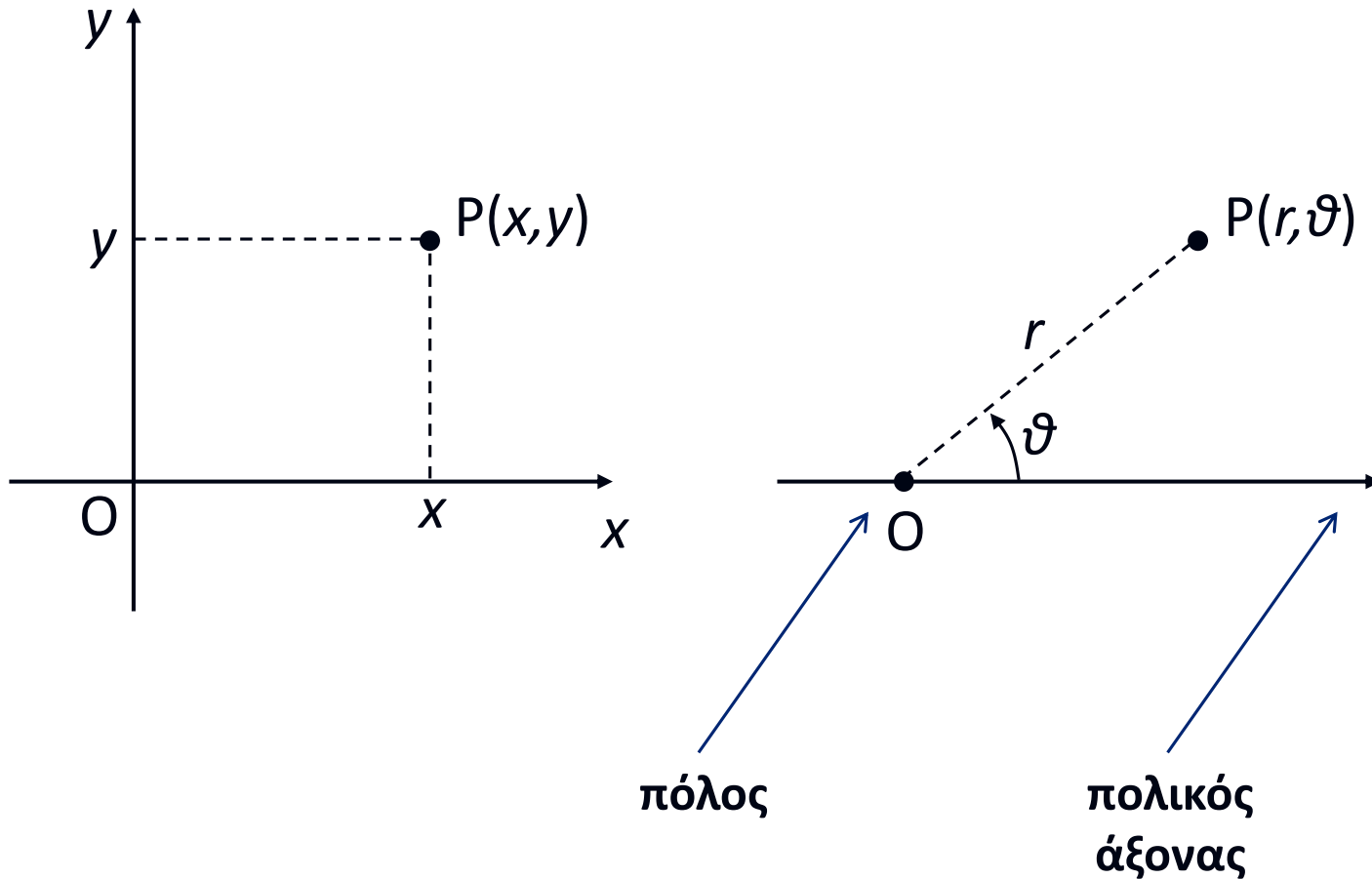
# Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας

- Αν  $f$  είναι μια συνεχής συνάρτηση στο  $[a, b]$ , το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του στερεού εκ περιστροφής γύρω από τον άξονα των  $x$  κατά γωνία  $2\pi$  ισούται με

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

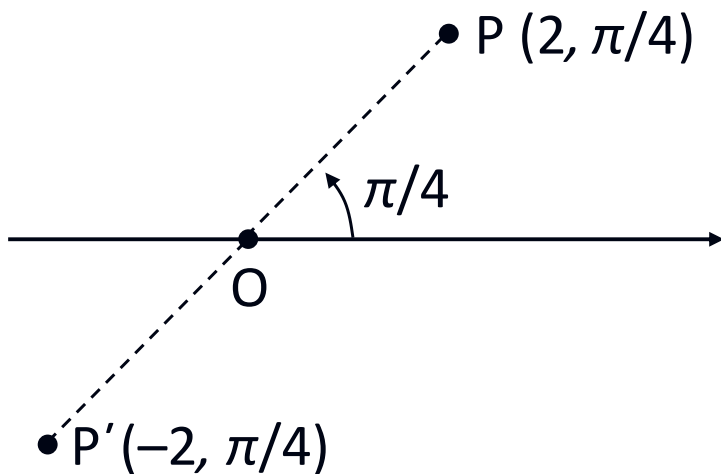


# Το πολικό σύστημα συντεταγμένων (1/4)

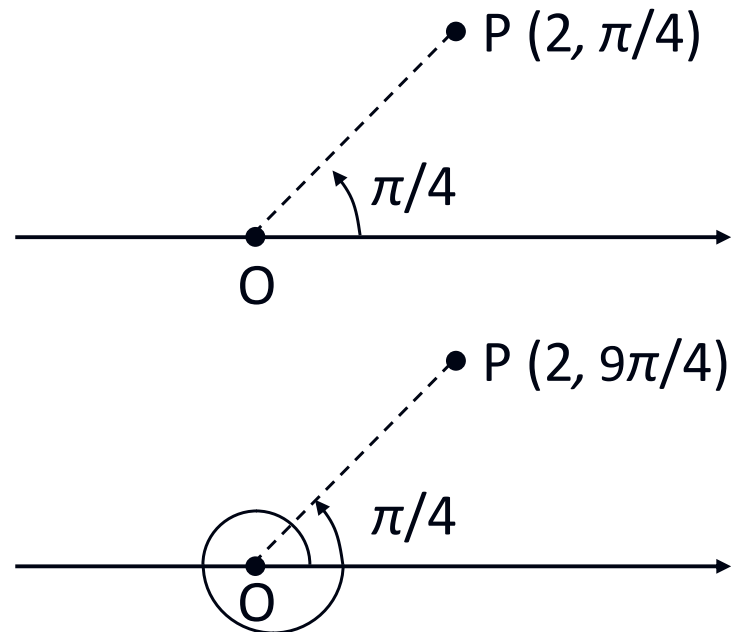


# Το πολικό σύστημα συντεταγμένων (2/4)

Η μεταβλητή  $r$  μπορεί να πάρει και **αρνητικές** τιμές.

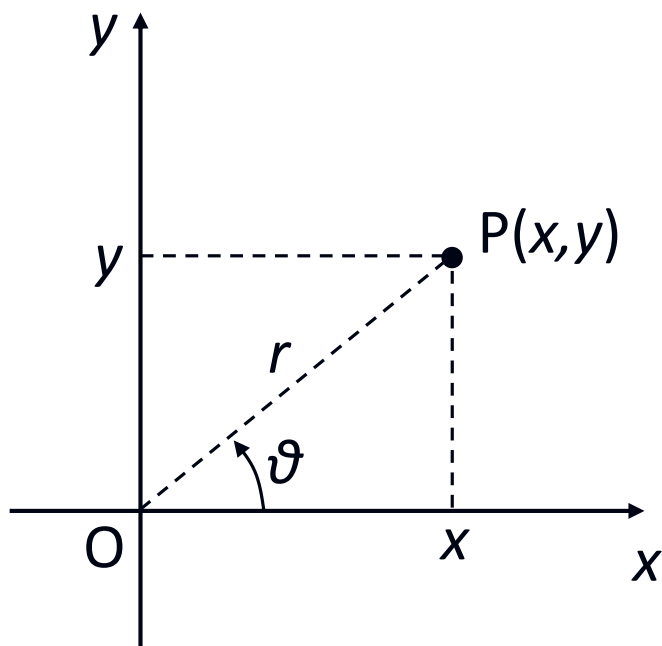


Σε ένα σημείο αντιστοιχούν περισσότερά του ενός ζεύγη πολικών συντεταγμένων.



# Το πολικό σύστημα συντεταγμένων (3/4)

---

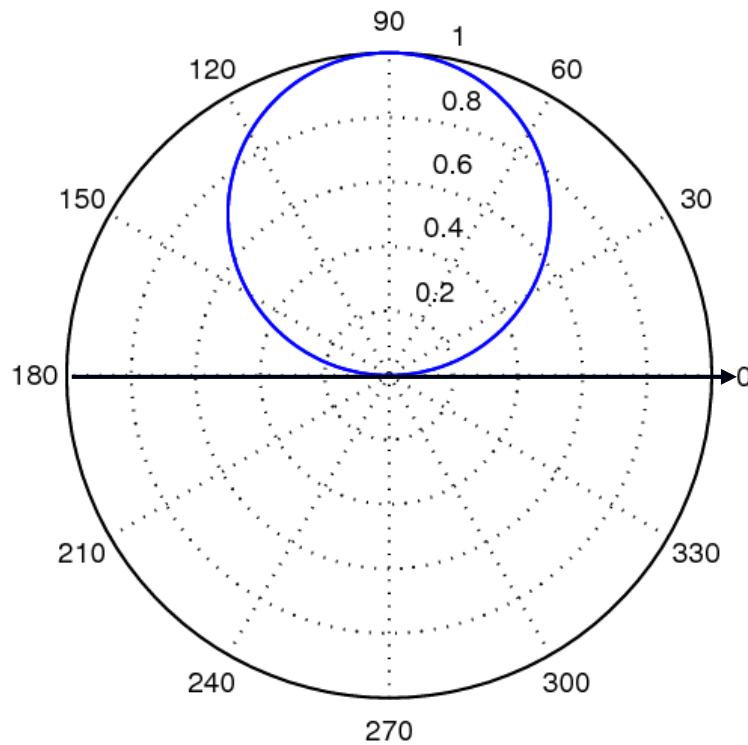


$$\begin{cases} x = r \cos \vartheta \\ y = r \sin \vartheta \end{cases}$$

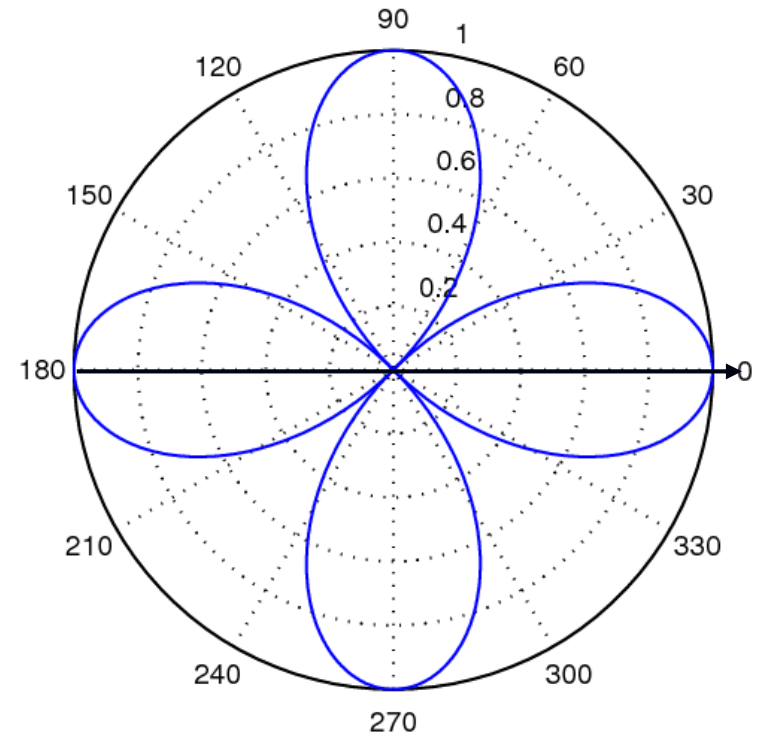
$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan \vartheta = \frac{y}{x}, x \neq 0 \end{cases}$$



# Το πολικό σύστημα συντεταγμένων (4/4)



$$r(\vartheta) = \sin \vartheta$$



$$r(\vartheta) = \cos 2\vartheta$$



---

# Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



# Σημείωμα Αναφοράς

---

- Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Ζυγκιρίδης Θεόδωρος. «Μαθηματική Ανάλυση Ι». Έκδοση: 1.0. Κοζάνη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.uowm.gr/courses/ICTE259/>





# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Όχι Παράγωγα Έργα Μη Εμπορική Χρήση 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό



# Διατήρηση Σημειωμάτων

---

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους  
υπερσυνδέσμους.

