Μαθηματική Ανάλυση Ι

Ενότητα 7: Εφαρμογές παραγώγων

Επίκουρος Καθηγητής Θ. Ζυγκιρίδης
e-mail: *tzygiridis@uowm.gr*

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ψηφιακά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

- Τοπικά και ολικά ακρότατα.
- Εύρεση ακροτάτων.
- Θεωρήματα Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy.
- Μονοτονία.
- Κοίλες/κυρτές συναρτήσεις.
- Κανόνας L’ Hospital.

Στόχοι

Μέσα από αυτήν την ενότητα, οι φοιτητές

- θα μπορούν να προσδιορίζουν και να χαρακτηρίζουν τοπικά και ολικά ακρότατα,
- θα μάθουν να αξιοποιούν το θεώρημα μέσης τιμής,
- θα είναι σε θέση να μελετούν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς τη μονοτονίας της,
- θα μπορούν να αναγνωρίζουν τα διαστήματα στα οποία μια συνάρτηση είναι κοίλη/κυρτή,
- θα υπολογίζουν όρια με απροσδιοριστίες εφαρμόζοντας τον κανόνα L’ Hospital.

Τοπικά ακρότατα

Έστω συνάρτηση $f: A \to \mathrm{P}$. Το $x_0 \in A$ αποτελεί:

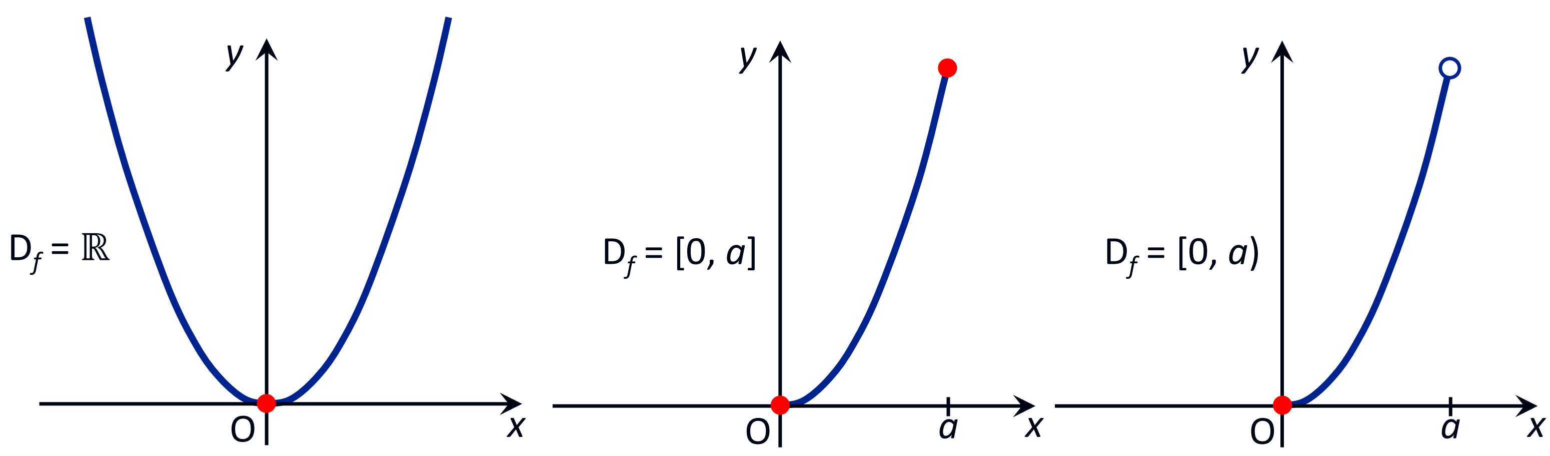
- σημείο **τοπικού μεγίστου** της f, αν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιος ώστε να είναι $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$,
- σημείο **τοπικού ελαχίστου** της f, αν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιος ώστε να είναι $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$.

- Τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα μιας συνάρτησης καλούνται **τοπικά ακρότατα**.
- Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0, το x_0 αποτελεί **θέση** (ή **σημείο**) τοπικού ακροτάτου.

Ολικά ακρότατα

Έστω συνάρτηση $f: \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{P}$. Το $x_0 \in \mathrm{A}$ αποτελεί:

- σημείο **ολικού μεγίστου** της f, αν είναι $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$,
- σημείο **ολικού ελαχίστου** της f, αν είναι $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$.



Θεώρημα του Fermat

Έστω συνάρτηση $f\colon [a, b] \to \mathrm{P}$, παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in (a, b)$. Αν το x_0 είναι **σημείο τοπικού ακροτάτου** της f, τότε

$$f'(x_0) = 0$$

- Το θεώρημα δεν εφαρμόζεται, αν η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση τοπικού ακροτάτου (π.χ. $f(x) = |x|$).
- Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει (π.χ. $f(x) = x^3$).
- Το θεώρημα δεν αναφέρεται στις περιπτώσεις όπου τα τοπικά ακρότατα εντοπίζονται στα άκρα του διαστήματος.

Ακρότατο σε άκρο διαστήματος

Έστω συνάρτηση $f: [a, b) \to \mathrm{P}$. Αν το $x = a$ αποτελεί σημείο **τοπικού ελαχίστου** (**μεγίστου**), τότε

α) είτε η $f'_+(a)$ δεν υπάρχει

β) είτε η $f'_+(a)$ υπάρχει και είναι $f'_+(a) \geq 0$ $(f'_+(a) \leq 0)$.

Έστω συνάρτηση $f: (a, b] \to \mathrm{P}$. Αν το $x = b$ αποτελεί σημείο **τοπικού ελαχίστου** (**μεγίστου**), τότε

α) είτε η $f'_-(b)$ δεν υπάρχει,

β) είτε η $f'_-(b)$ υπάρχει και είναι $f'_-(b) \leq 0$ $(f'_-(b) \geq 0)$.

Ακρότατα

Τα σημεία τοπικών ακροτάτων αναζητούνται:

- στα άκρα διαστημάτων,
- σε θέσεις όπου δεν υπάρχει παράγωγος,
- σε θέσεις μηδενισμού της παραγώγου.

κρίσιμα σημεία

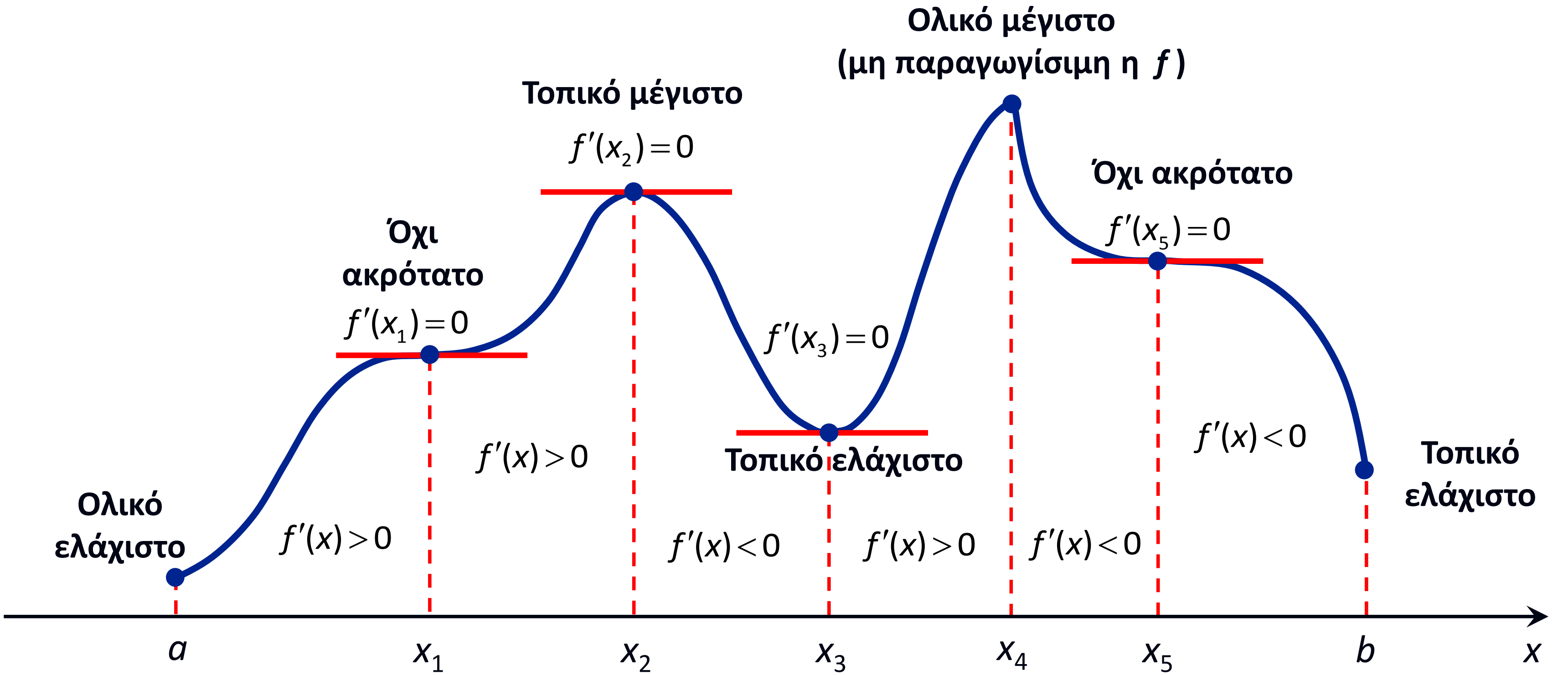
Αν μια συνάρτηση ορίζεται στο **κλειστό διάστημα** [*a*, *b*], τότε για τον εντοπισμό των **ολικών ακροτάτων** χρειάζεται μόνο η σύγκριση των τιμών της συνάρτησης στα κρίσιμα σημεία του (*a*, *b*) και στα άκρα *a*, *b* του διαστήματος.

Προσδιορισμός τοπικών ακροτάτων (1/2)

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in (a, b) \subseteq A$.

- Αν $f'(x) \geq 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) \leq 0$ στο (x_0, b), το x_0 αποτελεί σημείο **τοπικού μεγίστου** της f.
- Αν $f'(x) \leq 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) \geq 0$ στο (x_0, b), το x_0 αποτελεί σημείο **τοπικού ελαχίστου** της f.

Προσδιορισμός τοπικών ακροτάτων (2/2)



Κριτήριο ύπαρξης τοπικού ακρότατου

Έστω συνάρτηση $f: A \to \mathrm{P}$, παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο x_0 με $f'(x_0) = 0$. Αν υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f στο x_0, τότε:

- Αν $f''(x_0) > 0$, το x_0 αποτελεί σημείο **τοπικού ελαχίστου** της f
- Αν $f''(x_0) < 0$, το x_0 αποτελεί σημείο **τοπικού μεγίστου** της f

- Το θεώρημα δεν περιλαμβάνει την περίπτωση που $f''(x_0) = 0$.
- Το θεώρημα δεν ισχύει αντιστρόφως, δηλ. σε σημείο τοπικού ακροτάτου δεν είναι απαραίτητα $f''(x_0) > 0$ ή $f''(x_0) < 0$ (π.χ. $f(x) = x^4$).

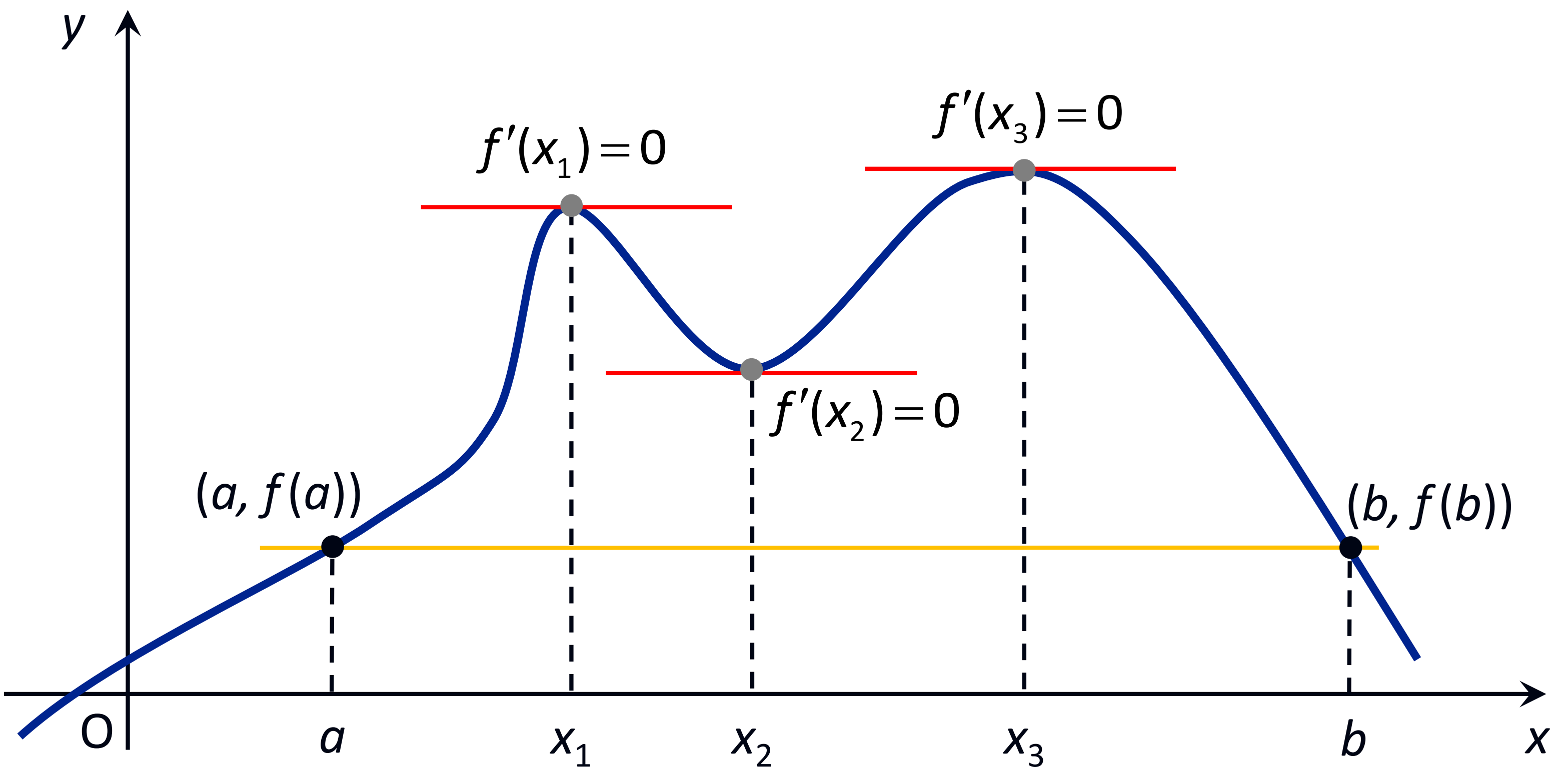
Θεώρημα του Rolle (1/4)

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [a, b] \to \mathrm{P}$, παραγωγίσιμη στο (a, b). Αν είναι $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = 0$$

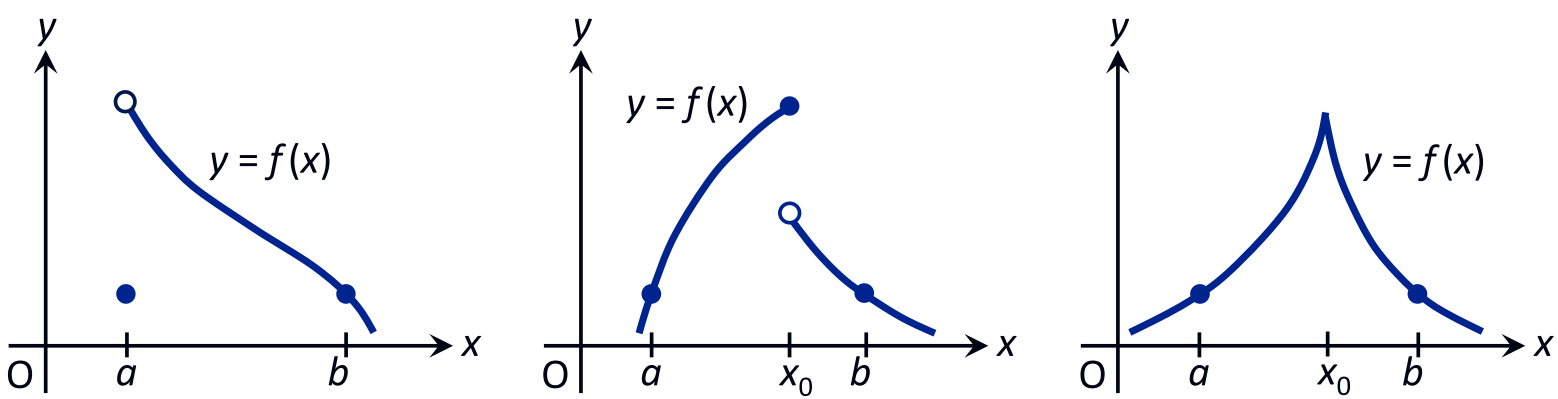
- Το σημείο ξ δεν είναι απαραίτητα μοναδικό (δηλ. υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ).
- Στο σημείο $x = \xi$, η εφαπτόμενη ευθεία είναι **παράλληλη** προς τον άξονα των x.

Θεώρημα του Rolle (2/4)



Θεώρημα του Rolle (3/4)

Περιπτώσεις μη εφαρμογής του θεωρήματος



Ασυνέχεια στο $x = a$

Ασυνέχεια μέσα στο (a, b)

Μη παραγωγίσιμη σε σημείο μέσα στο (a, b)

Θεώρημα του Rolle (4/4)

Παράδειγμα

Ερμηνεία του θεωρήματος στην περίπτωση της ευθύγραμμης κίνησης ενός σώματος.

Αν η συνάρτηση $s(t)$ (t = χρόνος) περιγράφει τη **μετατόπιση** του σώματος, τότε η συνάρτηση $u(t) = s'(t)$ περιγράφει την **ταχύτητά** του κάθε χρονική στιγμή. Αν σε δύο διαφορετικές στιγμές t_1, t_2 ($t_1 \neq t_2$) το σώμα βρίσκεται στην ίδια θέση ($s(t_1) = s(t_2)$), τότε η ταχύτητά του θα πρέπει να είχε **μηδενική τιμή** ($s'(\xi)$) κάποια χρονική στιγμή ξ ανάμεσα στα t_1, t_2.

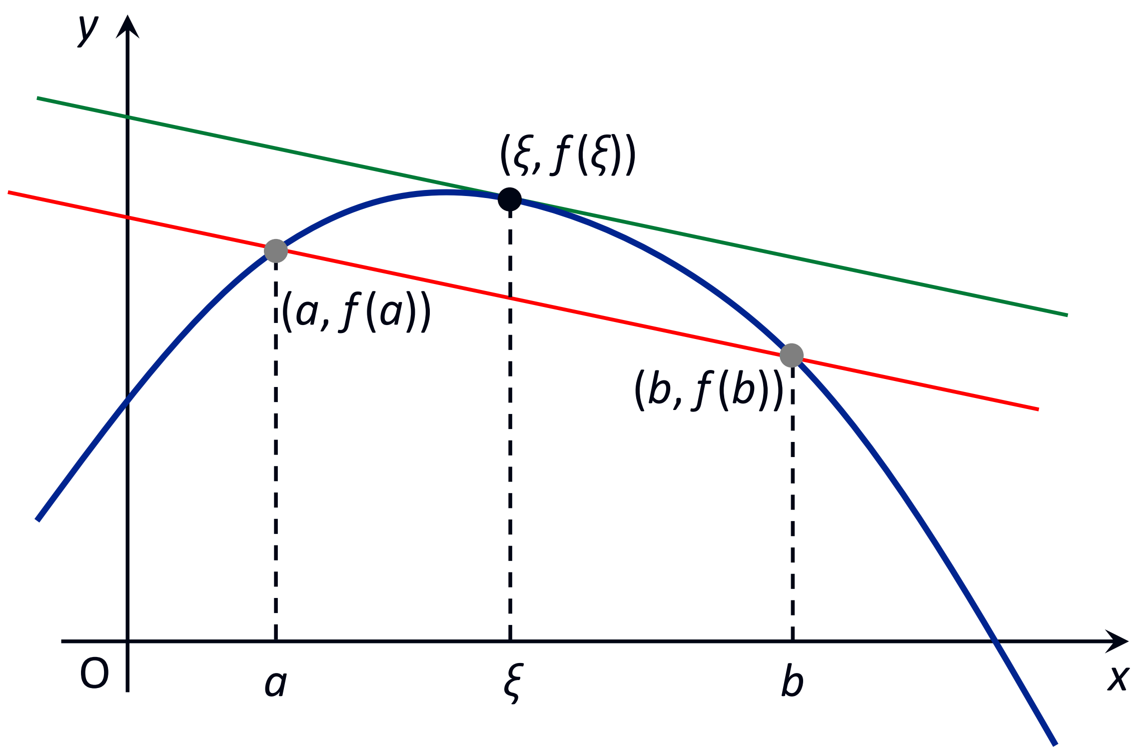
Θεώρημα μέσης τιμής (Lagrange) (1/3)

Έστω συνάρτηση $f: [a, b] \to \mathrm{P}$, συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b). Υπάρχει $\xi \in (a, b)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Στην περίπτωση που $f(a) = f(b)$, το θεώρημα μέσης τιμής ταυτίζεται με το θεώρημα Rolle.
- **Άμεση συνέπεια**: αν $f'(x) = 0$ στο (a, b), τότε $f(x) = c$ στο (a, b).

Θεώρημα μέσης τιμής (Lagrange) (2/3)



Υπάρχει σημείο μεταξύ των a, b, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την τέμνουσα που ορίζεται από τα σημεία $(a, f(a))$, $(b, f(b))$.

Θεώρημα μέσης τιμής (Lagrange) (3/3)

Παράδειγμα

Ερμηνεία του θεωρήματος στην περίπτωση της ευθύγραμμης κίνησης ενός σώματος.

Η **μέση τιμή της ταχύτητας** ενός σώματος που κινείται ευθύγραμμα στο χρονικό διάστημα από t_1 σε t_2 είναι ίση με

$$\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$$

όπου $s(t)$ η μετατόπιση. Σύμφωνα με το θεώρημα, η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος κάποια χρονική στιγμή ξ μεταξύ των t_1, t_2 θα πρέπει να είναι ίση με τη μέση τιμή της.

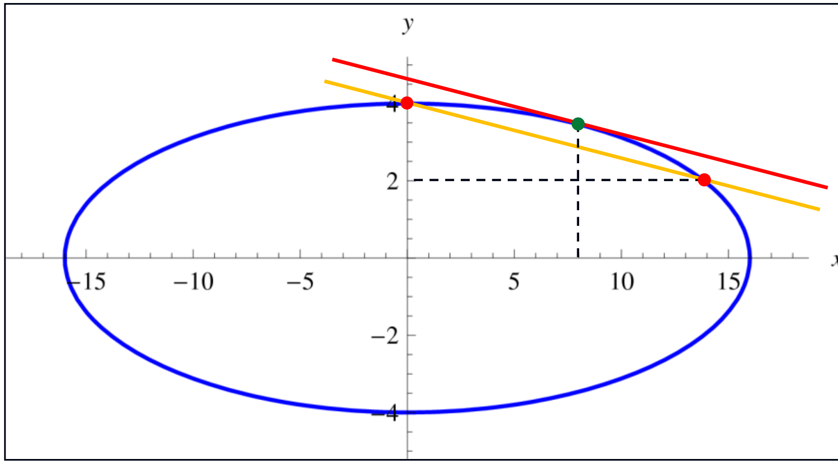
Θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy (1/2)

Έστω συναρτήσεις f, g: $[a, b] \to \mathrm{P}$, συνεχείς στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b). Υπάρχει $\xi \in (a, b)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)\big(g(b)-g(a)\big)=g'(\xi)\big(f(b)-f(a)\big)$$

- Το θεώρημα μέσης τιμής αποτελεί ειδική περίπτωση του θεωρήματος Cauchy, όταν $g(t) = t$.
- Μια γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος βασίζεται στην ύπαρξη συγκεκριμένης εφαπτομένης σε μια παραμετρικά ορισμένη καμπύλη (δεν καλύπτει, ωστόσο, τις περιπτώσεις όπου $f'(\xi) = g'(\xi) = 0$).

Θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy (2/2)

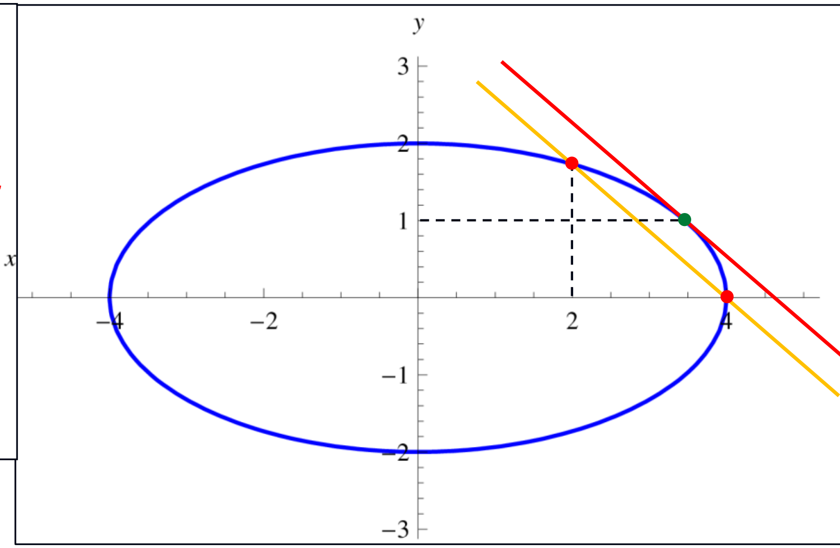


$$\boxed{\begin{array}{l} x = f(t) = 16\cos t \\ y = g(t) = 8\sin t \end{array}},\ \left[\tfrac{\pi}{6}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

$$\xi = \tfrac{\pi}{3},\ (x_\xi, y_\xi) = \left(8, 2\sqrt{3}\right)$$

$$(x_{\frac{\pi}{6}}, y_{\frac{\pi}{6}}) = \left(8\sqrt{3}, 2\right)$$

$$(x_{\frac{\pi}{2}}, y_{\frac{\pi}{2}}) = \left(0, 4\right)$$



$$\boxed{\begin{array}{l} x = f(t) = 4\sin t \\ y = g(t) = 2\cos t \end{array}},\ \left[\tfrac{\pi}{6}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

$$\xi = \tfrac{\pi}{3},\ (x_\xi, y_\xi) = \left(2\sqrt{3}, 1\right)$$

$$(x_{\frac{\pi}{6}}, y_{\frac{\pi}{6}}) = \left(2, \sqrt{3}\right)$$

$$(x_{\frac{\pi}{2}}, y_{\frac{\pi}{2}}) = \left(4, 0\right)$$

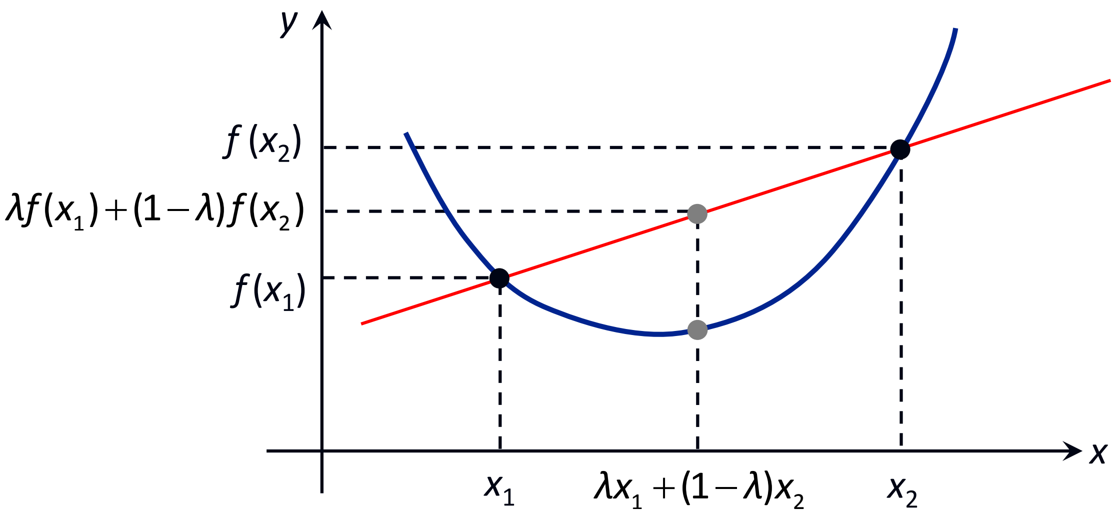
Μονοτονία

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: A \to \mathrm{P}$, παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Α. Τότε:

- *αν $f'(x) > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α,
- *αν $f'(x) < 0$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Α,
- αν $f'(x) \geq 0$, η f είναι αύξουσα στο Α,
- αν $f'(x) \leq 0$, η f είναι φθίνουσα στο Α,
- αν $f'(x) = 0$, η f είναι σταθερή στο Α.

* Δεν ισχύουν αντιστρόφως (π.χ. $f(x) = x^3$).

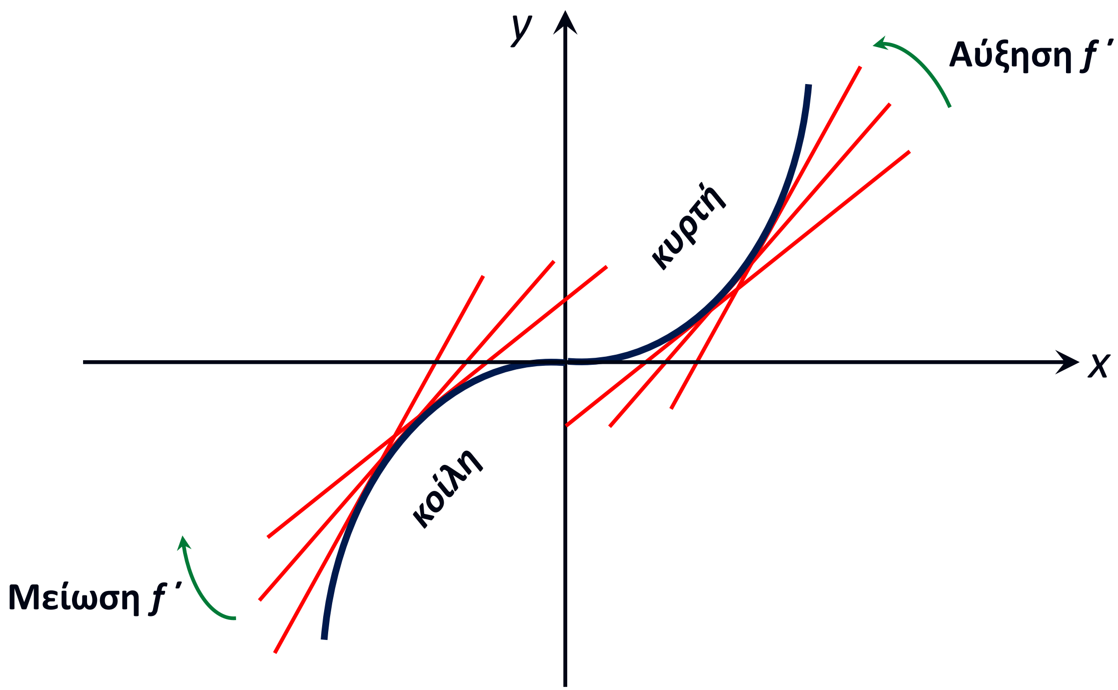
Κοίλες/κυρτές συναρτήσεις (1/3)



Αν $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ για κάθε x_1, $x_2 \in A$ με $0 \leq \lambda \leq 1$, η f είναι **κυρτή** στο A (αντίστοιχα, είναι **κοίλη** στο A, αν αντικατασταθεί το ≤ με ≥).

Κοίλες/κυρτές συναρτήσεις (2/3)

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathrm{A} \to \mathrm{P}$. Αυτή καλείται **κοίλη** (**κυρτή**) στο Α, αν και μόνο αν η παράγωγος συνάρτησή της είναι **φθίνουσα** (**αύξουσα**) εκεί.



Κοίλες/κυρτές συναρτήσεις (3/3)

Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathrm{P}$, δύο φορές παραγωγίσιμη. Η f είναι

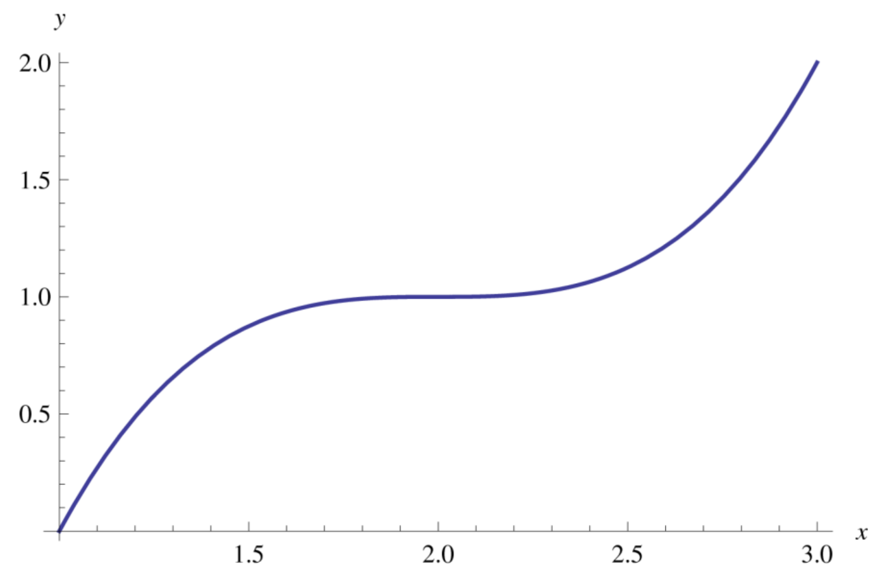
- **κυρτή** στο Α, αν $f''(x) > 0$,
- **κοίλη** στο Α, αν $f''(x) < 0$,

για κάθε x εσωτερικό του Α.

Παράδειγμα

$$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N},\ n > 2$$

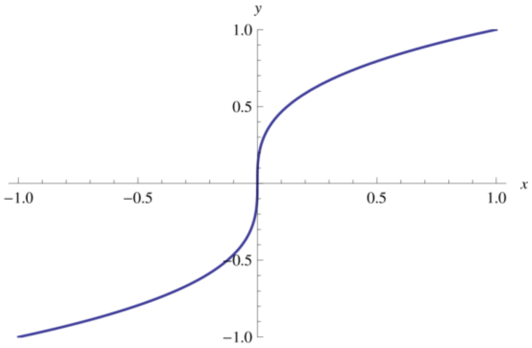
$$f(x) = (x-2)^3 + 1$$



Σημεία καμπής

Σημείο καμπής μιας συνάρτησης καλείται ένα σημείο στο οποίο η συνάρτηση α) είναι συνεχής και β) αλλάζει η κυρτότητά της.

- Τα σημεία καμπής αναζητούνται στις λύσεις της εξίσωσης $f''(x) = 0$.
- Η κυρτότητα μπορεί να αλλάζει σε ένα σημείο όπου δεν ορίζεται η $f''(x)$ (π.χ. $f(x) = x^{1/3}$).
- Αν είναι $f''(x_0) = 0$, αυτό δε σημαίνει απαραίτητα ότι το x_0 αποτελεί σημείο καμπής (π.χ. $f(x) = x^4$).



Κανόνας L' Hospital (1/2)

Αν δύο συναρτήσεις $f, g : \mathrm{A} \to \mathrm{P}$, με $g(x)$, $g'(x) \neq 0$ για $x \in \mathrm{A}$ $(x \neq x_0)$, είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και ισχύει

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \ \left(\text{ή} \pm\infty\right)$$

τότε

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

με την προϋπόθεση ότι το δεύτερο όριο υπάρχει.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(3x)}{\sin x - e^{\cos x}}$$

Κανόνας L’ Hospital (2/2)

Αν δύο συναρτήσεις f, g: Α $\to$ Ρ είναι παραγωγίσιμες n φορές στο x_0, με $g(x), g'(x), g''(x), \ldots, g^{(n)}(x) \neq 0$ για $x \in$ Α ($x \neq x_0$) και ισχύει

$$\lim_{x\to x_0} f^{(k)}(x) = \lim_{x\to x_0} g^{(k)}(x) = 0 \ \left(\text{ή} \pm\infty\right),\ k = 0,1,\ldots,n-1$$

τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

με την προϋπόθεση ότι το δεύτερο όριο υπάρχει.

Κανόνας L' Hospital (περιπτώσεις)

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0, \ \lim_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$$

$$\lim\left[f(x)g(x)\right]= \begin{cases} \lim\dfrac{f(x)}{\left[g(x)\right]^{-1}} & \left(\dfrac{0}{0}\right) \\[2ex] \lim\dfrac{g(x)}{\left[f(x)\right]^{-1}} & \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty, \ \lim_{x\to x_0} g(x)=-\infty$$

$$\lim\left[f(x)+g(x)\right]=\lim\left[f(x)\left(\frac{g(x)}{f(x)}+1\right)\right]$$

$$0^0, 1^\infty, \infty^0$$

$$f(x)>0$$

$$\lim\left[f(x)^{g(x)}\right]=\lim\left[e^{g(x)\ln\left[f(x)\right]}\right]$$

$$g(x)\ln\left[f(x)\right]\to 0\cdot\infty$$

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Αναφοράς

- Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Ζυγκιρίδης Θεόδωρος. «Μαθηματική Ανάλυση Ι». Έκδοση: 1.0. Κοζάνη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

  https: //eclass.uowm.gr/courses/ICTE259/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.