



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας  
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών

---

# Μαθηματική Ανάλυση I

## Ενότητα 6: Παράγωγοι

Επικ. Καθηγητής Θ. Ζυγκιρίδης

e-mail: [tzygiridis@uowm.gr](mailto:tzygiridis@uowm.gr)

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

---



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας



# Άδειες Χρήσης

---

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ψηφιακά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



# Περιεχόμενα

---

- Εφαπτόμενη ευθεία σε καμπύλη.
- Ορισμοί.
- Πλευρικές παράγωγοι.
- Κανόνες παραγωγίσισης.
- Η έννοια του διαφορικού.
- Παραγωγή πεπλεγμένων συναρτήσεων.
- Παραγωγή παραμετρικά ορισμένων συναρτήσεων.



# Στόχοι

---

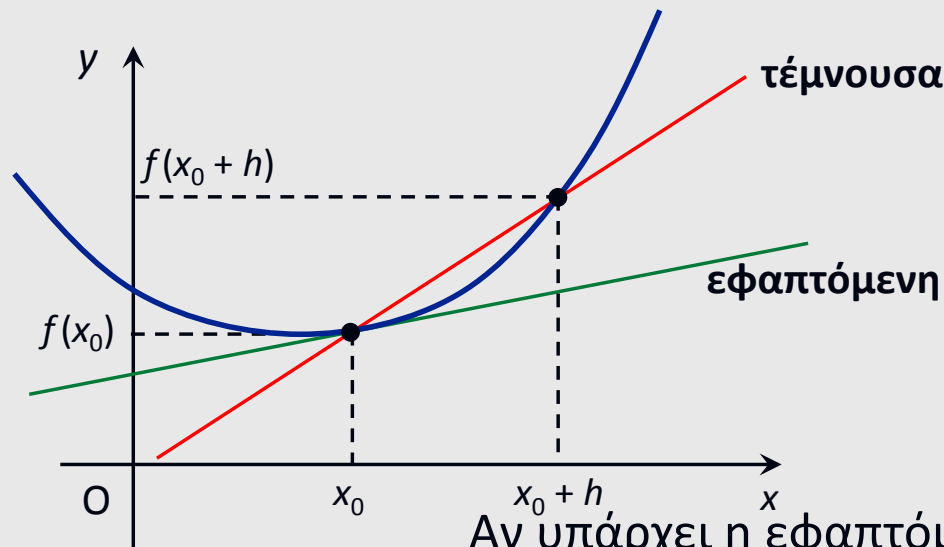
Μέσα από αυτήν την ενότητα, οι φοιτητές:

- Θα κατανοήσουν την έννοια της παραγώγου και τη γεωμετρική ερμηνεία της,
- Θα μπορούν να παραγωγίζουν συναρτήσεις, όπως και να ορίζονται αυτές (π.χ. πεπλεγμένα, παραμετρικά)
- Θα είναι σε θέση να προσδιορίζουν εφαπτόμενες ευθείες,
- Θα κατανοήσουν την έννοια του διαφορικού συνάρτησης και της γραμμικοποίησης,
- Θα αξιοποιούν διαφορικά σε προσεγγίσεις.



# Εφαπτόμενη ευθεία σε καμπύλη

Αναζητούμε την εξίσωση της ευθείας που **εφάπτεται** στη γραφική παράσταση της  $y = f(x)$  στο σημείο  $x_0$



Αν υπάρχει η εφαπτόμενη ευθεία στο  $x = x_0$ ,  
θα έχει κλίση

Κλίση  
τέμνουσας

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lambda(h)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lambda(h)$$



# Ορισμός (1/2)

Έστω συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{P}$  με  $x_0 \in A$ . Η  $f$  είναι **παραγωγίσιμη** στο  $x_0$ , αν υπάρχει το όριο.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Η παραπάνω τιμή ονομάζεται **παράγωγος** της  $f$  στο  $x_0$  και συμβολίζεται με

$$f'(x_0), \left( \frac{df}{dx} \right)_{x_0}, \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



# Ορισμός (2/2)

Αν η συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{P}$  είναι παραγωγίσιμη σε κάθε  $x_0 \in A$ , τότε η  $f$  καλείται **παραγωγίσιμη** στο  $A$ .

## Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η παράγωγος της  $f(x) = \frac{1}{x}$

σε κάθε  $x_0 \neq 0$ .

Αν η συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{P}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $B \subseteq A$ , τότε η συνάρτηση που παίρνει την τιμή  $f'(x)$  για κάθε  $x \in B$  ονομάζεται **παράγωγος συνάρτηση** της  $f$ .





# Πλευρικές παράγωγοι (1/3)

- Έστω συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{P}$  με  $x_0 \in A$ . **Δεξιά παράγωγος** της  $f$  στο  $x_0 \in A$  ονομάζεται (αν υπάρχει) το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (= f'_+(x_0))$$

**Αριστερή παράγωγος** της  $f$  στο  $x_0 \in A$  ονομάζεται (αν υπάρχει) το όριο

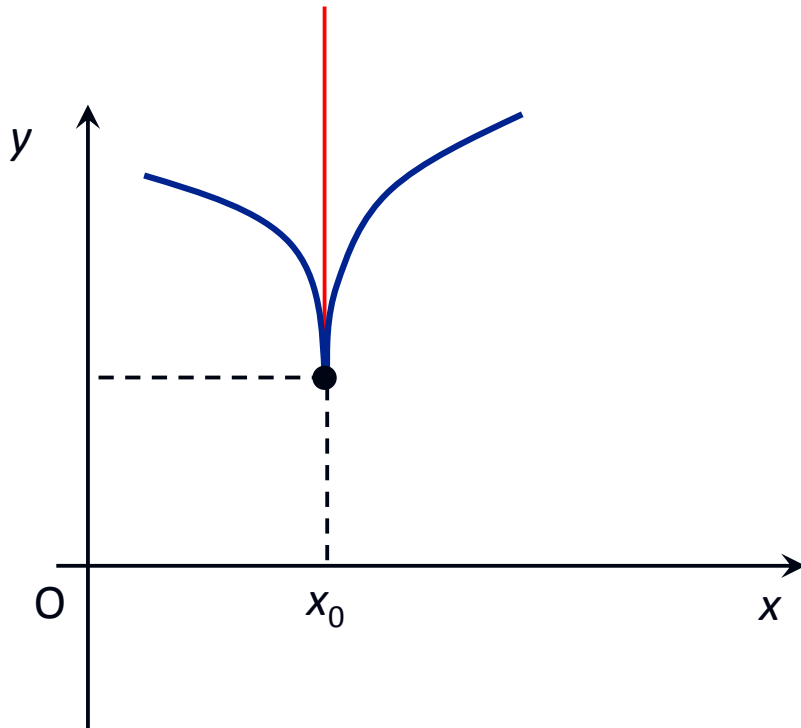
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (= f'_-(x_0))$$

Μια συνάρτηση  $f$  είναι **παραγωγίσιμη** στο  $x_0$ , αν και μόνο αν

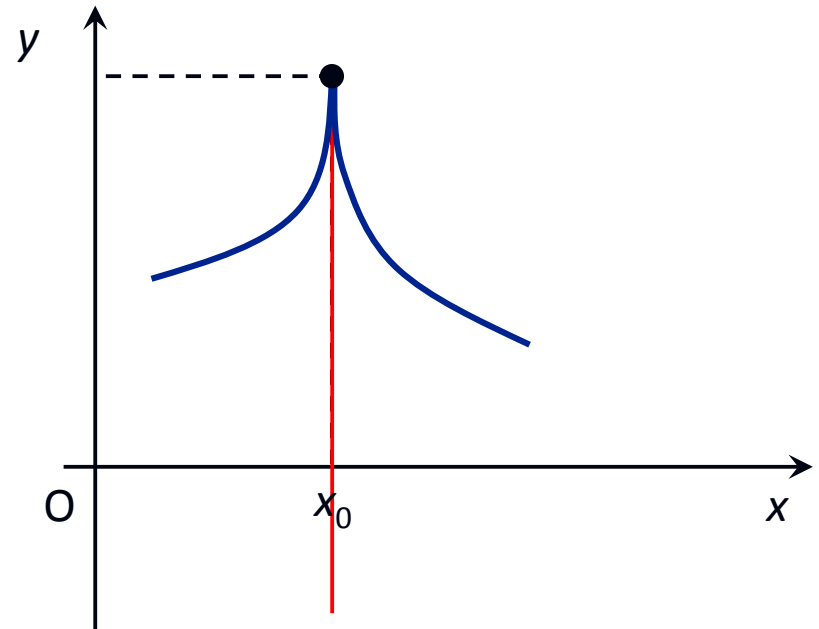
$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \in \mathbb{P}$$



# Πλευρικές παράγωγοι (2/3)



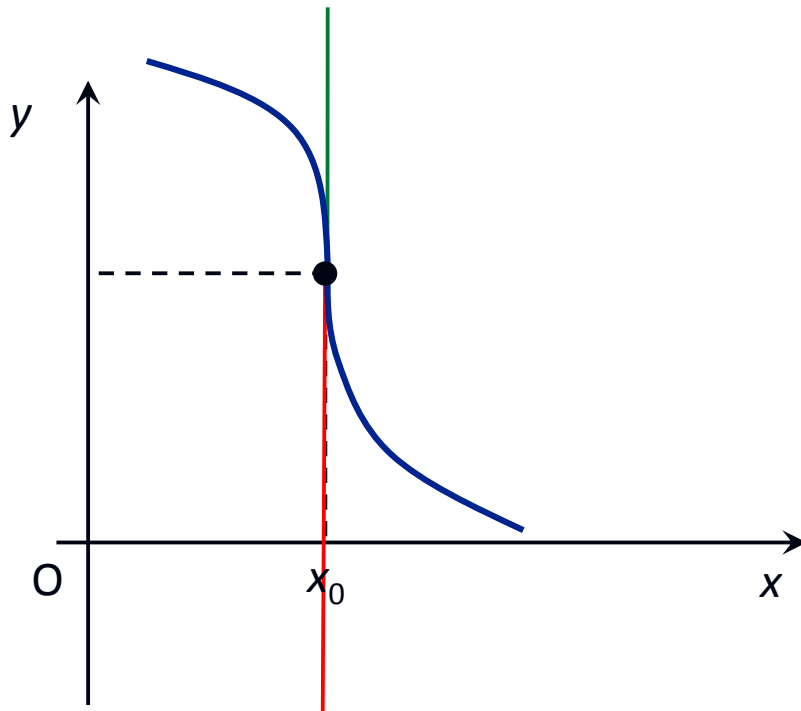
$$f'_-(x_0) = -\infty, f'_+(x_0) = +\infty$$



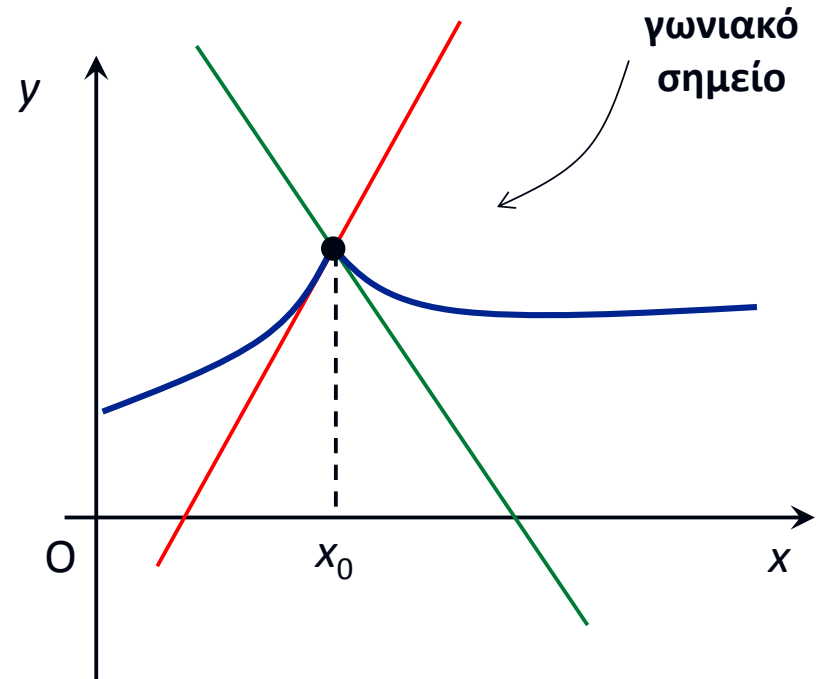
$$f'_-(x_0) = +\infty, f'_+(x_0) = -\infty$$



# Πλευρικές παράγωγοι (3/3)



$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = -\infty$$



$$f'_-(x_0) = a \neq f'_+(x_0) = b, a, b \in \mathbb{R}$$



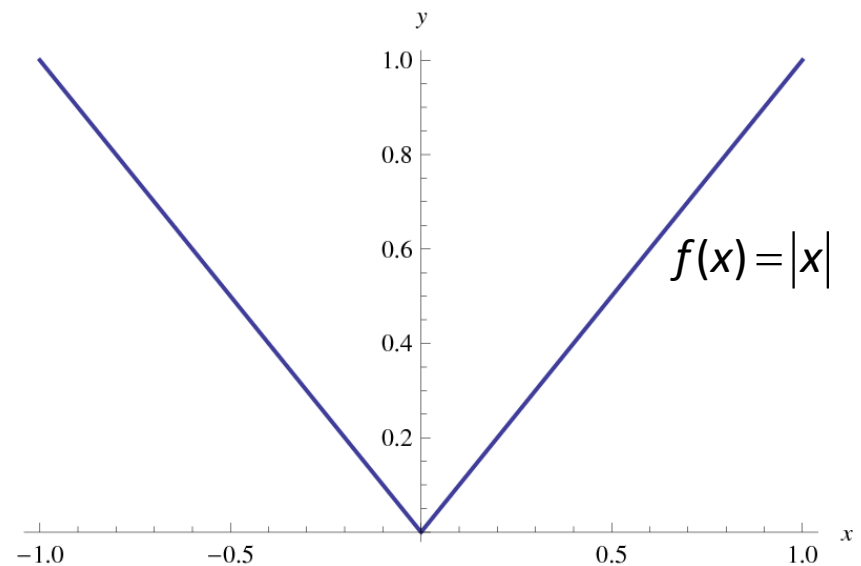
# Παράγωγοι και συνέχεια

Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοιχτό διάστημα  $A$ , τότε είναι **συνεχής** στο  $A$ .

Δεν ισχύει το αντίστροφο, δηλ. μια συνεχής συνάρτηση δεν είναι απαραίτητα παραγωγίσιμη.

## Παράδειγμα

Η  $f(x) = |x|$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x = 0$ .



# Κανόνες παραγώγισης

---

Αν οι συναρτήσεις  $f$ ,  $g$  είναι παραγωγίσιμες στο σημείο  $x$ , τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0$$



# Παράγωγοι συναρτήσεων

---

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$



# Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Έστω συνάρτηση  $f: A \rightarrow P$  και συνάρτηση  $g: f(A) \rightarrow P$ . Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 \in A$  και η  $g$  παραγωγίσιμη στο  $f(x_0)$ , τότε και η **σύνθετη** συνάρτηση  $g \circ f$  είναι **παραγωγίσιμη** στο  $x_0$

και ισχύει 
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

**Παράδειγμα** 
$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du} \frac{du}{dx}, u = f(x), v = g(u)$$

Να υπολογιστεί η παράγωγος της  $f(x) = \sin(\sin(\sin x))$



# Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης

Έστω συνάρτηση  $f: A \rightarrow P$  γνησίως μονότονη, συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $x \in A$  με  $f'(x) \neq 0$ . Τότε και η **αντίστροφή** της θα είναι **παραγωγίσιμη** στο  $f(x) \in f(A)$  και θα ισχύει

$$\left. \frac{d}{dy} [f^{-1}(y)] \right|_{y=f(x)} = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

**Παράδειγμα**

Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ .





# Διαφορικό συνάρτησης (1/3)

---

**Διαφορικό** μιας συνάρτησης  $f: A \rightarrow \mathbb{P}$  στο σημείο  $x_0 \in A$  όπου είναι παραγωγίσιμη, ονομάζεται η συνάρτηση

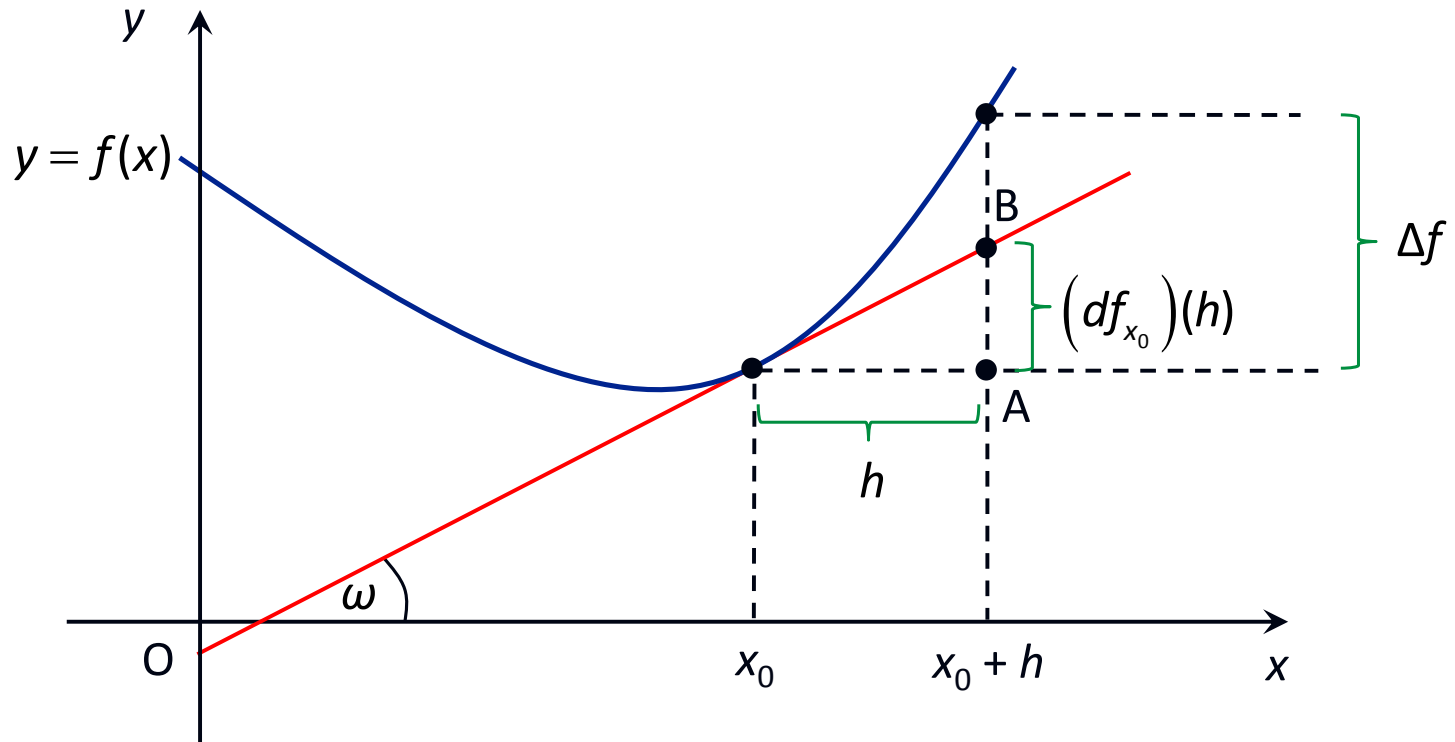
$$(df_{x_0})(h) = f'(x_0) \cdot h$$

με  $(x_0 + h) \in A$

Η τιμή του διαφορικού για συγκεκριμένο  $h$  περιγράφει το πόσο έχει μεταβληθεί η τιμή του  $y$  **πάνω στην εφαπτομένη**, όταν μεταβάλλεται η τιμή του  $x$  κατά  $h$ .



# Διαφορικό συνάρτησης (2/3)



$$(AB) = \tan \omega \cdot h = f'(x_0) \cdot h = (df_{x_0})(h)$$

└──────────┬──────────> κλίση της εφαπτομένης στο  $x_0$



# Διαφορικό συνάρτησης (3/3)

Κατά τη μεταβολή από το  $x_0$  στο  $x_0 + h$ , η μεταβολή στην τιμή της  $f$  είναι ίση με

$$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

Η τιμή αυτή σχετίζεται με την τιμή του διαφορικού (η οποία αντιστοιχεί στη μεταβολή των τιμών πάνω στην εφαπτομένη) μέσω της σχέσης

$$\Delta f = (df_{x_0})(h) + \varepsilon h$$

Διαφορίσιμη  
συνάρτηση

όπου  $\varepsilon \rightarrow 0$  όταν  $h \rightarrow 0$ .



# Προσέγγιση μέσω διαφορικών

Συνεπώς, μια μεταβολή στις τιμές μιας συνάρτησης  $f$ , όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή αλλάξει από  $x_0$  σε  $x_0 + h$ , μπορεί να προσεγγιστεί (για μικρές τιμές του  $h$ ) μέσω της σχέσης

$$\Delta f \approx f'(x_0) \cdot h = (df_{x_0})(h)$$

## Παράδειγμα

Να υπολογιστεί μια προσεγγιστική τιμή της συνάρτησης  
 $f(x) = \sqrt[3]{x}$

στο  $x = 30$ .

Η συνάρτηση  $L(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  αποτελεί τη **γραμμική προσέγγιση** (ή **γραμμικοποίηση**) της  $f$  στο  $x_0$ .



# Παράγωγοι ανώτερης τάξης

- Έστω συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{P}$  παραγωγίσιμη στο  $x \in A$ . Αν υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης  $f'(x)$  στο ίδιο σημείο, αυτή ονομάζεται **παράγωγος 2<sup>ης</sup> τάξης** ή **2<sup>η</sup> παράγωγος** της  $f$  και συμβολίζεται ως

$$f'' = (f')' \quad \text{ή} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx} \right)$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούν να οριστούν οι παράγωγοι ανώτερης τάξης, π.χ.

$$f^{(3)} = f''' = (f'')'$$

$$f^{(4)} = f'''' = (f''')'$$



# Πεπλεγμένες συναρτήσεις (1/2)

- **Πεπλεγμένη** ονομάζεται μια συνάρτηση, αν ορίζεται μέσω μιας εξίσωσης της μορφής

$$F(x, y) = 0$$

Για τον υπολογισμό της παραγώγου:

- επιλύουμε ως  $y$  και παραγωγίζουμε, ή
- παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη ως προς  $x$  και επιλύουμε ως προς  $y'$ .

## Παράδειγμα

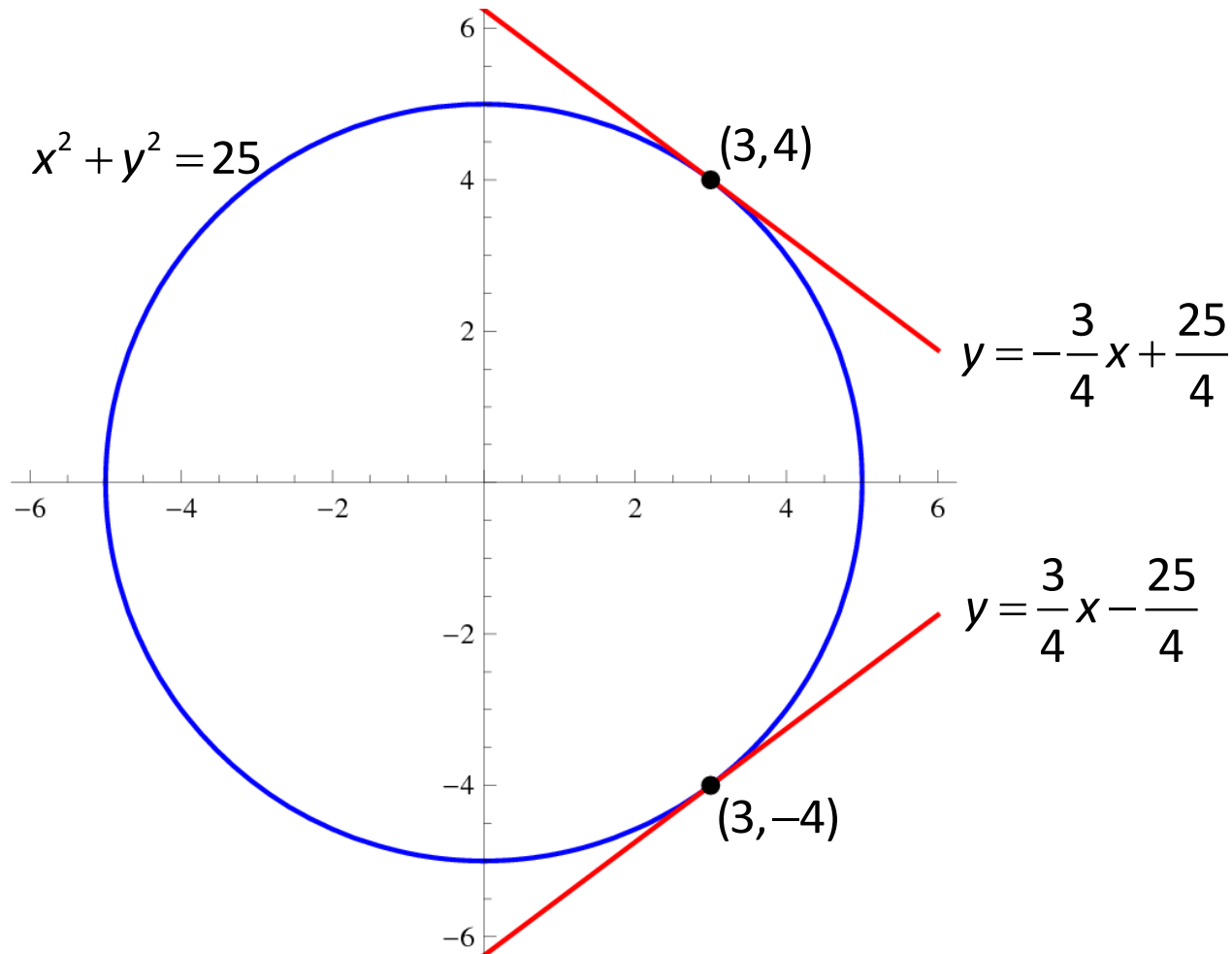
Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης

για  $x = 3$ .

$$x^2 + y^2 = 25$$



# Πεπλεγμένες συναρτήσεις (2/2)



# Παραμετρικές καμπύλες

Αν οι  $x, y$  αποτελούν συναρτήσεις μιας ανεξάρτητης μεταβλητής  $t$  (δηλ.  $x = f(t), y = g(t)$ ), τότε το σύνολο των σημείων  $(x, y) = (f(t), g(t))$  ορίζει μια **παραμετρική καμπύλη**.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \xrightarrow{\frac{dx}{dt} \neq 0} \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

## Παράδειγμα

Αν  $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$

να βρεθεί η  $dy/dx$ .





---

# Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



# Σημείωμα Αναφοράς

---

- Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Ζυγκιρίδης Θεόδωρος. «Μαθηματική Ανάλυση Ι». Έκδοση: 1.0. Κοζάνη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.uowm.gr/courses/ICTE259/>



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Όχι Παράγωγα Έργα Μη Εμπορική Χρήση 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό



# Διατήρηση Σημειωμάτων

---

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους  
υπερσυνδέσμους.

